Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Anela Bocor

Nastava trigonometrije

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Anela Bocor

Nastava trigonometrije

Diplomski rad

Mentor: Doc. dr. sc. Ivan Matić
Komentor: Dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2013.

Sadržaj

1. Uvod

Francuski matematičar Viète rekao je da je trigonometrija ponos matematičara, jer nas ona uči kako da na divan način mjerimo po nebu, zemlji i vodi. Svjesno ili nesvjesno mjerimo svaki dan. Hodanjem ili šetanjem možemo mjeriti, jer nadovezivanje koraka na korak ima sličnosti s mjerenjem pomoću šestara, štapa, metra ili kakvog kotača koji se okreće. Osnovne veličine koje mjerimo, određujemo i preračunavamo su dužine, kutovi, površine i obujmovi. Trigonometrija je grana matematike koja se bavi specifičnim funkcijama kutova i njihovom primjenom. Također, možemo reći da je ona dio geometrije koji nas upoznaje sa svojstvima trigonometrijskih funkcija te s primjenom tih funkcija na rješavanje različitih zadataka u vezi s trokutima. Obzirom da je glavna zadaća trigonometrije preračunavanje i traženje veza među raznim kutovima i raznim dužinama u trokutu, može se reći da nas trigonometrija uči kako da ravnopravno i preračunavamo i crtamo kutove i dužine. Samo ime *trigonometrija* riječ je grčkog podrijetla, a nastala je iz riječi *trigonon* - trokut i *metreo* - mjeriti. Možemo ju podijeliti na *ravninsku* (kutovi i udaljenosti u ravnini) i *sfernu* (kutovi i udaljenosti u prostoru). Trigonometrija je nastala pri promatranju neba, mjerenjima zbog navigacije, te rješavanju raznih problema iz zemljomjerstva. Babilonci i Egipćani su znali za Pitagorin teorem te su to znanje koristili za gradnju piramida, mjerenja polja i tako je nastala trigonometrija. Babilonci su također koristili seksagezimalni brojevni sustav, tj. sustav s bazom 60 kojeg mi danas koristimo za računanje kutova. Iako se prvo koristila sferna trigonometrija, veću primjenu je imala ravninska trigonometrija. Geodeti ju koriste stoljećima, kao i vojni i drugi inženjeri. U fizici, trigonometrija se koristi u područjima optike i statike te u fizikalnoj kemiji. Primjenu trigonometrije nalazimo i u modernoj arhitekturi.

Ovaj diplomski rad temeljen je na uspoređivanju udžbenika za drugi i treći razred srednjih škola različitih autora i izdavača. Opisan je način uvođenja i obrade trigonometrijskih funkcija u gimnazijama, tehničkim i strukovnim školama. Istaknute su sličnosti i razlike u pristupu te je posebno naglašeno koliko je zastupljena primjena trigonometrije u stereometriji. U drugom poglavlju dan je kratak povijesni pregled trigonometrije. Treći dio rada sastoji se od trigonometrije pravokutnog trokuta. Obrađujući udžbenik po udžbenik nastojimo predočiti na koji način su autori uveli trigonometrijske funkcije. U četvrtom poglavlju biti će govora o trigonometriji koja se obrađuje u trećem razredu srednje škole. U petom poglavlju spomenuto je što se od gradiva trigonometrije traži na državnoj maturi. Dani su primjeri zadataka koji su se do sada pojavljivali na ispitima državne mature. U posljednjem, šestom poglavlju poglavlju obrađen je članak u kojem se proučavaju različiti načini uvođenja trigonometrijskih funkcija te opisuje ispitivanje provedeno nad učenicima kojima su predavači trigonometrijske funkcije uveli na jedan ili drugi način. Istaknute su prednosti i nedostatci svakog od načina uvođenja.

2. Povijesni razvoj trigonometrije

2.1. Povijest trigonometrije

Sferna trigonometrija nastala je prije ravne, a njeni začetnici su Babilonci i Egipćani. Oni su do nje došli promatrajući gibanja zvijezda po nebeskom svodu. Iz najstarije egipatske računice, tzv. *Ahmesove računice* (papirus oko 18. st. prije naše ere prozvan *Rhindovim papirusom* po njegovu pronalazaču Rhindu) vidljivo je da su se Egipćani služili nekim počecima trigonometrije pri projektiranju i izgradnji svojih velikih građevina, npr. piramida. Među 84 problema iz algebre, aritmetike i geometrije, javlja se i pet problema u kojima se spominje *seqt*. Seqt ustvari predstavlja kotangens, što znači da su Egipćani poznavali numeričke relacije u trokutu.

Dalji napredak trigonomtrije postižu stari Grci, među kojima se naročito ističu: Aristarh (3. st. pr. n. e.), Hiparh (2. st. pr. n. e.), Menelaj (1. st. pr. n. e.) i Ptolomej (2. st. n. e.). Začetnikom moderne trigonometrije smatra se Hiparh. On je prvi izračunao vrijednosti trigonometrijskih funkcija na način da je svaki trokut upisivao u kružnicu tako da stranice trokuta predstavljaju tetive kružnice. Kako bi izračunao dijelove trokuta, morao je pronaći duljinu tetive kao funkciju središnjeg kuta. Također je poznavao formule koje se koriste u ravninskoj trigonometriji (adicijske formule za sinus i kosinus, formule polovičnog i dvostrukog kuta za sinus i kosinus, te sinusov i kosinusov poučak). Ptolomej, u svom djelu *Almagest*, se bavi konstrukcijom tablica tetiva (tablica koja prikazuje vrijednosti funkcije sinus). Promatrao je kutove od 0° do 180° i to u intervalima od pola stupnja. *Almagest* je bio najpoznatiji udžbenik astronomije sve do Kopernika (16. st.).

U srednjem vijeku trigonometriju naročito izučavaju Arapi i Indijci. U Indiji su poznavali tablice sinusa, formulu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha=1$, sinus i kosinus tupih kutova te poučak o sinusima u obliku $a = 2r\sin\alpha$. Arapi su od Grka preuzeli seksagezimalni sustav, a od Indijaca sinus i kosinus. Nakon što su Arapi donijeli svoje znanje o trigonometriji u Europu, ona se počela razvijati vrlo brzo.

Od velike važnosti bile su dvije činjenice: uvođenje općih brojeva (Viète, 16. st.) i logaritama (17. st.). Viète je poučak o tangensu dao u današnjem obliku, a poučak o kosinusu zapisuje na sljedeći način: $2bc : (b^2 + c^2 - a^2) = 1 : \cos\alpha$. Vrhunac njegove trigonometrije je dijeljenje luka na n dijelova i njena primjena u rješavanju kvadratnih i kubnih jednadžbi pomoću trigonometrijskih funkcija.

Razvoju trigonometrije uvelike je pomogao pronalazak logaritama škotskog matematičara *John Napiera* 1614. g. Samo računanje s logaritmima značilo je pravu revoluciju u trigonometriji jer su, naravno, tablice logaritama uvelike olakšale numeričko računanje. Današnji način označavanja i oblik trigonometrijskih funkcija potječe od Eulera (1707. – 1783. g.). On je trigonometrijske funkcije shvatio kao čiste brojeve, a ne kao dužine. Definirao je trigonometrijske funkcije kompleksnih brojeva i time našao vezu trigonometrijskih funkcija s eksponencijalnom funkcijom $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Naglasimo da je naš matematičar Ruđer Bošković (1711. – 1787. g.) dao svoj doprinos u nekim pitanjima sferne trigonometrije (diferencijalna trigonometrija).

2.2. Nazivi trigonometrijskih funkcija

Naziv za trigonometrijsku funkciju sinus u Europu je stigao tehnikom "pokvarenog telefona". Indijci prvo koriste naziv *ordhajiva* što znači polovica tetive, a zatim *jiva* što na sanskrtu znači tetiva. Arapi tu riječ prenose kao *jiba*. Budući da ta riječ na arapskom nema značenje Arapi ju zamjenjuju sa riječi džaib (piše se isto kao jiba) koja znači zaljev. Europski srednjovjekovni prevoditelj *Robert iz Chestera* riječ džaib prevodi doslovno na latinski te tako dolazi do naziva **sinus**. Naziv **kosinus** nastao je u 17. st. kao kratica od *complementi sinus*, što bi u prijevodu bilo sinus komplementarnog kuta. Naziv **tangens** uvodi *Fincke* 1583. g. zbog veze sa tangentom. Staro ime za tangens bilo je *umbra versa* što znači okrenuta sjena. **Kotangens** je dobio ime iz istog razloga kao i kosinus.

3. Trigonometrija pravokutnog trokuta

U sadržajima drugog razreda obrađuje se trigonometrija pravokutnog trokuta, tzv. "mala trigonometrija". Trigonometrijske funkcije kutova određuju se samo za kutove unutar intervala $[0°, 90°]$. Cilj ove nastavne cjeline je usvajanje definicija trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu i njihovu primjenu.
Sadržaji koji se obrađuju unutar ove nastavne cjeline su:

- Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta
- Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija
- Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova 30°, 60° i 45°
- Osnovne relacije među trigonometrijskim funkcijama
- Primjene trigonometrije na pravokutni trokut
- Primjene trigonometrije u geometriji

U ovom poglavlju usporedit ćemo sljedeće udžbenike:

- S. Varošanec, Udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola

- Lj. Kelava-Račić - Z. Šikić, Udžbenik za 2. razred četverogodišnje strukovne škole
- B. Dakić - N.Elezović, Udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije

3.1. Udžbenik - Varošanec

Autorica ovog udžbenika nastavnu jedinicu *Trigonometrija pravokutnog trokuta* počinje definicijom kuta i činjenicom da za mjernu jedinicu kuta koristimo stupnjeve, odnosno radijane. Kroz primjere je pokazano kako se zbrajaju i oduzimaju mjere kuta izražene u stupnjevima te kako izračunati treći kut trokuta kada su preostala dva kuta zadana. Također pojašnjava kako postupiti u situaciji kad nam je mjera kuta dana u stupnjevima, a želimo je imati izraženu u stupnjevima, minutama i sekundama i obratno. Naravno, puno je jednostavnije i brže kada za navedeno preračunavanje koristimo kalkulator, što je autorica i naglasila kroz primjer. Prije nego će definirati trigonometrijske funkcije šiljastog kuta autorica podsjeća učenike što su kroz dosadašnje školovanje naučili o pravokutnom trokutu: kakav je to trokut, kako nazivamo njegove stranice, na koji način označavamo vrhove, što nam govori Pitagorin poučak te koja je razlika između nasuprotne i priležeće katete. Na sličnim pravokutnim trokutima uočava se stalnost omjera stranica za sve slične trokute, točnije, pokazano je da omjeri stranica u sličnim trokutima ne ovise o veličini stranica, nego samo o kutovima trokuta. Obzirom da su ponovljeni svi ključni pojmovi, autorica trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definira na sljedeći način:
U pravokutnom trokutu ABC, Slika 1, vrijedi:

- omjer $\frac{a}{c}$ duljina nasuprotne katete i hipotenuze naziva se sinus kuta α

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

- omjer $\frac{b}{c}$ duljina priležeće katete i hipotenuze naziva se kosinus kuta α

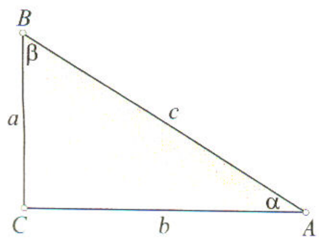
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

- omjer $\frac{a}{b}$ duljina nasuprotne i priležeće katete naziva se tangens kuta α

$$\text{tg }\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

- omjer $\frac{b}{a}$ duljina priležeće i nasuprotne katete naziva se kotangens kuta α

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}.$$



Slika 1: Pravokutni trokut uz pomoć kojeg su definirane trigonometrijske funkcije šiljastog kuta

Rješavajući razne primjere u kojima trebamo odrediti formule za trigonometrijske funkcije nekog kuta učenici mogu primjetiti da se nazivi uobičajeni za stranice pravokutnog trokuta (nasuprotna kateta, priležeća kateta) moraju usvojiti jer se oznake stranica mogu i promijeniti. Jako je bitno da učenici uvijek skiciraju ono što imaju zadano u zadatku, a nakon toga sa skice iščitaju ono što im je potrebno da bi taj zadatak riješili. Za definiranje sinusa ili kosinusa nekog kuta koristili smo katete i hipotenuzu, dok kod tangensa i kotangensa primjenjujemo samo katete što nas dovodi do nekih svojstava trigonometrijskih funkcija koja su u ovom udžbeniku opisana na sljedeći način:

U pravokutnom su trokutu duljine kateta uvijek manje o duljine hipotenuze, pa je omjer $\frac{a}{c}$, tj. $\frac{b}{c}$ uvijek manji od jedan. Dakle, za sinus i kosinus kuta vrijedi

$$0 < \sin\alpha < 1, \qquad 0 < \cos\alpha < 1.$$

Za tangens i kotangens ne postoji gornja granica, pa imamo samo

$$\text{tg}\,\alpha > 0, \qquad \text{ctg}\,\alpha > 0.$$

Iz formule $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ i $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$ vidimo da su $\text{tg}\,\alpha$ i $\text{ctg}\,\alpha$ recipročni brojevi, tj.

$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$. Sljedeća formula daje međusobnu ovisnost brojeva $\sin\alpha, \cos\alpha, \text{tg}\,\alpha$.

Naime, vrijedi da je $a = c\sin\alpha$ i $b = c\cos\alpha$, pa je

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c\sin\ \alpha}{c\cos\ \alpha} = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}.$$

Analogno se dobije da je

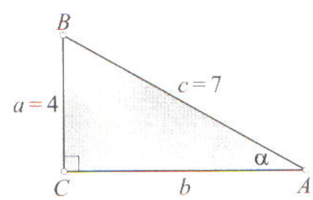
$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ovo su samo neke od osnovnih relacija među trigonometrijskim funkcijama s kojima će se učenici susresti u ovoj nastavnoj cjelini.

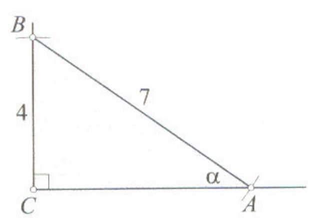
Nakon toga dan je primjer u kojem je pokazano kako nacrtati neki kut ako je dana trigonometrijska vrijednost tog kuta. Primjer glasi:

Nacrtajmo kut α ako je $\sin\alpha = \dfrac{4}{7}$. Taj se kut α javlja u pravokutnom trokutu čija je hipotenuza duga 7 cm, a kateta 4 cm (Slika 2).

Prvo nacrtamo pravi kut s vrhom C. Na okomitom kraku označimo točku B tako da je udaljenost od B do C 4 cm, tj. $|BC| = 4$. Potom oko točke B opišemo kružnicu polumjera 7 koja će horizontalni krak pravokutnog kuta sjeći u točki A. Spojimo A i B. Traženi kut α je kut $\angle CAB$ (Slika 3).



Slika 2: Skica $\sin\alpha = \dfrac{4}{7}$



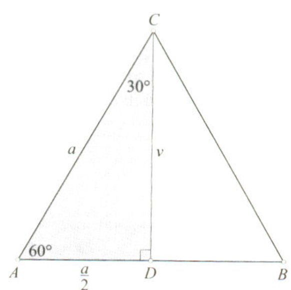
Slika 3: Konstruirani kut α

Možemo primjetiti da je autorica do sada vrlo pomno i detaljno opisivala svaki korak pa je tako i u slučaju određivanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija . Računanje vijednosti trigonometrijskih funkcija kuta i izračunavanje kuta ako je dana vrijednost neke trigonometrijske funkcije tog kuta su vrlo bitni postupci koje bi učenici obavezno trebali svladati da bi bez poteškoća mogli pratiti daljnje gradivo. U ovom udžbeniku je taj dio opisan na način da je prvo općenito pojašnjeno što se u kojem slučaju treba unijeti u kalkulator, a zatim je isto pokazano na konkretnim primjerima. Također je naglašeno da ne rade svi kalkulatori na isti princip i da izračunate vrijednosti trigonometrijskih funkcija zapisujemo zaokruženo na 4 decimalna mjesta.

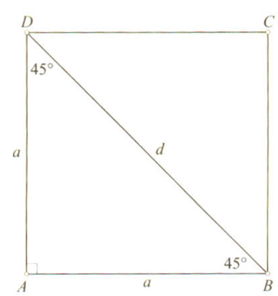
Na zgodno odabranim trokutima jednostavno je pokazano kako izračunati vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova 30°, 60°, 45°.
Nacrtan je jednakostraničan trokut ABC stranice a i spuštena visina iz vrha C koja dijeli dani trokut na dva sukladna pravokutna trokuta čiji su šiljasti kutovi 30° i 60° (Slika 4). Daje se naslutiti da će baš jedan od ta dva pravokutna trokuta pomoći u izračunu trigonometrijskih vrijednosti kuta od 60° i 30°. Nožište visine v označeno je točkom D. Promatran je trokut ADC. Njegova je hipotenuza duga a, a katete su $\frac{a}{2}$ i v.
Naglašeno je kako je duljina visine jednakokračnog trokuta $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Primjenom definicija trigonometrijskih funkcija izračunate su trigonometrijske vrijednosti kuta od 60°:

$$\sin 60^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Slika 4: Jednakostraničan trokut sa stranicom duljine a i visinom v



Slika 5: Kvadrat sa stranicom duljine a i dijagonalom d

Pomoću istog jednakostraničnog, tj. pravokutnog trokuta ADC dobivene su vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta od 30°.

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Trigonometrijska vrijednost kuta od $45°$ također je izvedena iz pravokutnog trokuta. U kvadratu $ABCD$ stranice a povučena je dijagonala $\overline{BD}$ koja kvadrat dijeli na dva sukladna jednakokračna pravokutna trokuta čiji su šiljasti kutovi $45°$, a dijagonala kvadrata ima duljinu $d = a\sqrt{2}$ (Slika 5). Promatrajući trokut ABD pokazano je da vrijedi:

$$\sin 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{\frac{a}{a\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1, \qquad \operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

U skladu s prethodnim izračunima dan je primjer u kojem treba izračunati koliko je

$$\sin^2 60° \cdot \cos 45° - \cos^2 60° \cdot \sin 45°.$$

Postupak rješavanja ovog primjera prikazan je na sljedeći način:
Prvo objasnimo oznaku $\sin^2 60°$. To je oznaka za kvadrat broja $\sin 60°$. Dakle, općenito $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ itd.. Sada u izraz uvrstimo brojeve:

$$\sin^2 60° \cdot \cos 45° - \cos^2 60° \cdot \sin 45° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Upoznavajući se s definicijama trigonometrijskih funkcija učenici su se susreli s nekim od osnovnih trigonometrijskih relacija. Pogledajmo još neke veze između trigonometrijskih funkcija koje se pojavljuju u ovom udžbeniku:

Brojevi $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ povezani su relacijom

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Naime, iz $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ slijedi

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

gdje smo koristili Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$. Ova nam relacija kazuje da brojevi $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ nisu nezavisni.
Brojevi $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ povezani su ovom relacijom:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Dokažimo je. Uvrstimo u desnu stranu jednakosti $\operatorname{tg}\alpha$ i iskoristimo Pitagorin poučak:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{\frac{b^2+a^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \cos^2\alpha.$$

Analogno bismo dokazali da vrijedi $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

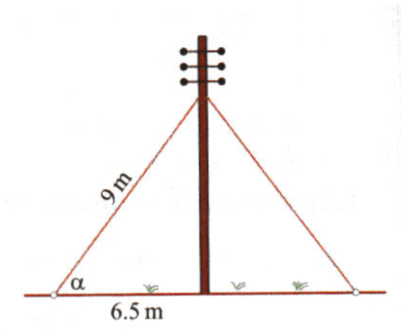
Slijede primjeri na kojima su pokazane neke od primjena relacija među trigonometrijskim funkcijama. U dva primjera je zadana trigonometrijska vrijednost kuta jedne od funkcija, a treba izračunati vrijednost preostalih funkcija danog kuta. Budući da se navedene relacije koriste i pri dokazivanju i pojednostavljenju trigonometrijskih izraza, u trećem primjeru pokazano je kako treba postupiti ukoliko trebamo dokazati neki identitet. Do sada su učenici naučili kako se definiraju trigonometrijske funkcije, kako koristiti kalkulator pri određivanju vrijdnosti trigonometrijskih funkcija, koje su vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°, 60°, 45° te osnovne relacije među trigonometrijskim funkcijama. Svo to gradivo je potrebno dobro usvojiti kako bi bez poteškoća mogli uvježbavati određivanje nepoznatih elemenata pravokutnog trokuta iz dvaju zadanih elemenata, a koji nisu oba kutovi.

U nastavnoj jedinici *Primjene trigonometrije na pravokutni trokut* dana su četiri primjera u kojima se treba "riješiti" pravokutni trokut ako su zadani: duljina hipotenuze i kut, duljina katete i kut, duljina katete i duljina hipotenuze te duljine obje katete. Riješiti pravokutni trokut znači izračunati sve njegove stranice i sve njegove kutove. Kroz te primjere je autorica pokazala sve tipove problema koji se javljaju pri "rješavanju" pravokutnog trokuta. Naglasimo da je u svakom tom primjeru postupak rješavanja detaljno zapisan tako da bi učenici što bolje razumijeli kako se takvi zadatci rješavaju. Obzirom da u nazivu jedinice stoji riječ *primjena* dan je jedan primjer iz svakodnevnog života:

Stup je pričvršćen za tlo čeličnim konopima dugim 9 m na udaljenosti 6.5 m od podnožja. Pod kojim kutom je konop prema tlu?

Ovo je vrlo jednostavan primjer u kojem učenici trebaju primijeniti osnovne definicije trigonometrijskih funkcija. Da bi se on uspješno riješio potrebno je nacrtati valjanu skicu, a to stvara najveći problem kod učenika. Općenito, još od svog ranog osnovnoškolskog obrazovanja oni imaju otpor prema matematičkim zadatcima koji su zadani riječima pa je to jedan od razloga zašto se ovakve primjere nerijetko ni ne pokušava riješiti. Autorica je, skicirajući promatrani primjer, Slika 6, ukazala na pravokutni trokut s katetom dugom 6.5 m i hipotenuzom od 9 m. Treba odrediti kut α

konopa prema tlu. Dakle, $\cos\alpha = \dfrac{6.5}{9} = 0.7222$, tj. $\alpha = 43°45'49''$.

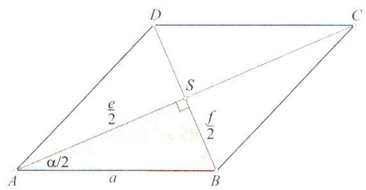


Slika 6: Skica prethodno navedenog primjera

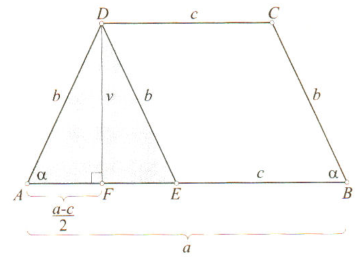
Došli smo do zadnjeg naslova u promatranoj cjelini koji se u ovom udžbeniku naziva *Primjene trigonometrije u geometriji*. Prije nego će početi s primjerima autorica pojašnjava da se trigonometrija može koristiti i u nekom drugom liku koji nije pravokutni trokut. Dovoljno je u promatranom liku uočiti neki pravokutni trokut te na njega primijeniti trigonometrijske relacije. Takvi likovi u kojima uočavamo pravokutni trokut su jednakokračni trokut, pravokutnik, romb, trapez, pravilni mnogokut i sl. Kratko ćemo opisati primjere koji se pojavljuju u ovoj nastavnoj temi te način na koji je objašnjeno kako doći do traženog rješenja.

U svakom primjeru dana je detaljna skica, naglašena su svojstva karakteristična za pojedini lik koja su potrebna da bi se došlo do rješenja: visina na osnovicu jednakokračnog trokuta dijeli taj trokut na dva sukladna pravokutna trokuta i dijeli tu osnovicu na dva jednaka dijela, dijagonala pravokutnika dijeli pravokutnik na dva sukladna pravokutna trokuta, dijagonle romba su međusobno okomite, raspolavljaju se te dijele romb na 4 sukladna pravokutna trokuta.

U prvom primjeru treba izračunati kutove i površinu jednakokračnog trokuta ako mu je zadana duljina osnovice i duljina kraka. U drugom primjeru se traže kutovi između dijagonale pravokutnika i njegovih stranica, ukoliko su zadane stranice pravokutnika. Treći i četvrti primjer odnose se na romb i jednakokračni trapez. Zadan je šiljasti kut romba i duljina stranica, a treba izračunati duljine dijagonala romba i njegovu površinu (Slika 7). Treba izračunati površinu danog trapeza koji ima zadane duljine osnovica, a krakovi s duljom osnovicom zatvaraju kut čija je mjera poznata (Slika 8).

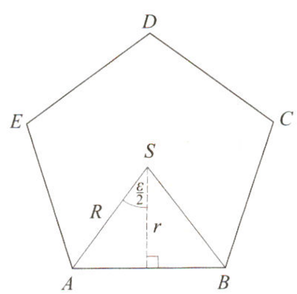


Slika 7: Skica trećeg primjera u kojem treba izračunati duljine dijagonala i površinu romba

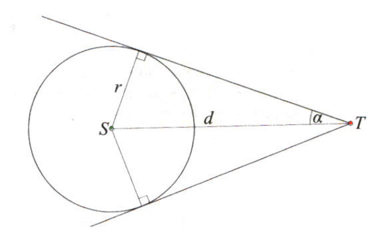


Slika 8: Skica četvrtog primjera u kojem moramo izračunati površinu trapeza

Posljednja dva primjera su ipak malo složenija. Treba izračunati duljinu stranice pravilnog peterokuta i polumjer upisane kružnice tom peterokutu, a poznato je koliki je polumjer kružnice u koju je peterokut upisan (Slika 9). Tekst zadnjeg primjera glasi: Pod kojim kutom se iz točke T vidi kružnica polumjera $r = 5$ cm? Točka T je od središta kružnice udaljena 9 cm (Slika 10).



Slika 9: Skica pravilnog peterokuta čiju duljinu stranice i polumjer upisane kružnice treba izračunati



Slika 10: Skica zadnjeg primjera u kojem trebamo naći pod kojim kutom se iz točke T vidi kružnica

Proučavajući ovaj udžbenik zaključujemo da je vrlo sustavno i detaljno opisano sve ono što učenici trebaju znati, bez izostavljanja koraka u rješavanju zadataka. Primjetimo da je dan samo jedan primjer u kojem se treba dokazati neki trigonometrijski identitet, a primjer u kojem treba neki izraz pojednostaviti je izostavljen. Obzirom da je ovo udžbenik za četverogodišnje tehničke škole, tu izostavku bismo mogli shvatiti kao da su takvi zadatci preteški za učenike koji će koristiti ovaj udžbenik. Bez obzira što su neki pojmovi naučeni u prijašnjim razredima, autorica ih nije uzela "zdravo za gotovo", ponovo ih je definirala.

3.2. Udžbenik - Kelava-Račić, Šikić

Autori ovog udžbenika, za razliku od autorice Varošanec, imaju uvodni primjer kojim žele učenicima pokazati primjenu gradiva u svakodnevnom životu. Primjer glasi:

Uspon ceste od $p\%$ znači da se cesta na putu od 100 metara uspinje p metara. Pod kojim se kutom uspinje cesta ako je njezin uspon 10%?

Rješenje je dano kao:
Iz definicije trigonometrijske funkcije $\sin\alpha = \dfrac{\text{nasuprotna}}{\text{hipotenuza}}$ dobije se $\sin\alpha = 0.1$, pa je $\alpha = 5°44'21''$. Dakle, cesta se uspinje s nagibom od $5°44'21''$. Nakon uvodnog primjera ponovljeno je koja je razlika između suprotne i priležeće katete te je pokazano da omjer suprotne i priležeće katete od α ne ovisi o veličini kateta a i b (nego samo o kutu α). Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definirane su kao i u prethodno promatranom udžbeniku, a i broj rješenih primjera je podjednak. Autori ovog udžbenika imaju malo drugačiji redoslijed obrade nastavnih jedinica pa tako odmah nakon što su definirali trigonometrijske funkcije pojašnjavaju osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama. Kao uvod u definiranje trigonometrijskih identiteta autori navode sljedeće:

Jednadžba koja je točna za svaku vrijednost varijable za koju je definirana zove se identitet. Na primjer, $2x + 3x = 5x$ jest identitet. Bez obzira koji x uvrstimo u tu jednadžbu, ona je točna. Jednadžba $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x}$ također je identitet.Ona nije definirana za $x = 0$, ali je točna za sve vrijednosti $x \neq 0$, za koje je definirana. Trigonometrijski identiteti su oni identiteti koji sadrže trigonometrijske funkcije.

U ovom udžbeniku osnovni trigonometrijski identiteti podijeljeni su na definicijske identitete i pitagorine identitete.

Definicijski identiteti:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

Pitagorini identiteti:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pojašnjeno je na koji način se dolazi do posljednja dva Pitagorina identiteta, no niti jedan od trigonometrijskih identiteta nije dokazan na način kao u prethodnom udžbeniku. Prvo je riješeno 6 primjera u kojima se treba pojednostaviti neki izraz, a zatim su dana pravila $P1. - P9.$ koja donekle upućuju na to kako se dokazuju trigonometrijski identiteti. Autori su naglasili da dana pravila nisu sasvim precizna i da, u pojedinim slučajevima, neka od njih treba preskočiti te ih ne treba uvijek primjenjivati zadanim redom. Pravila su sljedeća:

P1. Bolje je poći od složenijeg izraza i svoditi ga na jednostavniji.

P2. Učini nešto "očigledno", što je u izrazu zadano.
- a) Zbroji razlomke.
- b) Pomnoži zagrade.
- c) Kvadriraj binom.

P3. Ako izraz ima više članova u brojniku, a samo jedan u nazivniku, razbij ga na više razlomaka:
$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

P4. Primjeni poznate identitete (zato ih moraš dobro znati).

P5. Ako se na jednoj strani jednakosti pojavljuje samo jedna trigonometrijska funkcija, pokušaj i drugu stranu izraziti samo pomoću te funkcije.

P6. Faktoriziraj.

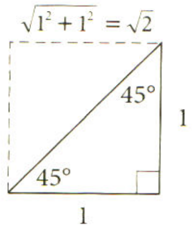
P7. Pomnoži brojnik i nazivnik istim izrazom, najbolje brojnikom ili nazivnikom na koji svodiš, i nadaj se da će se sve srediti. (To je najnepreciznije, ali važno pravilo.)

P8. Pretvori sve u sin i cos i pokušaj srediti.

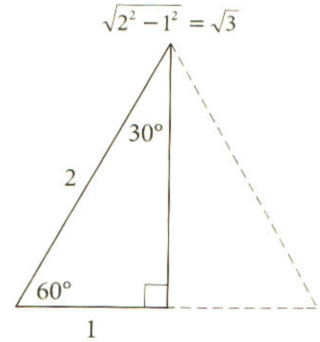
P9. Naizmjence radi s obje strane jednadžbe pokušavajući ih svesti na isti izraz.

Nakon toga je dano nekoliko primjera u kojima treba dokazati trigonometrijske identitete, među kojima su i definicijski i pitagorini identiteti.
Možemo primjetiti kako je u ovom udžbeniku posvećeno puno više pažnje pojednostavljenju i dokazivanju trigonometrijskih identiteta u odnosu na prethodni u kojem je dan samo jedan primjer za dokazati.

Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od $30°$, $45°$ i $60°$ objašnjeno je pomoću istog jednakostraničnog trokuta, tj. kvadrata kao i u udžbeniku Varošanec. No, duljina stranice kvadrata je 1 (Slika 11), kao i duljina osnovice trokuta, dok su krakovi dugi 2 (Slika 12) pa je samo računanje vrijednosti funkcija puno jednostavnije.



Slika 11: Kvadrat sa stranicom duljine 1

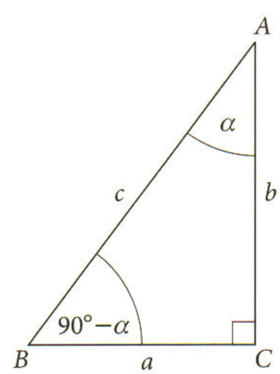


Slika 12: Jednakostraničan trokut sa stranicom duljine 2

U primjeru koji slijedi odmah poslije pokazano kako izračunati vrijednost izraza

$$\frac{3(\operatorname{tg} 45^\circ)^2+1}{2\sin 60^\circ-\cos 30^\circ}.$$

Prelazimo na nastavnu jedinicu *Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija* u kojoj primjećujemo razlike u odnosu na prethodni udžbenik. U Dodatku na kraju ovog udžbenika nalaze se tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija izračunatih na 4 decimale. Tablica sadrži kutove od $0^\circ - 90^\circ$ u intervalima 0.1°. U početnoj lijevoj koloni nalaze se kutovi od 0° do 45°, u krajnjoj desnoj koloni kutovi od 45° do 90°, a u svakom retku zbroj kutova u početnoj i završnoj koloni iznosi 90°. Sama tablica se temelji na činjenici da komplementarni kutovi imaju jednake kofunkcije, tj. kosinus je kofunkcija od sinus (Slika 13), a kotangens od tangens.



Slika 13: Pravokutni trokut pomoću kojeg je pokazano da je kosinus kofunkcija od sinus

Kako bi učenicima bilo lakše za shvatiti da je

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,(90^\circ - \alpha),$$

autori su to prikazali na vrlo jednostavan i lako shvatljiv način. Naime, znamo da zbroj kutova u trokutu iznosi 180°. Obzirom da promatramo pravokutni trokut, zbroj njegova dva šiljasta kuta je 90°. Na skici tog pravokutnog trokuta, Slika 13, kut pri vrhu A označen je s α, a kut prvi vrhu B s 90°-α. Koristeći definiciju za kosinus kuta, tj. kotangens kuta dobiva se sljedeće:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \mathrm{ctg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

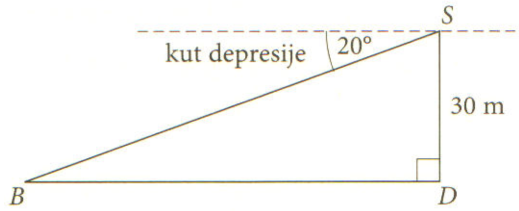
U nekoliko narednih primjera treba odrediti vrijednost neke trigonometrijske funkcije pomoću gore opisane tablice. Naravno, opisano je na koji način pomoću kalkulatora možemo izračunati vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

Rješavanje pravokutnog trokuta autori su prikazali kroz tri koraka:

1) Koristeći se Pitagorinim poučkom, izračunaj duljinu treće stranice ako su poznate duljine preostalih dviju.
2) Koristeći se činjenicom da zbroj šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi 90°, izračunaj jedan ako znaš drugi.
3) Iskoristi trigonometrijske omjere kako bi izračunao preostale stranice i kutove.

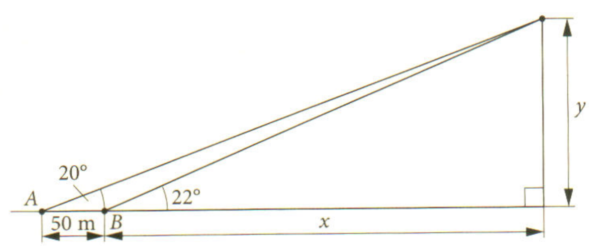
Nakon toga kroz nekoliko primjera je pokazano kako primjeniti gore navedeno te je dan jedan primjer u kojem treba izračunati površinu pravokutnog trokuta ako je poznata duljina jedne stranice i mjera jednog šiljastog kuta trokuta. Kada je riječ o primjeni pravokutnog trokuta, autori Kelava-Račić i Šikić daju manje riješenih primjera u odnosu na prethodni udžbenik. Dok smo kod autorice Varošanec vidjeli riješene primjere vezane za jednakokračni trokut, pravokutnik, jednakokračni trapez, romb i pravilni mnogokut, u ovom udžbeniku nailazimo na malo drugačiji pristup. Pojašnjena je primjena na jednakokračnom trokutu i pravilnom mnogokutu. Za kvadrat, pravokutnik, romb, jednakokračni trapez, trapez, deltoid, tetivni četverokut i tangencijalni četverokut dana je skica četverokuta te formule za opseg i površinu, no nema primjera na kojem učenici mogu vidjeti kako primjeniti navedene formule. Primjenu u svakodnevnom životu, osim u uvodnom, motivacijskom primjeru, autori su predočili sljedećim primjerima:

Svjetioničar s vrha svjetionika visokog 30 m vidi brod pod kutom depresije od 20° (Slika 14). Koliko je brod udaljen od svjetionika?



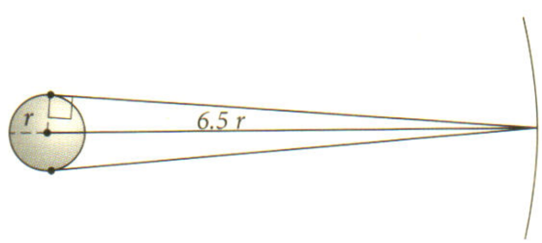
Slika 14: Udaljenost broda od svjetionika iznosi 82.4 m

Visinu tornja možemo izračunati tako da izmjerimo kutove elevacije pod kojim se vrh tornja vidi iz dvije točke A i B, čija je udaljenost poznata (izmjerena). Ako se vrh tornja iz točke A vidi pod kutom od 20°, a iz točke B pod kutom od 22°, te ako je udaljenost tih točaka 50 m, koliko je visok taj toranj (vidi sliku 15)?

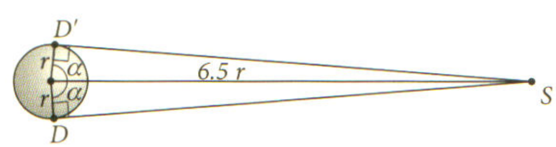


Slika 15: Uz pomoć ove slike možemo izračunati da je toranj visok 183.6 m

Komunikacijski sateliti obično su u sinkronoj putanji sa Zemljom. To znači da su stalno iznad iste točke na Zemlji. Radijus je takve putanje 6.5 radijusa Zemlje. Satelit se koristi za prenošenje signala iz jedne točke na Zemlji u drugu točku na Zemlji. Pošiljatelj i primatelj signala moraju vidjeti satelit (vidi Sliku 16). Kolika je maksimalna udaljenost pošiljatelja i primatelja signala na Zemlji? (Slika 17)



Slika 16: Satelit se koristi za prenošenje signala iz jedne točke na Zemlji u drugu točku na Zemlji



Slika 17: Središte Zemlje, satelit S i dirališta D i D' čine pravokutne trokute jer su tangente okomite na radijuse

U svakom primjeru predočena je skica i iskazan računski dio rješenja, bez prevelikog objašnjavanja odakle što je. Općenito, u ovom udžbeniku nisu primjeri tako detaljno objašnjeni i raspisani kao u udžbeniku za tehničke škole. Najveću razliku smo mogli uočiti u slučaju dokazivanja, tj. pojednostavljanja trigonometrijskih iskaza i kod primjene pravokutnog trokuta. Također primjećujemo da autori Kelava-Račić i Šikić nisi pokazali kako konstruirati neki kut ako je dana trigonometrijska vrijednost tog kuta.

3.3. Udžbenik - Dakić, Elezović

Preostaje nam još pogledati na koji se način gimnazijalci upoznaju s trigonometrijom. Kao uvod u novu cjelinu postavlja se pitanje kojim je osnovnim elementima jednoznačno određen trokut?
Na to pitanje odgovor je dan osnovnim poučcima o sukladnostima trokuta. Primjerice, trokut je jednoznačno određen duljinama triju svojih stranica. Ako je zadana jedna stranica trokuta i njegovi unutarnji kutovi, tada je prema K-S-K poučku o sukladnosti trokut jednoznačno određen. Ali kako izračunati duljine dviju ostalih njegovih stranica ili nekih drugih njegovih elemenata? Kolika je njegova površina? U ovom slučaju odgovor ne znamo. No pomoći će nam trigonometrija, jedna posebna grana matematike.

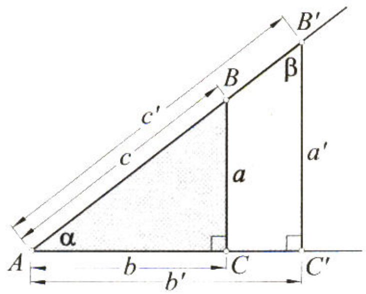
Možemo reći da je ovaj pristup u uvođenju novog gradiva neka sredina u odnosu na prethodna dva udžbenika. Autorica Varošanec je počela s prisjećanjem osnovnih pojmova o kutu i mjerenju, a autori udžbenika za strukovne škole su naveli konkretan primjer iz svakodnevnog života u čijem rješavanju koristimo definiciju trigonometrijske funkcije koja će se definirati u gradivu koje slijedi.

Da omjeri stranica ne ovise o veličini pravokutnog trokuta, već samo o veličini njegova kuta koji promatramo, autori ovog udžbenika su to prikazali na detaljniji način nego što su to učinili autori Kelava-Račić, Šikić i Varošanec. Autori Dakić i Elezović daju sljedeći pristup:

Nacrtajmo pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i kutom α uz vrh A. Označimo s a, b i c duljine stranica trokuta koje su nasuprot vrhova A, B i C. Povucimo pravac $B'C'$ paralelan pravcu BC. Trokut $AB'C'$ sličan je trokutu ABC (Slika 18) - sva tri kuta su im jednaka. Neka su a', b' i c' duljine stranica trokuta $AB'C'$. U sličnim su trokutima omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki. Zato za sve pravokutne trokute čiji je jedan kut α vrijedi:

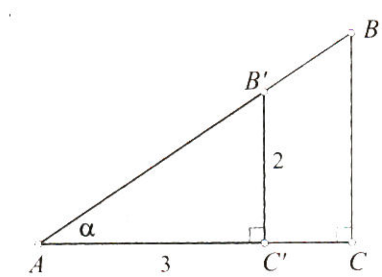
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

Ovi omjeri stranica ne ovise, dakle, o velični pravokutnog trokuta, već samo o velični njegova kuta α. Prema njihovom položaju prema kutu α katetu a zovemo *nasuprotna* *kateta*, a katetu b *priležeća kateta* ili *kateta uz kut* α.



Slika 18: Svi omjeri stranica ne ovise o veličini pravokutnog trokuta, već samo o veličini promatranog kuta

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definirane su na isti način kao i u prethodnim udžbenicima. Na jednom primjeru je pojašnjeno kako odrediti sve trigonometrijske vrijednosti kutova α i β ako imamo zadane duljine kateta. Zapravo, ne možemo reći da je pojašnjeno, već su samo dana rješenja, a da se duljina hipotenuze dobije primjenom *Pitagorinog poučka* trebamo sami zaključiti. Obzirom da se ubraja u osnovno matematičko znanje, taj izračun učenicima ne bih trebao predstavljati problem. U primjeru kako konstruirati neki kut ako je dana njegova trigonometrijska vrijednost korišten je sličan princip rješavanja kao i u udžbeniku Varošanec. Također je dan primjer u kojem treba konstruirati pravokutni trokut ako mu je zadana duljina hipotenuze i tangens kuta. Primjetimo da se s ovakvim zadatkom nismo susreli proučavajući prethodne udžbenike.
U primjeru je zadano: $c = 5$ cm i $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$. Pogledajmo na koji način su autori prikazali rješenje:



Slika 19: Konstrukcija pravokutnog trokuta kojemu je zadano $c = 5$cm i $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$

Najprije ćemo konstruirati kut α. Iz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} = \frac{a}{b}$ konstruirat ćemo kut α. Nacrtamo dužinu $\overline{AC'}$ duljine 3 cm te na okomici na vrhu C' odredimo točku B' tako da je $|C'B'| = 2$ cm. Konstruirali smo trokut $AB'C'$ u kojemu je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Taj je trokut sličan trokutu ABC. Oko vrha A šestarom s otvorom 5 cm opišimo luk koji će pravac AB' presjeći u točki B. Spustimo još iz točke B okomicu na pravac AC' te odredimo i vrh C (Slika 19).

Nadalje dolazimo do omeđenosti trigonometrijskih funkcija. U udžbeniku za tehničke škole smo to proučavali kao svojstva trigonometrijskih funkcija, za razliku od udžbenika za strukovne škole u kojem tome nije posvećena pažnja. O omeđenosti je dano sljedeće:

U pravokutnom je trokutu hipotenuza najdulju stranica pa zbog toga za svaki šiljasti kut α uvijek vrijedi:

$$0 < \sin\alpha < 1, \qquad 0 < \cos\alpha < 1.$$

Kažemo da su funkcije sinus i kosinus omeđene. No tangens i kotangens nisu omeđene funkcije. Naime, one su omjeri dviju kateta, a ti omjeri mogu primiti svaku pozitivnu vrijednost.

Autori Dakić i Elezović su na elegentan način pokazali da je sinus kuta jednak kosinusu kuta koji mu je komplementaran i obrnutno. Naravno, ista relacija vrijedi za odnos između funkcija tangens i kotangens. Naime, ako primijenimo definiciju trigonometrijskih funkcija na kut β pravokutnog trokuta, dobit ćemo:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Odmah uočavamo da je:

$$\sin\beta = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha, \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

U pravokutnom trokutu su šiljasti kutovi α i β komplementarni, tj. vrijedi $\alpha+\beta = 90°$. Iz navedenog međusobnog odnosa sinusa i kosinusa i proistječe naziv funkcije kosinus. Analogno vrijedi za funkcije tangens i kotangens.

Kada je riječ o izračunavanju vrijednosti trigonometrijskih funkcija navedeno je kako su se te vrijednosti do prije nekoliko desetljeća iščitavale iz posebnih tablica, no one danas nisu više aktualne jer koristimo kalkulator. Ipak, mogu nam dobro poslužiti kako bi se iz njih ponešto zaključilo o svojstvima trigonometrijskih funkcija. Prikazana je sljedeća tablica:

Učenicima je posebno naglašeno da obrate pažnju na:

- kad kut raste, rastu vrijednosti funkcija sinus i tangens, a vrijednosti funkcija kosinus i kotangens padaju

α	sin	cos	tg	ctg	α
0°	0	1	0	∞	90°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50°
α	sin	cos	tg	ctg	α

Tablica 1: Tablični zapis trigonometrijskih funkcija

- vrijednosti funkcija sinus i kosinus su između 0 i 1, dok vrijednosti funkcija tangens i kotangens nisu omeđene
- sinus kuta jednak je kosinusu njegova komplementa: $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. Vrijedi i obrnuto.

Učenici vole ovakav, vizualan, način prezentiranja novih pojmova i činjenica. Na kraju prve nastavne jedinice, kao dodatno gradivo, spomenute su veze među trigonometrijskih funkcijama. Koristeći Pitagorin poučak izveden je jedan od najvažnijih identiteta trigonometrije: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Još je pokazano da vrijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Zapravo, *Kutak plus* je jedino mjesto u ovom udžbeniku gdje možemo nešto pročitati o odnosima među trigonometrijskim funkcijama. Zadatci u kojima treba pojednostaviti ili dokazati neki trigonometrijski nisu pokazani. Možemo pretpostaviti da će o tome, možda, više govora biti u trećem razredu, kada se trigonometrija obrađuje cijelo prvo polugodište.

Za izračun vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°i 60° upotrebljen je jednakostraničan trokut s duljinom stranice a, dok je vrijednost za kut od 45° izvedena pomoću jednakokračnog pravokutnog trokuta krakova duljine a i hipotenuze $a\sqrt{2}$. Detaljno je opisano kako doći do trigonometrijske vrijednosti za pojedine kutove. Izračunate vrijednosti su zapisane u tablicu i naglašeno je kako vrijednosti trigonometrijskih funkcija ovih kutova treba poznavati "napamet". Nismo do sada spominjali, ali tu tablicu (Tablica 2) su prikazali i autori udžbenika koje smo do sada razmatrali.

Obzirom da se od učenika traži da znaju ove vrijednosti "napamet", bilo bi najjednostavnije da im, još jednom, ukažemo da se, ipak, ne mora sve to učiti. Dovoljno je znati vrijednosti za funkciju sinus, a kako znamo da je sinus kuta jednak kosinusu kuta koji mu je komplementaran vrijedi:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ, \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ.$$

	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tablica 2: Tablica trigonometrijskih vrijednosti

Isto vrijedi za funkcije tangens i kotangens.
U ovoj nastavnoj temi nije riješen niti jedan primjer, što u dosadašnjim udžbenicima nije bio slučaj. Ako pogledamo zadatke koji se pojavljuju nakon svake nastavne jedinice, uočit ćemo da ima zadataka u kojima treba odrediti vrijednost nekog izraza kao što je $\sin^2 30° + \cos^2 30°$ ili pak dokazati da vrijedi $\cos 30° + \cos 45° > 1$. To što nije riješen neki od primjera možemo protumačiti na način da bi takvi zadatci trebali biti trivijalni za učenike u gimnaziji.

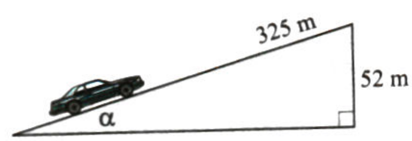
Došli smo do nastavne jedinice *Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija*, koja je podijeljena na 3 dijela: *Računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na računalu*, *Računanje s minutama i sekundama*, *Računanje kutova*.

Autori Dakić i Elezović daju uvodni primjer koji pokazuje da moramo znati vrijednosti trigonometrijskih funkcija po volji odabranog kuta, a ne samo vrijednosti kutova od $30°$, $45°$, $60°$ kako bismo mogli odrediti nepoznate veličine trokuta. Imamo zadanu duljinu hipotenuze $c = 6$ cm i kut $\alpha = 20°$ i zanima nas kolike su katete.
Iz jednakosti $\sin 20° = \frac{a}{c}$ slijedi $a = c \cdot \sin 20°$. Dakle, da bismo odredili katetu a moramo znati sinus kuta od $20°$.

Istaknuto je da svaki kalkulator (osim onih koji imaju samo četiri osnovne algebarske operacije) ima programirane vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Vrlo detaljno i sustavno je objašnjeno kojim simoblima su označene tipke za pojedine funkcije i kojim redoslijedom trebamo unositi podatke ako želimo izračunati trigonometrijsku vrijednost nekog kuta. Još je spomenuto da se kutovi u kalkulator mogu unositi u stupnjevima, radijanima i gradima te da će se svi računi u udžbeniku izvoditi tako da kut zadajemo u stupnjevima. Također se navodi da treba obratiti pozornost u kojem je "stanju" kalkulator prije nego krenemo s računanjem. Nakon svih potrebnih smjernica učenici na dva primjera mogu vidjeti kako primijeniti kalkulator . Na sličan način je pokazano kako odrediti kut ako je poznata vrijednost trigonometrijske funkcije. Puno pozornosti posvećeno je preračunavanju minuta i sekundi u odgovarajući iznos u stupnjevima. Na primjeru vidljivo da se broj minuta podijeli sa 60, a broj sekundi sa 3600 te se to doda broju stupnjeva. Još objašnjeno na koji način unijeti minute i sekunde u kalkulator. Možemo zaključiti da su autori puno energije utrošili na objašnjavanje rada kalkulatora.

Unutar nastavne jedinice *Primjene na pravokutni trokut* iskazana su četiri slučaja na koji se može zadati pravokutni trokut s osnovinim elementima te je za svaki od tih slučajeva pokazano kako se mogu izračunati preostali elementi trokuta: stranice, kutovi i njegova površina. Primjena trigonometrije u svakodnevnom životu prikazana je sljedećim primjerima:

Uz cestu stoji prometni znak s oznakom uspona 16%. Što znači da oznaka? Kolika je visinska razlika od početka uspona i nakon prijeđenih 325 metara puta? Pod kojim se kutom prema horizontalnoj ravnini uspinje ta cesta? (Slika 20)
Ovdje možemo primijetiti sličnost s motivacijskim primjerom koji je naveden u udžbeniku za strukovne škole.



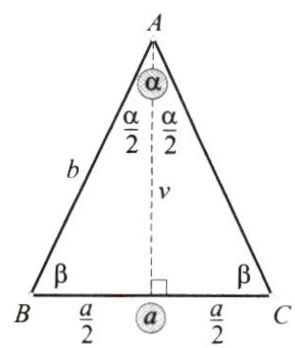
Slika 20: Uz pomoć ove slike dobijemo da se cesta uspinje pod kutom $\alpha = 9°12'$

Nakon dostignute brzine od 300 km/h zrakoplov se otisne po kutom od 15°. Nakon koliko će vremena doseći visinu od 1500 metara?
Ovaj primjer o primjeni pravokutnog trokuta se razlikuje od primjera iste namjene koji su navedeni u prethodnim udžbenicima po tome što, da bismo dobili rješanje, moramo koristiti formulu za brzinu. Potrebno je učenike podsjetiti da je brzina definirina kao omjer prijeđenog puta i potrebnog vremena da se taj put prijeđe.

Na ulici stoji čovjek. Sunčeve zrake padaju pod kutom od 65° i njegova je sjena duga 1.1 metar. Kako je ime tom čovjeku?
Zanimljivo je da nije postavljeno pitanje koliko je visok taj čovjek, već kako se zove. Po podatcima koji su navedeni udžbeniku ime tog čovjeka je Dong Peng Shui i navodi se da je, prema Guinessovoj knjizi rekorda, najviši čovjek na svijetu. U analizu točnosti ovog podatka nećemo ulaziti.

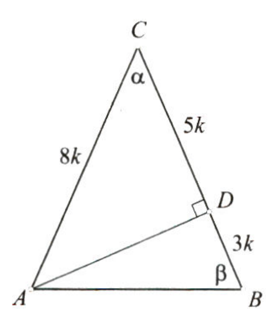
Još nam preostaje pogledati što autori Dakić i Elezović govore o primjeni trigonometrije u planimetriji. Primjeri su podijeljeni po podnaslovima: jednakokračni trokut, paralelogram, kružnica i krug, pravilni mnogokuti. Prije nego krenemo s primjerima podsjetit ćemo se da je jednakokračan trokut određen dvama svojim elementima (od kojih je najviše jedan kut) te da razlikujemo tri osnovne situacije: zadani su osnovica i krak, osnovica i kut, krak i kut. U trokutu nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi, zato su kutovi uz osnovicu jednaki i označit ćemo ih s β. Neka je α kut nasuprot osnovice. Onda vrijedi: $\alpha + 2\beta = 180°$. Nadalje su riješena tri primjera. Prvi je isti kao i u prethodnim udžbenicima, a preostala dva glase:

Zadni su osnovica $a = 4$ cm i kut $\alpha = 50°$ (Slika 21). Odredimo drugi kut, krak i površinu.



Slika 21: Promatrajući jedan od pravokutnih trokuta zaključujemo da je $b = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, a $v = \dfrac{a\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}}{2}$

Visina na krak jednakokračnog trokuta dijeli krak u omjeru 3 : 5 (Slika 22). Koliki su kutovi tog trokuta?



Slika 22: Iz ovog trokuta slijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{5k}{8k}$, no ako je točka D bliža vrhu tada je $\cos\alpha = \dfrac{3k}{8k}$ i ovaj zadatak ima dva rješenja

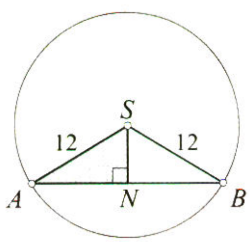
Kada je riječ o paralelogramu, primjeri za pravokutnik i romb su iste prirode kao i primjeri u udžbeniku za tehničke škole. Navedena su jos dva primjera vezana za paraleologram:

Ako su a i b duljine stranica paralelograma, a α njegov unutarnji kut, tada je površina paralelograma jednaka $P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Dokažimo ovu tvrdnju!

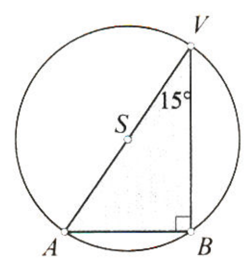
Kolika je površina jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica $a = 11$ cm, $c = 5$ cm, a šiljasti kut iznosi $\alpha = 71°33'$?

Autori Kelava-Račić i Šikić u svom udžbeniku nisu naveli primjere koji su vezani za kružnicu i krug, a autorica Varošanec navodi samo jedan primjer. Da je potrebno koristiti trigonometrijske funkcije u raznim zadatcima vezanim uz kružnicu i krug potkrepljeno je sljedećim primjerima:

Duljina polumjera kružnice iznosi 12 cm. Koliko je duljina tetive te kružnice koja pripada središnjem kutu od 110°? (Slika 23)



Slika 23: Iz jednakokračnog trokuta ABS i pravokutnog trokuta ANS dobijemo traženu duljinu tetive

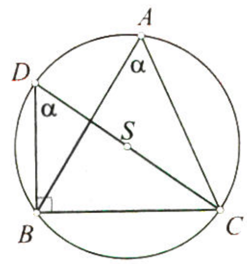


Slika 24: U trokutu ABV primjenjujemo *Poučak o obodnom i središnjem kutu*

Kolika je duljina tetive koja pripada obodnom kutu od 15° u kružnici polumjera 10 cm? (Slika 24)

U postupku rješavanja naglašeno je da su obodni kutovi nad danom tetivom kružnice sukladni i da su njihovi vrhovi na kružnici s iste strane tetive. To je posljedica *Poučka o obodnom i središnjem kutu kružnice* koji kaže da je obodni kut dvostruko manji od pripadnog središnjeg kuta. Zato se odabere onaj obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$ kojem jedan krak prolazi središtem kružnice. Tako će kut $\angle ABV$ pa će biti: $|AB| = 2r \cdot \sin 15° = 5.2$ cm.

Nadalje pogledajmo što se govori o kružnici opisane trokutu (Slika 25):



Slika 25: Kružnica opisana trokutima ABC i BCD

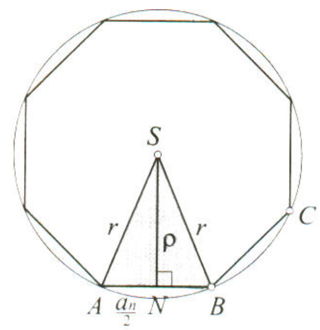
Neka je dan trokut ABC i neka je S središte tom trokutu opisane kružnice. Povucimo promjer kružnice s jednim krajem u točki C i neka je njegov drugi kraj točka D. Trokut CDB je pravokutan te je $\angle CDB = \alpha$.
Vrijedi: $|BC| = |CD| \cdot \sin\alpha$, odnosno, $a = 2r \cdot \sin\alpha$. Analogno je: $b = 2r \cdot \sin\beta$, $a = 2r \cdot \sin\alpha$.
Dobivene jednakosti povezuju duljinu stranice trokuta, kut nasuprot te stranice i polumjer trokutu opisane kružnice.
Zadnji primjer iz ovog dijela glasi:

Dana je kružnica sa središtem u točki S i polumjerom 4 cm. Na udaljenosti $d = 12$ cm od središta kružnice nalazi se točka P. Pod se kojim kutom iz točke P vidi kružnica? Kolika je duljina luka kružnice koji je vidljiv iz točke P?

Rješavanje raznih zadataka o pravilnom mnogokutu najčešće je vezano uz promatranje njegovog karakterističnog trokuta. Naime, spajanjem središta pravilnog mnogokuta s njegovim vrhovima mnogokut dijelimo na n sukladnih trokuta. Svaki je od njih *karakterističan trokut* mmnogokuta. Neka je ABS *karakteristični trokut* pravilnog n-terokuta (Slika 26).

U njemu je
$|AB| = a_n$ duljina stranice mnogokuta,
$|AS| = |BS| = r$ polumjer opisane, a
$|SN| = \rho$ polumjer upisane kružnice.
Nadalje je $\angle ASB = \dfrac{360^\circ}{n}$.

Visinom iz vrha S karakteristični je trokut podijeljen na dva sukladna pravokutna trokuta. Pritom je $\angle ASN = \dfrac{180^\circ}{n}$.



Slika 26: Svaki pravilni mnogokut sastoji se od karakterističnih trokuta

Ovo je ono osnovno o pravilnim mnogokutima što autori navode prije no što će pojasniti tri česta zadatka vezana uz pravilni mnogokut:

Ako je zadana duljina a_n stranice pravilnog mnogokuta, kolika mu je površina te polumjeri upisane i opisane kružnice?

Ako je zadana duljina r polumjera pravilnom n-terokutu opisane kružnice, odredimo mu duljinu stranice, duljinu polumjera upisane kružnice i površinu.

Kolika je duljina najdulje dijagonale pravilnog deveterokuta, ako je $a_9 = 4$ cm?

U ovom udžbeniku do izražaja najviše dolaze nastavne jedinice u kojima se pojašnjava kako rabiti kalkulator u svrhu trigonometrije i primjena trigonometrije u planimetriji. Uistinu, s pravom možemo reći da autori Dakić i Elezović navode najveći broj primjera koji opisuju primjenu u planimetriji i da je za svaki od njih sustavno objašnjen postupak rješavanja. Možemo se upitati zašto se naveliko i naširoko objašnjava kako rukovati s kalkulatorom, a živimo u vremenu u kojem gdje god da se okrenemo moramo nešto utipkati, tipkati. Na kraju krajeva, jednu vrstu kalkulatora svakodnevno koristimo. Autori su procedure korištenja kalkulatora pojasnili na način za koji bi riječ *detaljno* bila "premala", no nigdje se ne navodi da taj postupak nije jedinstven i da ovisi o vrsti kalkulatora koji koristimo.

Kada bismo samo letimično prelistali naša tri udžbenika odmah bismo uvidjeli da se u udžbeniku za tehničke škole i u udžbeniku za gimnazije koristi esejski način objašnjavanja gradiva, za razliku od udžbeniku za strukovne škole gdje nema nekog prevelikog opisivanja i pojašnjavanja, bilo da je u pitanju uvođenje nove nastavne teme ili da se radi o postupku rješavanja nekog primjera. Već smo konstatirali da u gimnazijskom udžbeniku nije zastupljeno dokazivanje i pojednostavljanje trigonometrijskih izraza. Također, autori Dakić i Elezović ne navode osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama, što u ostala dva udžbenika nije slučaj.

4. Trigonometrijske funkcije

Kao što smo naveli u uvodnom dijelu ovog rada, promatrat ćemo i trigonometriju koja se obrađuje u trećem razredu srednje škole. Do sada smo definirali trigonometrijske funkcije samo za kutove iz intervala $[0°, 90°]$, a omjere dviju stranica u pravokutnom trokutu smo zvali trigonometrijskim funkcijama jednog kuta u tom trokutu. Za izračunavanja u pravokutnom trokutu dosadašnje definicije su dovoljne. U matematici i mnogim njenim primjenama promatramo i druge trokute, koji nisu pravokutni, pa se u ovom gradivu pojam trigonometrijskih funkcija proširuje na kutove veće od $90°$ i na negativne kutove. I u ovim poglavljima od velike važnosti nam je *Pitagorin teorem* i sve ono što smo u prethodnom razredu naučili o trigonometriji. Također moramo znati osnovne stvari o brojevnom pravcu i koordinatnom sustavu.
U razmatranje uzimamo sljedeće udžbenike:

- S. Varošanec, Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred tehničkih škola
- N. Antončić - E. Špalj - V. Volenec, Udžbenik za 3. razred prirodoslovno matematičke gimnazije

Cilj ovog dijela gradiva je stjecanje znanja o trigonometrijskim funkcijama i primjeni u ostalim znanostima.
Navedimo neke od temeljnih zadataka koje bi učenici trebali usvojiti:

- naučiti trigonometrijsku kružnicu i definicije trigonometrijskih funkcija na njoj
- iskazati osnovne odnose između trigonometrijskih funkcija
- utvrditi parnost ili neparnost trigonometrijskih funkcija te odrediti temeljni period funkcije
- grafički prikazati trigonometrijske funkcije
- primjenjivati adicijske formule
- naučiti rješavati elementarne trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe
- primijeniti poučak o sinusima i poučak o kosinusima
- izračunavati površine i ostale elemente trokuta i četverokuta
- izračunavati oplošja i obujmove geometrijskih tijela
- stečena znanja primijeniti na praktične zadatke iz fizike, tehnike, itd...

4.1. Udžbenik - Varošanec

U ovom udžbeniku trigonometrijske funkcije su podijeljene na dva poglavlja: *Trigonometrijske funkcije realnog broja* i *Primjene trigonometrije u geometriji.* Prije nego što će objasniti pojam trigonometrijske kružnice, autorica Varošanec podsjeća što je to brojevni pravac i od čega se sastoji:

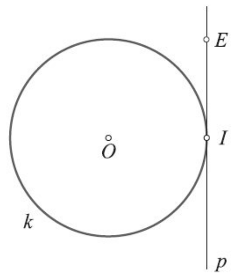
Na pravcu p istaknimo dvije različite točke I i E. Točki I pridružimo broj 0, a točki E broj 1. Svakoj točki pravca p možemo pridružiti jedan realan broj. Vrijedi i obratno, svakom realnom broju pridružena je jedna točka pravca p. Pravac p zajedno s tim pridruživanjem naziva se *brojevni pravac* ili *koordinatna os*. Točka I naziva se *ishodište* koordinatnog sustava na pravcu, a točka E *jedinična točka*.

Definicija 4.1 ***Brojevna kružnica***
Kružnicu k zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E : \mathbf{R} \to k$ zovemo brojevna ili trigonometrijska kružnica.

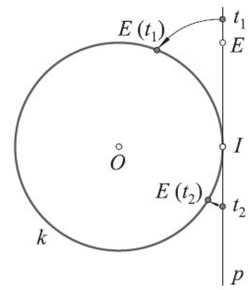
Obzirom da je jedan od temeljnih zadataka naučiti trigonometrijsku kružnicu, na uvođenju tog novog pojma se nije štedilo. Rečeno je sljedeće:

Neka je k kružnica središta O i polumjera $r = 1$, a točka I neka je točka kružnice k. Uočimo brojevni pravac p koji dira kružnicu k u točki I koja je ujedno i ishodišna točka pravca p. Neka je jedinična dužina $\overline{IE}$ brojevnog pravca p jednaka polumjeru kružnice k, Slika 27, pri čemu je točka E postavljena tako da ako se krećemo od točke O do točke E preko I, gibanje ima pozitivan smjer, tj. smjer suprotan od gibanja kazaljke na satu. Pravac p namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u negativnom smjeru (Slika 28). Kako je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka pravca p, ovim namatanjem smo svakom realnom broju pridružili točno jednu točku kružnice. Ovo pridruživanje zovemo *eksponencijalno preslikavanje* pravca na kružnicu i označavamo s E.

Broju 0 pridružena je točka I. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka 2π, to se broj 2π preslikava opet u točku I. Dalje, broj 4π preslikava se u točku I. Duljina jedinične polukružnice je π, pa se broj π preslikava u točku $\overline{I}$ (Slika 29) koja je dijametralno suprotna točki I. Isto tako, i brojevi $3\pi = \pi + 2\pi$, $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi$, ... se također preslikavaju u točku $\overline{I}$. Četvrtina kružnice ima duljinu $\frac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku C preslikava broj $\frac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$,...



Slika 27: Brojevni pravac p dira kružnicu k, $D(0, I) = d(I, E) = 1$



Slika 28: Namatanje brojevnog pravca na kružnicu

Dakle,

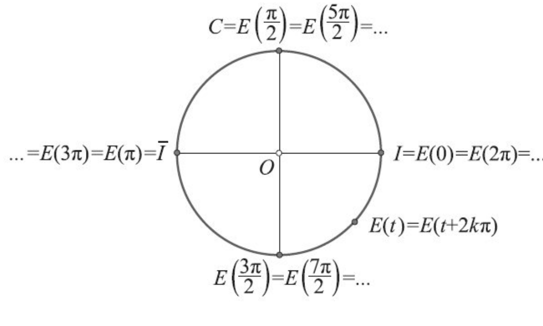
$$I = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = E(-2\pi) = ..., \text{ tj. } I = E(2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\overline{I} = E(\pi) = E(-\pi) = E(3\pi) = E(5\pi) = ..., \text{ tj. } \overline{I} = E((2k+1)\pi),\ k \in \mathbf{Z}$$

$$C = E(\frac{\pi}{2}) = E(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = E(\frac{\pi}{2} - 2\pi) = ..., \text{ tj. } C = E(\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$$

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za 2π ili za višekratnik broja 2π namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi: $E(t + 2k\pi) = E(t)$ za svaki $t \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{Z}$.

Nadalje slijedi primjer u kojem treba nacrtati $E(t)$ ako je t zadan i primjer u kojem za realni broj $t = \dfrac{19\pi}{4}$ treba naći brojeve $t_1 \in [0, 2\pi\rangle$, $t_2 \in [6\pi, 8\pi\rangle$ takve da vrijedi $E(t) = E(t_1) = E(t_2)$.



Slika 29: Duljina jedinične kružnice je jednaka 2π

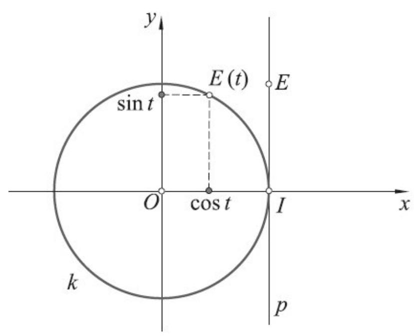
Autorica je uz pomoći Slike 30 definirala kosinus i sinus realnog broja.

Definicija 4.2 ***Kosinus i sinus realnog broja***

Apscisa točke $E(t)$ naziva se kosinus broja t i označava se s $\cos t$.

Ordinata točke $E(t)$ naziva se sinus broja t i označava se sa $\sin t$.

Također je naglašeno kako su funkcije sinus i kosinus definirane na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je [-1,1] jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti.



Slika 30: Funkcije sinus i kosinus na brojevnoj kružnici

Gdje se na brojevnoj kružnici pojavljuje tangens broja t? Prije nego što će dati odgovor na pitanje, autorica definira funkciju tangens kao $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\cos t \neq 0$. Još je objašnjeno za koje brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$ i time se dolazi do činjenice da je tangens definiran za sve realne brojeve t različite od $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Vratimo se geometrijskoj interpretaciji broja $\operatorname{tg} t$. Postupak koji je naveden u udžbeniku glasi:

Neka je $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$ takav da $E(t)$ pripada prvom kvadrantu. Označimo s E_1 ortogonalnu projekciju točke $E(t)$ na os x, a sa F presjek pravca p i spojnice $OE(t)$ (Slika 31). Očito je da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa vrijedi

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|OE_1|},$$

tj. uvažavajući da je $|OI| = 1$, $|E_1E(t)| = \sin t$, $|OE_1| = \cos t$, dobivamo

$$|FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

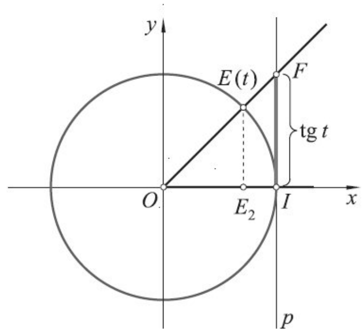
Dakle, točka F ima koordinate $(1, \operatorname{tg} t)$, tj. tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice $OE(t)$.

Promotrimo slučaj kad je $E(t)$ u drugom kvadrantu, tj.kad je $\sin t > 0$ i $\cos t < 0$ (Slika 32).

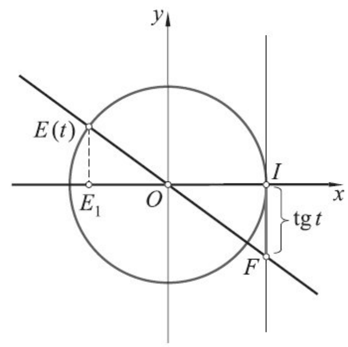
Definirajmo opet točke E_1 i F kao u prethodnom slučaju. Vrijedi da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa je

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|E_1O|},$$

tj. $|FI| = \dfrac{\sin t}{|\cos t|} = |\mathrm{tg}\, t|$. Dakle, udaljenost od F do x-osi iznosi $|\mathrm{tg}\, t|$, a kako je F u četvrtom kvadrantu, ordinata joj je negativan broj, pa je $F = (1, -|\mathrm{tg}\, t|) = (1, \mathrm{tg}\, t)$ jer je $\mathrm{tg}\, t$ negativan zbog negativnosti kosinusa od t. Znači i u ovom slučaju je $\mathrm{tg}\, t$ ordinata točke F. U slučajevima kad $E(t)$ pripada trećem, odnosno, četvrtom kvadrantu uz analogni postupak imamo isti zaključak koji posebno i istaknimo.



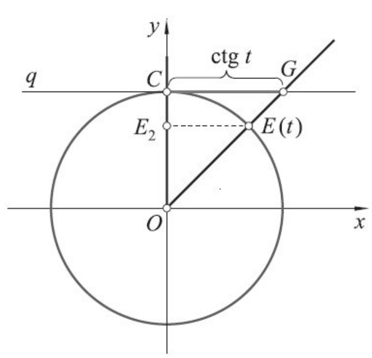
Slika 31: Geometrijska interpretacija broja $\mathrm{tg}\, t$



Slika 32: $E(t)$ je u drugom kvadrantu i $\mathrm{tg}\, t$ je opet ordinata točke F

Definicija 4.3 ***Tangens broja t***
Tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac p nazivamo tangensnom osi.

Preostaje nam još pogledati na koji način je definiran kotangens broja t. Neka je q tangenta brojevne kružnice k u točki $C(0, 1)$. Uzimamo takav realan broj t kojemu namatanjem pridružena točka $E(t)$ koja pripada prvom kvadrantu (Slika 33).



Slika 33: Geometrijska interpretacija kotangensa broja t

Neka je E_2 ortogonalna projekcija točke $E(t)$ na y-os, a G presjek pravca q i spojnice $OE(t)$. Trokuti $OE_2E(t)$ i OCG su slični i kako je $|E_2E(t)| = \cos t$, $|OC| = 1$,

$|OE_2| = \sin t$, to je

$$\frac{|CG|}{|CO|} = \frac{|E_2E(t)|}{|E_2O|}, \text{ tj. } |CG| = \frac{\cos t}{\sin t}, \text{ tj. koordinate točke } G \text{ su } (\operatorname{ctg} t, 1).$$

U ostalim slučajevima kad $E(t)$ pripada ostalim kvadrantima način razmišljanja je sličan, pa imamo sljedeći zaključak:

Definicija 4.4 ***Kotangens broja t***
Kotangens broja t je apscisa točke dobivene presjekom pravca q i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac q nazivamo kotangensnom osi.

Sada ćemo navesti primjere iz ovog dijela gradiva koji su, kao što možemo naslutiti, vrlo detaljno objašnjeni.

- Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t, ako je t:
  π, 1998π, -477π, $\frac{325}{2\pi}$, $(2k+1)\pi$, $2k\pi$, $\frac{4k+1}{2}\pi$, $\frac{4k+3}{2}\pi$.

- Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:
  $\sin t = \frac{1}{2}$, $\quad \sin t = -\frac{1}{3}$, $\quad \cos t = \frac{2}{3}$, $\quad \cos t = -\frac{1}{4}$.

- Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je t:
  $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, 1998π, $-\frac{3\pi}{4}$.
- Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je t:
  $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{191}{2}\pi$, $-\frac{3\pi}{4}$.

Na kraju ove nastavne jedinice prikazana je tablica u kojoj su vidljivi predznaci trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima. Poznato nam je kako u trigonometriji koristimo i mjerimo kutove. U ovom udžbeniku ponovljeno je što je kut te je definirana glavna mjera i mjera kuta sljedećim definicijama:

Definicija 4.5 ***Glavna mjera***
Glavna mjera u radijanima kuta $\angle aOb$ jest duljina luka $\widehat{AB}$ pri čemu se od dva moguća luka određena točkama A i B uzima onaj na kojem se kretanje od točke A do točke B vrši u pozitivnom smjeru.

Kažemo da smo kut $\angle aOb$ izmjerili u radijanima i pišemo $|\angle aOb| = t_0\text{rad}$, gdje je t_0 duljina luka $\widehat{AB}$.

Definicija 4.6 ***Mjera kuta***
Ako je t_o glavna mjera kuta $\angle aOb$ onda svaki element skupa

$$\{t_0 + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

nazivamo mjerom tog kuta.

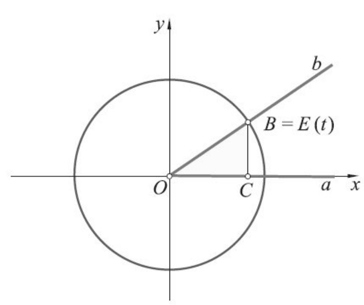
Istaknuto je kako kutove možemo mjeriti u stupnjevima, radijanima i gradima te je dana formula koja povezuje stupnjeve i radijane

$$s = \frac{180}{\pi} t,$$

gdje s predstavlja mjeru kuta u stupnjevima, a t mjeru kuta u radijanima.

Kroz više primjera je pokazano kako odrediti glavne mjere u radijanima te danu radijansku mjeru zapisati u stupnjevima. Još se navodi primjer u kojem treba $35°2'14''$ zapisati u radijanima. Nakon što su ponovljene trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta, pomoću Slike 34 objašnjeno je kako se trigonometrijske funkcije šiljastog kuta i trigonometrijske funkcije bilo koje mjere tog kuta podudaraju.

Naime, sinus broja t je duljina $|BC|$, a uočimo li pravokutan trokut OCB, vidimo da je sinus kuta $\angle aOb$ omjer $\dfrac{|BC|}{|OB|}$, što je jednako $|BC|$ jer je kružnica jedinična.



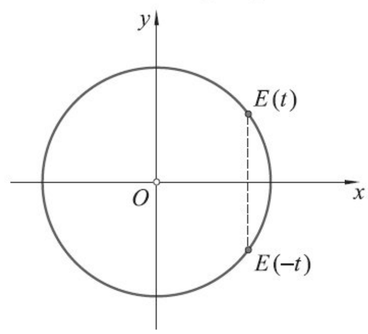
Slika 34: Trokut OCB je pravokutan i vrijedi $\sin \angle aOb = \dfrac{|BC|}{|OB|}$

Dakle, ta dva pojma: sinus šiljastog kuta i sinus njegove mjere se podudaraju. Isto se može pokazati i za ostale trigonometrijske funkcije.

Dolazimo do parnosti, odnosno neparnosti trigonometrijskih funkcija.

Definicija 4.7 ***Parna i neparna funkcija***
Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je parna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$.
Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je neparna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi
$f(-x) = -f(x)$.

Da je funkcija parna u slučaju kad su vrijednosti funkcije jednake ako su argumenti suprotni brojevi, objašnjeno je pomoću funkcije $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Graf parne funkcije osno je simetričan obzirom na y - os. S druge strane, ako funkcija u suprotnim brojevima poprima suprotne vrijednosti onda kažemo da je ona neparna. Graf neparne funkcije centralno je simetričan obzirom na ishodište.

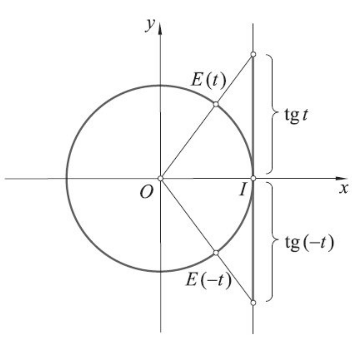


Slika 35: Točke $E(t)$ i $E(-t)$ su simetrične obzirom na x - os

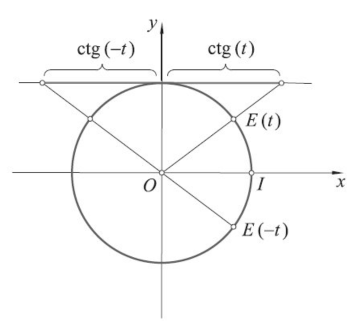
Na Slici 35 vidimo točke na brojevnoj kružnici kojima su pridruženi brojevi t i $-t$. Kako su točke E(t) i E(-t) simetrične obzirom na x - os, imaju jednake apscise i suprotne ordinate, to nas dovodi do sljedećeg zaključka:

Za svaki realan broj t vrijedi $\cos(-t) = \cos t$, tj. kosinus je parna funkcija.

Za svaki realan broj t vrijedi $\sin(-t) = -\sin t$, tj. sinus je neparna funkcija.



Slika 36: Tangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi



Slika 37: Kotangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi

Sada lako možemo pokazati da su tangens i kotangens neparne funkcije (Slika 36 i Slika 37).

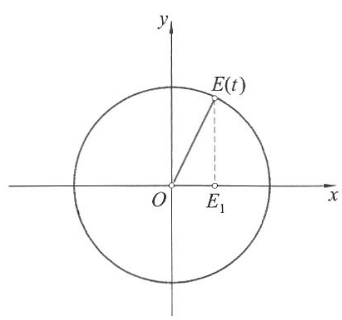
$$\mathrm{tg}\,(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\mathrm{tg}\,t, \quad \forall t \in D_{\mathrm{tg}}$$

$$\text{ctg}\,(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\text{ctg}\,t, \quad \forall t \in D_{\text{ctg}}$$

Naglašeno je da većina funkcija nije ni parna ni neparna, ali primjera u kojima treba ispitati parnost ima samo dva. Također kada je u pitanju periodičnost trigonometrijskih funkcija naveden je samo jedan primjer u kojem treba dokazati periodičnost funkcije $f(x) = \sin 2x - 3\cos 5x + 5\text{tg}\,3x$. Nastavna jedinica *Periodičnost trigonometrijskih funkcija* u većini se sastoji od teorijskog objašnjavanja, npr. dokazivanja da je 2π temeljni period funkcije sinus i kosinus, odnosno da je π temeljni period za funkcije tangens i kotangens. Svaki korak u tim dokazima je vrlo detaljno raspisan, no možda bih ipak trebalo navesti što više konkretnih primjera u kojima se treba odrediti periodičnost funkcija kako bi učenici što bolje naučili rješavati ovakve zadatke. Da su trigonometrijske funkcije periodične i koji je temeljni period za trigonometrijske funkcije, učenicima će se najbolje moći prezentirati kada dođemo do nastavne teme u kojoj se upoznajemo s grafovima trigonometrijskih funkcija.

Definicija 4.8 ***Periodična funkcija***
Ako za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ postoji $\tau > 0$ takav da je $f(x+\tau) = f(x)$, za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija

S osnovnim relacijama među trigonometrijskim funkcijama smo se upoznali još u drugom razredu. Sada ćemo vidjet kako je autorica izvela te relacije pomoću brojevne kružnice. Pri dokazivanju korištena je Slika 38.



Slika 38: Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut $OE_1E(t)$ dobivamo osnovnu relaciju

Uočimo pravokutan trokut $OE_1E(t)$ i primjenom Pitagorina poučka dobijemo osnovnu relaciju koja povezuje sinus i kosinus broja t, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Podijelimo li tu relaciju s $\cos^2 t$, odnosno sa $\sin^2 t$ dobijemo sljedeće relacije:

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \text{tg}\,^2 t + 1, \quad \frac{1}{\sin^2 t} = \text{ctg}\,^2 t + 1.$$

Ne smijemo zaboraviti da vrijedi $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$, tj.$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$.

Koristeći ove identitete moguće je pomoću jedne vrijednosti trigonometrijske funkcije broja t odrediti vrijednosti svih ostalih trigonometrijskih funkcija broja t, što je pokazano kroz sljedeći primjer:

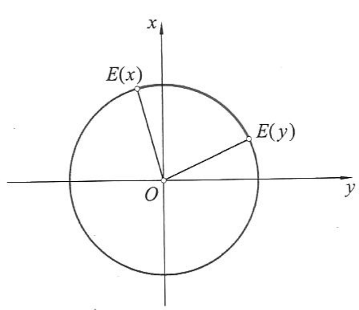
Odredimo $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ ako je $\sin t = -\frac{11}{61}$, $t \in \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$.

Ovdje moramo paziti u kojem kvadrantu se nalazi točka $E(t)$ kako bi znali koji predznak ćemo koristiti. Najbolje bi bilo, prije početka rješavanja ovakvih zadataka, da si nacrtamo brojevnu kružnicu, pogledamo u kojem kvadrantu se nalazimo i odredimo predznak trigonometrijskih funkcija.

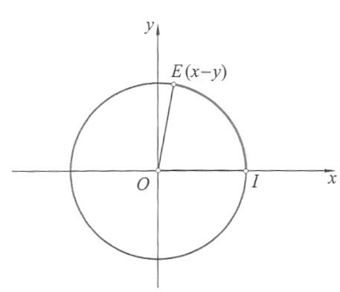
Autorica Varošanec, kao i u udžbeniku za drugi razred, navodi jedan primjer u kojem treba dokazati vrijednost trigonometrijskog izraza.
Nastavna jedinica *Adicijske formule* podijeljena je na: *Adicijske formule za kosinus*, *Formule redukcije za argument* $x + \frac{\pi}{2}$, *Adicijske formule za sinus*, *Adicijske formule za tangens*, *Adicijske formule za kotangens*, *Trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta*, *Trigonometrijske funkcije argumenta* $\frac{x}{2}$.

Adicijske formule za kosinus zbroja su dokazane na sljedeći način:
Neka su x i y dva realna broja iz intervala $[0, 2\pi]$ takva da je $x \geq y$. Pogledamo li Sliku 39 i Sliku 40 primjećujemo da je

$$E(y) = (\cos y, \sin y), \quad E(x) = (\cos x, \sin y)$$
$$E(x-y) = (\cos(x-y), \sin(x-y)), \quad I = E(0) = (1, 0).$$



Slika 39: Brojevima x i y pridružene su točke $E(x)$ i $E(y)$



Slika 40: Duljina luka od $E(y)$ do $E(x)$ jednaka je duljini luka od I do $E(x-y)$

Obzirom da duljina luka od točke $E(y)$ do točke $E(x)$ jednaka duljini luka od $I = E(0)$ do točke $E(x-y)$ vrijedi $|E(y)E(x)| = |IE(x-y)|$. Primjenjujući formule za udaljenost dviju točaka dobivamo:

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x-y) - 1)^2 + \sin^2(x-y)}$$

Kvadriranjem i korištenjem relacije $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dobivamo:

$$2 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2 - 2\cos(x-y).$$

Dodamo li -2 na obje strane jednakosti, te pomnožimo li je s $-\frac{1}{2}$ dobit ćemo

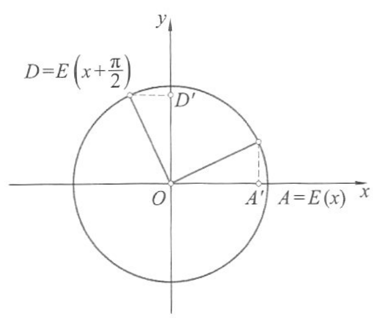
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{1}$$

Autorica je još navela postupak kojim se pokaže da formula (1) vrijedi za bilo koja dva realna broja. Također je izvedena adicijska formula za kosinus zbroja na način da u relaciji (1) umjesto y stavimo $-y$ i iskoristimo parnost kosinusa i neparnost sinusa:

$$\cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Prije nego što će se navesti izvod adicijske formule za sinus, autorica izvodi formulu redukcije za funkcije sinus i kosinus. Kao što je to i do sada bio slučaj, pomoći ćemo si s brojevnom kružnicom (Slika 41).



Slika 41: $A = E(x)$ je točka brojevne kružnice dobivena eksponencijalnim preslikavanjem broja $x \in \mathbf{R}$, a A' njena ortogonalna projekcija na x os

Neka je $A = E(x)$ točka brojevne kružnice dobivena eksponencijalnim preslikavanjem broja $x \in \mathbf{R}$, a A' njena je ortogonalna projekcija na x os. Zarotiramo li trokut OAA' za $90°$ u pozitivnom smjeru, točka A preslikat će se u točku $D = E(x + \frac{\pi}{2})$. Kako rotacija čuva udaljenost to je

$$|OD'| = |OA'| \quad i \quad |DD'| = |AA'|.$$

Iskazano u terminima trigonometrijskih funkcija imamo

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

Sada lako dobivamo formule za tangens i kotangens:

$$\mathrm{tg}\,(x+\frac{\pi}{2}) = \mathrm{ctg}\,x, \qquad \mathrm{ctg}\,(x+\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{tg}\,x.$$

Dolazimo do adicijskih formule za sinus, a one su dobivene uz pomoć formula redukcije i adicijske formule za kosinus:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\cos\left((x+y)+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x+(y+\frac{\pi}{2})\right)\\ &= -\cos x\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos x\sin y+\sin x\cos y.\end{aligned}$$

Da bi dobili formulu za sinus razlike, u formuli za sinus zbroja umjesto y stavimo $-y$, iskoristimo svojstvo parnosti i dobivamo

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Koristići adicijske formule za sinus i kosinus vrlo jednostavno se izvedu adicijske formule za tangens, odnosno kotangens.

Za svaka dva realna broja $x, y \in D_{\mathrm{tg}}$ za koje je $x \pm y \in D_{\mathrm{tg}}$, vrijedi

$$\mathrm{tg}\,(x\pm y) = \frac{\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,y}{1 \mp \mathrm{tg}\,x\mathrm{tg}\,y}.$$

Za svaka dva realna broja $x, y \in D_{\mathrm{ctg}}$ za koje je $x \pm y \in D_{\mathrm{ctg}}$, vrijedi

$$\mathrm{ctg}\,(x\pm y) = \frac{\mathrm{ctg}\,x\mathrm{ctg}\,y \mp 1}{\mathrm{ctg}\,y \pm \mathrm{ctg}\,x}.$$

Da bismo dobili trigonometrijske funkcije za dvostruki argument dovoljno je $2x$ zapisati kao $2x = x + x$ i primjeniti adicijske formule za zbroj:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^x$$

$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^{\,2}x}, \qquad \mathrm{ctg}\,2x = \frac{\mathrm{ctg}^{\,2}x - 1}{2\mathrm{ctg}\,x}.$$

Preostaje nam još pogledati kako izgledaju trigonometrijske funkcije polovičnog argumenta. Kao i za sve dosadašnje formule, i za ove je objašnjen način na koje se one dobiju.

Razlomak $\frac{1-\cos x}{2}$ transformiramo koristeći relaciju $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$ i formulu za kosinus dvostrukog kuta $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ i dobit ćemo

$$\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}.$$

Na sličan način dobit ćemo i formulu za $\cos\frac{x}{2}$ koja glasi:

$$\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}.$$

Iskažimo još formule za tangens i kotangens:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Uočili smo da je svaka formula u ovoj nastavnoj temi izvedena, no dan je i velik broj primjera u kojima se naučene formule mogu primijeniti. Formule za pretvorbu umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj, tj. formule za pretvorbu zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak su također izvedene.

Hoće li učenici moći koristiti tablice trigonometrijskih vrijednosti pri rješavanju zadataka ili će ipak tražene vrijednosti čitati s brojevne kružnice, ovisi o zahtjevu profesora koji im predaje.

Unutar naslova *Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija* ponovljen je postupak određivanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova pomoću kalkulatora koji smo naučili u drugom razredu. Obzirom da sada promatramo kutove svih vrsta malo ćemo proširiti naše znanje. Ako trebamo odrediti sve realne brojeve t za koje vrijedi $\sin t = 0.3566$, prvo rješenje dobit ćemo uporabom kalkulatora, a drugo tako da od π oduzmemo prvo rješenje. Općenito, za sinus vrijedi $t_2 = \pi - t_1$. Drugi primjer pokazuje da za drugo rješenje funkcije kosinus vrijedi $t_2 = -t_1$. Kako su sinus i kosinus periodične funkcije, svakom rješenju moramo dodati još $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Kada je riječ o funkcijama tangens i kotangens pojašnjeno je kako one imaju jedno rješenje i da tom svakom rješenju trebamo dodati $k\pi$ jer je njihov period π.

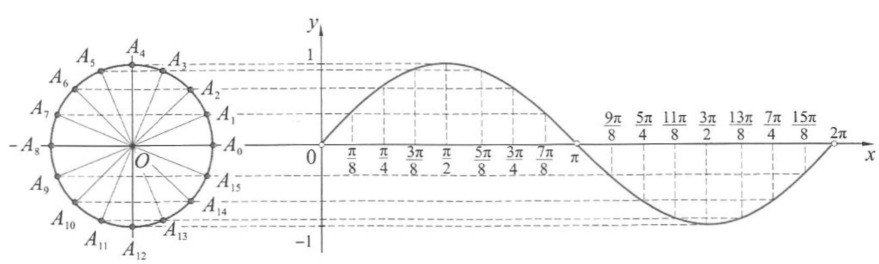
Došli smo do grafičkog prikaza trigonometrijskih funkcija, a taj dio gradiva nije najomiljeniji učenicima. U udžbeniku je objašnjeno crtanje grafa sve četiri funkcije. Za svaku funkciju dana je definicija njenog grafa, iskazan način na koji se crta taj graf te ispisane osnovne karakteristike pojedine funkcije. Crtanje sinusoide objašnjeno je na sljedeći način:

Graf funkcije $f : D_f \to \mathbf{R}$ je skup $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$. U slučaju kad je $f(x) = \sin x$, graf funkcije nazovamo sinusoida. Dakle, sinusoida je skup točaka ravnine kojima je prva koordinata realan broj x, a druga koordinata je ordinata točke $E(x)$

dobivene namatanjem pravca na kružnicu. Kako je sinus periodična funkcija s temeljnim peridom 2π, za crtanje sinusoide bit će dovoljno nacrati dio grafa za $x \in [0, 2\pi]$. Crtanje sinusoide provodimo tako da nacrtamo nekoliko točaka krivulje i spojimo ih glatkom linijom. Naravno, što je veći broj točaka, to je crtež precizniji. Pokazat ćemo postupak u kojem crtamo 2^4 točaka sinusoide na intervalu $[0, 2\pi]$ (Slika 42).
Prvo na brojevnoj kružnici k koristeći se simetralama kutova nacrtajmo točke $A_k = E\left(k\frac{\pi}{8}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., 15$. Potom , interval $[0, 2\pi]$ podijelimo na 16 jednakih dužina. Diobene točke su redom $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, ..., \frac{15\pi}{8}, 2\pi$. Zatim, povucimo paralelu s x - osi točkom A_1. Presjek te paralele i pravca $x = \frac{\pi}{8}$ je točka sinusoide. Potom, ponovimo taj postupak za preostale točke A_k. Spajanjem tih 16 točaka dobivamo jedan val sinusoide, tj. graf funkcije sinus na intervali $[0, 2\pi]$. Sada taj graf možemo proširiti koristeći periodičnost funkcije sinus.

Za funkciju sinus vrijede sljedeće karakteristike:

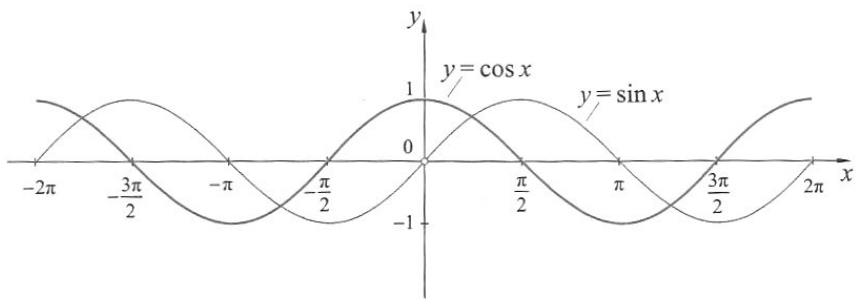
- temeljni period je 2π
- nultočke su $k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- maksimum je 1, a točke u kojima se postiže su $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- minimum je -1, a postiže se za $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
- sinusoida je centralno simetrična obzirom na ishodište.



Slika 42: Val sinusoide na intervalu $[0, 2\pi]$

Za crtanje grafa funkcije kosinus navedeno je da imamo dva pristupa. Prvi način analogan je crtanju sinusoide, tj. na brojevnoj kružnici k istaknemo dovoljan broj točaka $E(x)$ i apscise tih točaka su ordinate točaka kosinusoide.
Drugi način je usko vezan uz formule redukcije $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Ako na sinusoidi promatramo točku s apscisom $x + \frac{\pi}{2}$, ta točka je točka kosinusoide s apscisom x.

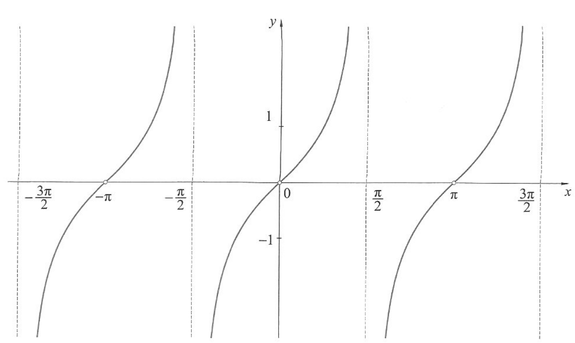
Specijalno, točka sinusoide s apscisom $\frac{\pi}{2}$ je točka kosinusoide s apscisom 0. Dakle, kosinusoida je sinusoida translatirana za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo, što vidimo na Slici 43.



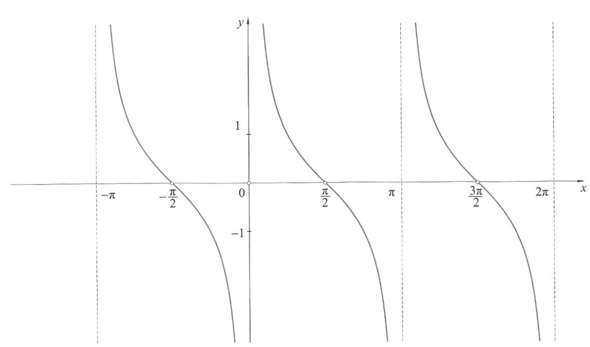
Slika 43: Kosinusoida je translatirana sinusoida za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo

Prije nego što počinje objašnjavati kako se crta graf funkcije tangens autorica ponavlja geometrijsku interpretaciju tangensa koju smo upoznali pri definiranju funkcije tangens. Navedeno je kako crtanje provodimo na sličan način kao u primjeru sinusoide, koristeći diobu luka kružnice u 1. kvadrantu i svojstvo neparnosti tangensa (Slika 44). Nultočke funkcije tangens su oni brojevi čiji je sinus jednak 0, tj. $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Funkcija tangens nema maksimalnu vrijednost jer se približavanjem broja t broju $\frac{\pi}{2}$ vrijednost ordinate točke na tangensnoj osi može po volji povećati. Isto vrijedi za nepostojanje minimalne vrijednosti. Još je iskaknuto kako se neparnost funkcije tangens na grafu odražava tako da je graf centralno simetričan obzirom na ishodište, tj. točke $(t, \operatorname{tg} t)$, $(-t, -\operatorname{tg} t)$ leže na tangensoidi. Za brojeve $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, tangens nije definiran, a pravce $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nazivamo asimptotama tangensoide.

Kako nacrtati graf funkcije kotangens, Slika 45, objašnjeno je na sličan način kao i u slučaju crtanja tangensoide.



Slika 44: Graf funkcije tangens



Slika 45: Graf funkcije kotangens

Unutar ove lekcije je još obrađen graf funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$. O tom se grafu navodi kako se također naziva sinusoida i da koeficijenti a, b i c utječu na ekstremalne vrijednosti, period i nultočke.

- Broj $|a|$ naziva se amplituda funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$.
- Temeljni period funkcije $f(x) = a\sin(bx+c)$ je $\frac{2\pi}{|b|}$ (b regulira periodičnost funkcije f).
- Broj c nazivamo fazni pomak funkcije $f(x) = a\sin(bx + c)$.
- Jedna nultočka funkcije je $-\frac{c}{b}$ i val sinusoide počinjemo crtati u njoj.

Nadalje, u primjeru koji je naveden nakon teorijskog dijela, treba nacrtati graf funkcije $f(x) = \frac{3}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

Crtanje ovog grafa navedeno je na dva načina. Prvi način se odnosi na crtanje uz pomoć izračunavanja amplitude, periodičnosti, nultočaka funkcije $f(x) = \frac{3}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

Obzirom da graf funkcije $f(x) = a\sin(bx+c)$ dobivamo translacijom grafa funkcije $g(x) = \sin bx$ duž x - osi, graf tražene funkcije možemo nacrtati postepeno crtajući prvo funkciju $y_1 = \sin 2x$, zatim $y_2 = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ i konačno $y = \frac{3}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

Zadnja nastavna jedinica prvog poglavlja ovog udžbenika je *Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.* One su definirane kao jednadžbe i nejednadžbe u kojima se nepoznanica x nalazi kao argument neke od trigonometrijskih funkcija, a rješenje trigonometrijske jednadžbe je svaki realan broj koji zadovoljava tu jednadžbu. Autorica još navodi kako ne postoji općenita metoda za rješavanje trigonometrijskih jednadžbi, ali se u postupku rješavanja uvijek pojavljuju elementarne jednadžbe oblika $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbf{R}$.
S trigonometrijskim jednadžbama oblika $f(x) = a$, $a \in \mathbf{R}$, gdje je f trigonometrijska funkcija, učenici su se upoznali kada su pomoću kalkulatora određivali broj kojemu je dana vrijednost trigonometrijske funkcije, no autorica je, zbog važnosti, na primjeru $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ponovila još jednom postupak. Nadalje je opisano što je skup rješenja trigonometrijske jednadžbe pojedine funkcije. Ukoliko je x_0 jedno rješenje jednadžbe $\cos x = a$, zbog parnosti kosinusa, $-x_0$ je drugo rješenje. Kada govorimo o rješenjima jednadžbe $\sin x = a$, zbog valjanosti formule redukcije $\sin(\pi - x) = \sin x$, slijedi da je $\pi - x_0$ drugo rješenje te jednadžbe.

Definicija 4.9 ***Trigonometrijska jednadžba*** $\cos x = a$, $a \leq 1$
Skup rješenja jednadžbe $\cos x = a$, $a \leq 1$, *je* $\{\pm x_0 + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ *gdje je* $x_0 \in \mathbf{R}$ *jedno rješenje te jednadžbe.*

Definicija 4.10 ***Trigonometrijska jednadžba*** $\sin x = a$, $a \leq 1$
Skup rješenja jednadžbe $\sin x = a$, $a \leq 1$, *je* $\{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ *gdje je* $x_0 \in \mathbf{R}$ *jedno rješenje te jednadžbe.*

Jednadžba $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbf{R}$, odnosno $\operatorname{ctg} x = a$, ima rješenja za svaki $a \in \mathbf{R}$.

Definicija 4.11 ***Trigonometrijske jednadžbe*** $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$
Skup rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbf{R}$, *je* $\{x_0 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ *gdje je* $x_0 \in \mathbf{R}$ *jedno rješenje te jednadžbe.*
Skup rješenja jednadžbe $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbf{R}$, *je* $\{x_0 + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ *gdje je* $x_0 \in \mathbf{R}$ *jedno rješenje te jednadžbe.*

Nadalje imamo primjer u kojem treba riješiti jednu trigonometrijsku jednadžbu za svaku funkciju.
Za trigonometrijske jednadžbe oblika $P(f(x)) = 0$, gdje je P polinom, a f trigonometrijska funkcija, dan je jedan primjer u kojem treba rješiti jednadžbu

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Kao primjeri takvih jednadžbi navode se $2\sin x - 1$, $\operatorname{tg}{}^3 x = 8$, $\cos^4 x - 2\sin^2 x + 3 = 0$, no niti jedna ta jednadžba nije riješena.
Trigonometrijske jednadžbe oblika $a\sin x + b\sin x = c$ rješavaju se metodom univerzalne zamjene ili supstitucije. U udžbeniku je iskazan i dokazan slijedeći poučak koji je bitan za danu metodu:

Poučak 4.1 ***Univerzalna zamjena***
Neka je $x \in \mathbf{R}\ \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. *Ako je* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, *tada je*

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Ova metoda ilustrirana je na primjeru $3\sin x + 4\cos x = 5$. Dana su dva načina na koji se može riješiti ova jednadžba. U prvom se koristi univerzalna zamjena koju smo prethodno naveli, a u drugom načinu jednadžbu svodimo na oblik $\sin(x + \alpha) = D$.
Kako bi jednadžbu sveli na oblik $\sin(x+\alpha) = D$, cijela jednadžba je podijeljena brojem $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ i tim dijeljenjem dobivamo jednadžbu koja je slična zadanoj, ali sada su koeficijenti uz $\sin x$ i $\cos x$ brojevi iz $[-1, 1]$ čija je suma kvadrata jednaka 1, tj.

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1.$$

Neka je $\alpha \in \langle 0, 90^\circ\rangle$ broj za koji vrijedi $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, tj. $\alpha \approx 53^\circ 7' 48''$. Tada prethodna jednadžba ima oblik $\cos\alpha + \sin\alpha = 1$, odnosno, $\sin(x+\alpha) = 1$. Rješenja ove elementarne jednadžbe su
$x + \alpha = 90^\circ + 360^\circ k$, tj. $x = 90^{\circ\circ} - 53^\circ 7' 48'' k = 36^\circ 52' 12'', k \in \mathbf{Z}$.
Isto rješenje se dobije kada jednadžbu rješavamo uz pomoć univerzalne zamjene.

Kada je riječ o sustavima trigonometrijskih jednadžbi, napisana je samo definicija i dan jedan primjer. Trigonometrijskim nejednadžbama, također, nije posvećeno previše pozornosti. Riješena su dva elementarna primjera, $\cos x \leq \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg} x \geq 1$.

Znači, da bi uspješno rješavali trigonometrijske jednadžbe, odnosno nejednadžbe, učenici moraju usvojiti to da funkcije sinus i kosinus imaju dva rješenja, da svakom tom rješenju dodajemo period $2k\pi$ te moraju znati način na koji se određuje drugo rješenje promatrane funkcije. Kada se radi o funkcijama tangens i kotangens, one su nešto jednostavnije jer imaju samo jedno rješenje kojemu dodajemo period $k\pi$. Naravno, prije rješavanja jednadžbi oni moraju znati na koji način se promatrana vrsta jednadžbe riješava. Učenicima trigonometrijske jednadžbe predstavlju problem jer ne nauče dobro iščitavati vrijednosti trigonometrijskih funkcija s dane brojevne kružnice ili, prije svega, ne znaju kako krenuti rješavati jednadžbu koja nije zapisana u elementarnom obliku. Također, problem mogu biti bikvadratne jednadžbe kada su u pitanju funkcije kosinus ili sinus, jer se tada radi o dvostrukom, tj. četverostrukom rješenju pa učenici nerijetko izostave pokoje rješenje.

S trigonometrijskim nejednadžbama završava prvo poglavlje u ovom udžbeniku. Prelazimo na drugo poglavlje, koje je temeljeno na primjenama trigonometrije u geometriji. Kroz dva primjera ponovljena je trigonometrija pravokutnog trokuta. Dolazimo do poučka o sinusima, odnosno kosinusima. Kao uvod u novo gradivo, rečeno je kako ćemo sad proučavati trokut koji nije pravokutan, tzv. kosokutni trokut. Bit će prikazane neke osnovne relacije koje povezuju stranice i kutove tog trokuta. Osim iskaza samih poučaka, izvedeni su dokazi tih poučaka te riješena po dva osnovna primjera za svaki od poučaka.

Poučak 4.2 ***Sinusov poučak***
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tom trokutu.

Poučak 4.3 ***Kosinusov poučak***
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

U primjerima za sinusov poučak traže se nepoznati elementi trokuta ako imamo zadana dva kuta i stranicu nasuprot jednom od ta dva kuta te koliko iznosi jedan kut trokuta ukoliko imamo zadane dvije stranice i kut nasuprot jedne od njih. U ovom drugom primjeru se uočava kako za traženi kut postoje dva rješenja, tj. da ako su dane dvije stranice trokuta i kut nasuprot manjoj, trokut nije jednoznačno određen.
Dan je primjer u kojem su zadane sve tri stranice trokuta, a treba izračunati kutove tog trokuta. Naravno, radi se o primjeni kosinusovog poučka. Drugi primjer u kojem se koristi kosinusov poučak glasi:

Dokažimo da je trokut pravokutan ako u trokutu ABC vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{a+c}.$$

Izrazimo li $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ pomoću stranica trokuta koristeći poučak o kosinusima i ako iskoristimo uvjet zadatka dobije se

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{b^2}{(a+c)^2},$$

što nakon množenja sa zajedničkim nazivnikom poprima oblik

$$b^4 = (c^2 - a^2)^2, \quad tj. \quad b^2 = |c^2 - a^2|.$$

Ako je $c > a$, zadnja nejednakost prelazi u $c^2 = a^2 + b^2$, tj. trokut ABC je pravokutan s pravim kutom prvi vrhu C, a ako je $c < a$, tada je $a^2 = b^2 + c^2$, tj. trokut ABC je pravokutan s pravim kutom prvi vrhu A.

Unutar nastavne teme *Primjene trigonometrije u planimetrije* autorica nas podsjeća kojim smo se formulama do sada koristili kako bismo izračunali površinu trokuta te izvodi formulu za površinu trokuta ako su zadane dvije stranice i kut između njih, tj. dokazano je da vrijedi:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Sljedećim primjerom autorica je objedinila sinusov i kosinusov poučak te formulu za površinu trokuta:

Izračunajmo stranice i kutove trokuta u kojem vrijedi: $P = 400$, $\alpha : \beta = 1 : 2$, $a : b = 3 : 4$.

Također je dokazano da za površinu paralelograma vrijedi formula $P = \frac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi$, gdje su d_1 i d_2 dijagonale paralelograma, a φ kut između njih. Dan je jedan primjer treba izračunati kut između dijagonala paralelograma, ako su dane duljine njegovih stranica i kut između njih.

Prije nego što će navesti primjere koji objašnjavaju primjenu trigonometrije u stereometriji, autorica izvodi tangensov poučak koji glasi:

Poučak 4.4 ***Tangensov poučak***
U trokutu ABC vrijedi

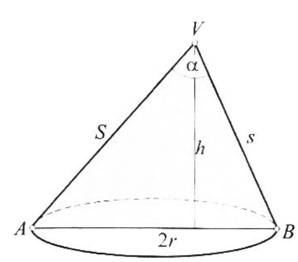
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}, \qquad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \qquad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Primjer u kojem se treba primjeniti tangensov poučak je sljedeći:

Odredimo kutove i nepoznate stranice trokuta ako je zadano $a : b = 3 : 1$, $c = 15$, $\alpha - \beta = \frac{\gamma}{2}$.

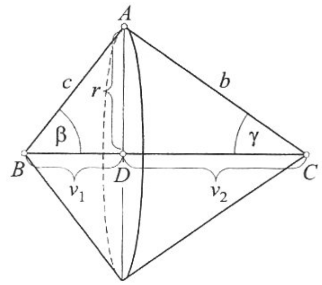
Kada je u pitanju primjena trignometrije u stereometriji, u ovom udžbeniku navedena su četiri primjera. U prvom primjeru treba izračunati obujam šesterostrane prizme ukoliko njena najdulja prostorna dijagonala ima duljinu D, a s bočnim bridom zatvara kut α. U drugom primjeru nas traže da izračunamo kut između dviju prostornih dijagonala kocke. Preostala dva primjera odnose se na stožac, a glase:

Kut pri vrhu karakterističnog presjeka kosog stožca je $\alpha = 112°$, najdulja izvodnica $S = 13$, a najkraća $s = 11$ (Slika 46). Koliki je obujam stošca?



Slika 46: Karakteristični presjek kosog stošca je onaj presjek koji sadrži najdulju i najkraću izvodnicu

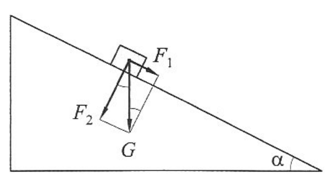
Trokut stranice a s priležećim šiljastim kutovima β i γ rotira se oko stranice a (Slika 47). Izrazimo oplošje i obujam tijela nastalog rotacijom pomoću veličina a, β i γ.



Slika 47: Tijelo nastalo rotacijom sastoji se od dva stošca sa zajedničkom bazom

Došli smo do zadnje nastavne jedinice *Primjene trigonometrije u fizici, tehnici i geodeziji.* Navest ćemo neke od primjera koje je autorica Varošanec pripremila.

Tijelo klizi jednoliko niz kosinu koja s horizontalnom ravninom zatvara kut α (Slika 48). Koliki je koeficijent trenja?



Slika 48: Sila teža G rastavlja se na dvije međusobno okomite komponente: silu F_1 koja izvodi gibanje i silu F_2 pritiska na podlogu

Ukoliko tijelo M bacimo početnom brzinom pod kutom α prema horizontali (elevacijski kut), tijelo izvodi složeno gibanje koje nazivamo kosi hitac. Gibanja od kojih se sastoji kosi hitac su jednoliko gibanje po pravcu s priklonim kutom α i slobodan pad (ukoliko zanemarimo otpor zraka). Odredimo položaj materijalne točke M u zavisnosti o vremenu.

Tijelo harmonički titra frekvencijom 3 Hz i amplitudom 6 cm. Nakon kojeg vremena je faza titranja jednaka $\frac{\pi}{6}$ ako je početna faza jednaka nuli?

U krug struje serijski su priključeni radni otpor $R = 12\Omega$ i kapacitivni otpor $R_C = 16\Omega$. Napiši jednadžbu za trenutnu vrijednost jakosti struje ako se napon na krajevima otpora mijenja po zakonu $u = 240V\sin(\omega t - 23.13°)$.

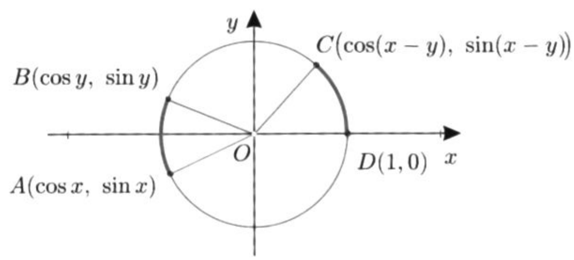
4.2. Udžbenik - Antončić, Špalj, Volenec

Kao uvod u novo gradivo, autori navode primjer o Mjesečevim mijenama u kojem uočavamo podatke o vidljivom dijelu Mjeseca u Zagrebu u prva tri mjeseca 2004. godine. Ovaj primjer dobro dođe kao motivacija za razmišljanje o tome na koji način će se trigonometrija promatrati u ovom razredu. Obzirom da smo proučavali dva udžbenika Varošanec, mogli smo zaključiti da ona ne navodi uvodne, motivacijske primjere.

Trigonometrija je u ovom udžbeniku podijeljena na četiri dijela: *Uvod u trigonometriju*, *Adicijske formule i grafovi trigonometrijskih funkcija*, *Trigonometrijske jednadžbe, nejednadžbe i sustavi* i *Primjena trigonometrije*. U prvom dijelu autori su pojasnili pojam brojevne kružnice i eksponencijalnog preslikavanja te definirali trigonometrijske funkcije broja i naveli neka svojstva definiranih funkcija. Pojam brojevne kružnice i definicije trigonometrijskih funkcija pomoću nje, definirani su na sličan način kao i u prethodno promatranom udžbeniku. Za razliku od prethodnog udžbenika, ovdje je predznacima trigonometrijskih funkcija posvećeno više pozornosti, dani su primjeri u kojima treba na brojevnoj kružnici odrediti $E(t)$ ako je dano, npr., $\cos t = \dfrac{1}{3}$ i $\sin t > 0$. Osnovna relacija koja povezuje sinus i kosinus broja dokazana je pomoću trokuta koji se nalazi u drugom kvadrantu, dok je autorica Varošanec za dokaz koristila trokut koji je smješten u prvi kvadrant. Primjećujemo još neke razlike u odnosu na udžbenik za tehničke škole, a to je da je iskazan i dokazan obrat osnovne relacije:

Ako realni brojevi x, y zadovoljavaju jednakost $x^2+y^2 = 1$, onda postoji realni broj t takav da je $x = \cos t$ i $y = \sin t$. Osim toga, postoji jedinstveni realni broj $t_0 \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $x = \cos t_0$ i $y = \sin t_0$.

Također se navodi da je *identitet* jednakost istinita za sve vrijednosti varijabli koje se u toj jednakosti javljaju i za koje su obje strane definirane. Da se identitet može dokazati direktno ili indirektno objašnjeno je kroz jedan primjer. Kada je riječ o svojstvima trigonometrijskih funkcija, prvo je objašnjeno što je domena pojedine trigonometrijske funkcije, a zatim se pojašnjava koja funkcija je parna, odnosno neparna. Prije nego što navode definiciju periodičnosti, autori napominju kako je periodičnost česta pojava u prirodi. Ovdje nailazimo na veći broj primjera u kojim treba naći temeljni period funkcije. Izračunavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija nije toliko detaljno opisano kao što je to u slučaju Varošanec. Da su funkcije sinus i kosinus periodične s temeljnim periodom 2π, učenici su mogli sami zaključiti kroz primjer u kojem su zadane vrijednosti x, a treba izračunati $\sin x$ ili $\cos x$ te dobivene uređene parove ucrtati u koordinatni sustav i dobivene točke povezati glatkom krivuljom. Ovo je jako dobar pristup objašnjavanja novih pojmova, budući da učenici sami mogu zaključiti osnovne činjenice o sinusoidi i kosinusoidi. Adicijske formule za kosinus i sinus dokazane su na isti način kao i u udžbeniku za tehničke škole, no za dokaz formule za kosinus razlike je korištena Slika 49.

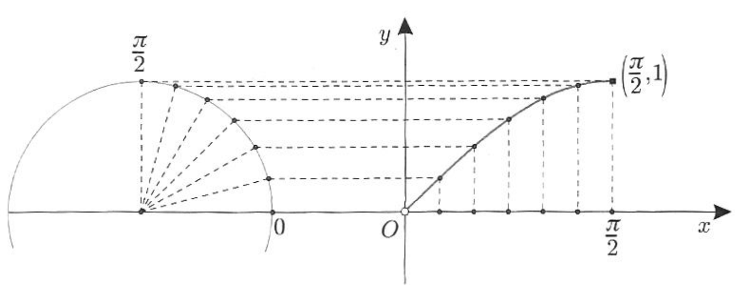


Slika 49: Pomoću koordinata točaka A, B, C, D dokazana je formula za kosinus razlike

Formule redukcije za sinus i kosinus nisu dokazane, isto kao i formule polovičnog broja. Formule dvostrukog broja i formule pretvorbe su također izvedene. Autori su dali veliki broj primjera kroz koje učenici mogu primijeniti sve formule koju su upoznali. Dolazimo do grafova trigonometrijskih funkcija. Grafovi funkcija sinus i kosinus su vrlo detaljno objašnjeni i navedene su svojstva karakteristična za pojedini graf, dok se za funkcije tangens i kotangens samo ukratko pojašnjava kako nacrtati graf pojedine funkcije. Autori su crtanje kosinusoide pojasnili na način kao i u udžbeniku za tehničke škole, a crtanje sinusoide prikazano je kroz sljedeća četiri koraka:

Prvi korak:

Prvo ćemo nacrtati sinusoidu u intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Da bismo što točnije nacrtali taj dio sinusoide, prvu četvrtinu brojevne kružnice podijelimo npr. na šest jednakih dijelova. Kroz te točke povučemo paralele s osi x. Na isti način način podijelimo interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i kroz te točke povučemo paralele s osi y. Sjecišta tih okomica i paralela daju nam odgovarajuće točke grafa funkcije $y = \sin x$. Te točke spojimo glatkom krivuljom.(Slika 50)



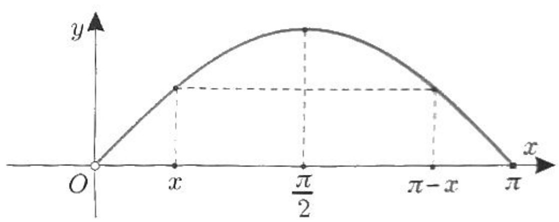
Slika 50: Sinusoida na intervalu od 0 do $\frac{\pi}{2}$

Drugi korak:

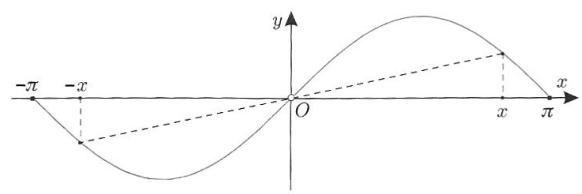
Za crtanje sinusoide u intervalu od $\frac{\pi}{2}$ do π koristit ćemo formule redukcije $\sin(\pi - x) = \sin x$. Vidimo da je na tom intervalu graf funkcije simetričan obzirom na paralelu s osi y kroz točke $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. (Slika 51)

Treći korak:

Sada ćemo upotrijebiti neparnost funkcije sinus, tj. $\sin(-x) = -\sin x$. Graf neparne funkcije simetričan je s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, pa ćemo konstruirati sinusoidu na intervalu od $-\pi$ do 0. (Slika 52)



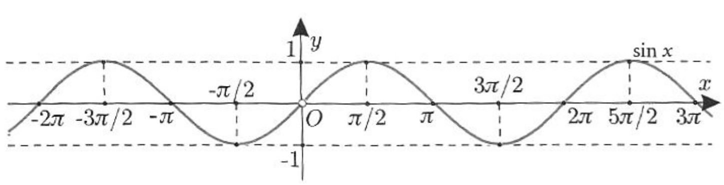
Slika 51: Sinusoida na intervalu od $\frac{\pi}{2}$ do π



Slika 52: Sinusoida na intervalu od $-\pi$ do 0

Četvrti korak:

Za konstrukciju grafa funkcije na skupu realnih brojeva uporabimo periodičnost funkcije sinus, što znači da ćemo dobivenu krivulju translatirati udesno za 2π, 4π,... i ulijevo za 2π, 4π... Na taj način smo dobili cijelu sinusoidu, što vidimo na slici 53.



Slika 53: Sinusoida na intervalu od -2π do 3π

Autori su na nekoliko detaljno raspisanih primjera objasnili kako nacrtati graf funkcije $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$. Primijetimo da je autorica prethodnog udžbenika pokazala kako se crta graf funkcije $f(x) = A\sin(Bx + C)$ i to samo kroz jedan primjer. Sve u svemu, udžbenik za matematičku gimnaziju nam se čini jednostavniji za proučavati iz razloga što je dano minimalno teorijskog znanja, a sve ostalo pokazano na konkretnim primjerima. Također primjeri su sustavno navedeni, od lakših prema težim. Autorica Varošanec je jako puno toga dokazala, ali primjera u nekim dijelovima je pomanjkalo.

U ovom udžbeniku obrađeno je više vrsta trigonometrijskih jednadžbi nego u udžbeniku za tehničke škole, u kojem smo susreli samo osnovne jednadžbe, linearne jednadžbe i one jednadžbe koje se svode na kvadratne. Autori Antončić, Špalj, Volenec su, osim prethodno navedenih, obradili još homogene jednadžbe i one koje se svode na homogene te jednadžbe koje se rješavaju uporabom formula pretvorbi. Sustavi trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi su također detaljno objašnjeni kroz više primjera. Naravno, prije nego se navode sustavi trigonometrijskih nejednadžbi obrađene su trigonometrijske nejednadžbe. Na kraju ovog poglavlja nailazimo na nastavnu temu *Modeliranje* u kojoj su opisani primjeri iz svakodnevnog života. Naglašeno je kako trigonometriju rabimo u modeliranju bilo kojeg procesa koji se ponavlja, poput otkucaja srca ili seizmičkih valova. Pogledajmo jedan kako glasi jedan od primjera:
U bolnici leži pacijent čija se tjelesna temperatura mijenja od niske ($35.9°C$) do povišene ($37.6°C$).Razmak između dviju visokih temperatura je 17 dana.

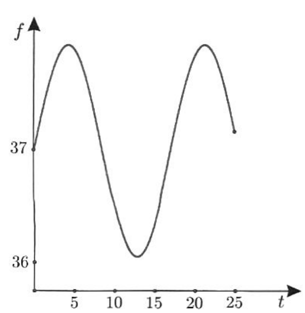
a) Odredimo formulu prema kojoj se ponaša njegova tjelesna temperatura ovisno o vremenu u danima, od početka bolesti, uz pretpostavku da se može modelirati pomoću sinusoide bez faznog pomaka.

b) Skicirajmo graf u intervalu od 0 do 25. (Slika 54)

c) Koliko je bila njegova normalna tjelesna temperatura?

d) Koliko je ona iznosila sedmi dan bolesti?

e) Kada je prvi put imao visoku temperaturu?



Slika 54: Graf funkcije $f(t) = 0.85 \sin\left(\frac{2\pi}{17}t\right) + 36.75$

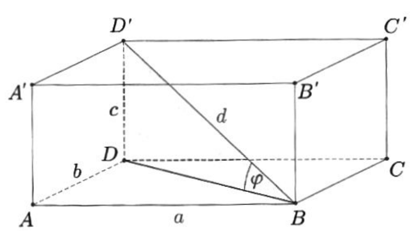
Trigonometrijske funkcije kuta autori su ostavili za zadnje poglavlje, odmah nakon što su naveli nekoliko primjera u kojima trebamo primjeniti trigonometriju pravokutnog trokuta. Dani su primjeri u kojima treba odrediti glavnu mjeru kuta ili pak pretvoriti mjeru kuta iz radijana u mjeru kuta u stupnjevima i obrnuto, a radijanska mjera je definirana kao omjer duljine luka prema polumjeru kruga. Poučaci o sinusu i kosinusu su izvedeni, a za svaki od tih poučaka istaknuto je sljedeće:

Poučak o sinusima rabimo pri rješavanju trokuta ako znamo duljine dviju stranica i mjeru kuta nasuprot jedne od njih ili ako znamo mjere dvaju kutova i duljinu bilo koje stranice. Poučak o kosinusima rabit ćemo pri rješavanju trokuta, u slučaju da su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta među njima ili duljine svih triju stranica.

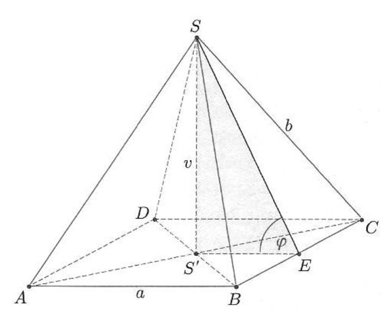
Trigonometrija u planimetrij objašnjena je kroz tri primjera u kojima treba izračunati površinu trokuta ukoliko su zadani pojedini kutevi i stranice trokuta, no nema niti jedan primjer u kojem treba odrediti površinu romba ili paralelograma, kao što je u prethodnom udžbeniku. Rješavanje zadataka iz geometrije prostora, tj. stereometrije dano je kroz sljedeće primjere:

Odredimo obujam kvadra kod kojeg je $a = 5$ cm duljina stranice baze, $d = 8$ cm duljina prostorne dijagonale i $\varphi = 30°$ kut koji ta dijagonala zatvara s bazom kvadra.(Slika 55)

Odredimo obujam i oplošje uspravne pravilne četverostrane piramide, Slika 56, ako je zadana duljina bočnog brida b i kut φ, koji pobočka zatvara s bazom piramide.



Slika 55: Obujam kvadra jednak je produktu duljina njegovih bridova

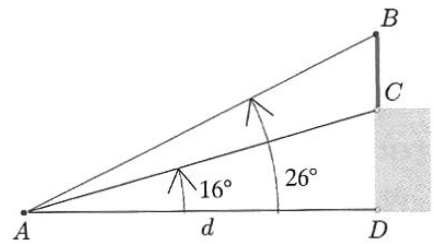


Slika 56: Uspravna pravilna četverostrana piramida

Kada su u pitanju još neke primjene trigonometrije u svakidašnjem životu, autori navode primjere u kojima treba odrediti udaljenost između dviju nedostupnih točaka ili visinu nedostupnog objekta. Navedeni su primjeri sljedećeg oblika:

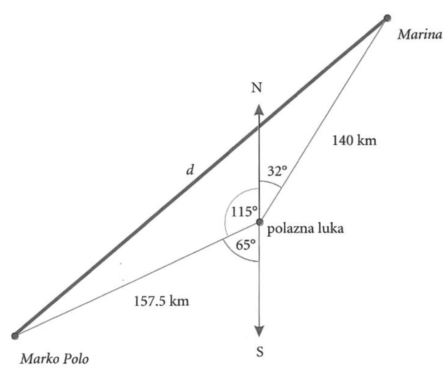
Antena visoka 80 m nalazi se na krovu poslovne zgrade. Na udaljenosti d od podnožja zgrade izmjeren je kut elevacije $\alpha = 26°$ do vrha antene i kut elevacije

$\beta = 16°$ do vrha zgrade, Slika 57. Odredite visinu zgrade.



Slika 57: Kut elevacije je kut koji gleda iznad ravnine horizonta

Trajekt *Marina* ispolovio je iz luke brzinom od 35 km/h u smjeru N32°E. Pola sata kasnije isplovljava trajekt *Marko Polo* brzinom od 45 km/h u smjeru S65°W, Slika 58. Odredimo udaljenost trajekata 4 sata nakon ispolovljavanja *Marine*.



Slika 58: Nakon četiri sata plovidbe *Marina* je na udaljenosti od 140 km, a *Marko Polo* je polovio 3.5 sati i udaljen je 157.5 km od polazne luke

Proučavajući udžbenika Varošanec za drugi razred zaključili smo da je napisan u, nazovimo, esejskom stilu. Isto vrijedi za udžbenik trećeg razreda. Obzirom da je udžbenik za matematičku gimnaziju napisan na malo jednostavniji način, bez pretjeranog opisivanja teorijskog dijela gradiva, smatramo da bi njega mogli koristiti i učenici tehničkih škola. Naime, primjeri koji su navedeni u oba prethodno promatrana udžbenika su podjednake težine, osim što u udžbeniku za tehničke škole nailazimo na primjere primjene trigonometrije u geodeziji i tehnici, a toga nema u drugom udžbeniku.

5. Trigonometrija na državnoj maturi

Državna matura je skup ispita čijim polaganjem učenici gimnazijskih programa završavaju srednjoškolsko obrazovanje. Učenici najmanje četverogodišnjih strukovnih i umjetničkih programa svoje srednjoškolsko obrazovanje završavaju izradom i obranom završnog rada, no, ukoliko žele, mogu polagati ispite državne mature.
Cilj je državne mature provjera i vrednovanje postignutog znanja i sposobnosti učenika, stečenih obrazovanjem prema propisanim nastavnim planovima i programima. Postoje obvezni i izborni ispiti državne mature. Obvezni ispiti polažu se iz hrvatskog jezika, matematike i stranog jezika. Ispiti državne mature jednaki su za sve učenike i svi ih učenici polažu u isto vrijeme. Ispite državne mature organizira i provodi *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja*, a svaka škola ima ispitnog koordinatora kojemu se učenici mogu obratiti za sva pitanja u vezi s načinom pristupanja i polaganja ispita državne mature. Obvezni ispiti državne mature mogu se polagati na dvjema razinama: višoj razini (A) i nižoj razini (B). Ispiti su se do sada polagali u ljetnome, jesenskome i zimskome roku, ali od školske godine 2012./2013. će se polagati na dva roka, ljetnome i jesenskom. Državnu maturu su prvi imali prilike polagati gimnazijalci koji su prvi razred srednje škole upisali 2006./2007. godine.
Ispitna područja iz matematike na objema razinama su:

- brojevi i algebra
- funkcije
- jednadžbe i nejednadžbe
- geometrija
- modeliranje.

Trigonometriju na državnoj maturi susrećemo samo na višoj razini. Zadatci koji se pojavljuju objedinjuju i trigonometriju pravokutnog trokuta i trigonometrijske funkcije. Na probnoj maturi, 2008./2009. godine, navedeno je pet zadataka iz trigonometrije. Već sljedeće godine broj zadataka na sva tri roka je trinaest, što je ujedno i maksimalan broj zadataka iz ovog područja koji su se do sada pojavljivali na državnoj maturi. Školske godine 2010./2011. na sva tri roka bilo je devet zadataka, a prethodne, 2011./2012., jedanaest. Na svakom od provedenih rokova dano je, između ostalih, nekoliko zadataka koji uključuju trigonometriju pravokutnog i kosokutnog trokuta te zadatak u kojem treba riješiti neku trigonometrijsku jednadžbu. Također, ispiti državne mature sadrže zadatke u kojima treba nacrati neku trigonometrijsku funkciju, odrediti temeljni period funkcije, primijeniti adicijske formule i neke trigonometrijske identitet, odrediti glavnu mjeru kuta, itd.. Primjećujemo da trigonometrija na državnoj maturi obuhvaća poveći broj zadataka. Navesti ćemo zadatke koji su se provodili na jesenskome roku 2011./2012. godine.

1. Na intervalu $[0, 2\pi]$ nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Odredite opće rješenje jednadžbe $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.

3. Riješite sljedeće zadatke:

   a) Kolika je mjera najmanjeg kuta u pravokutnom trokutu čije su duljine kateta 12 cm i 6 cm?

   b) Mjere kutova trokuta su u omjeru 3 : 5 : 4. Najdulja stranica tog trokuta je duljine 15 cm. Kolika je duljina najkraće stranice tog trokuta?

6. Istraživanje koje uspoređuje dvije metode proučavanja trigonometrije

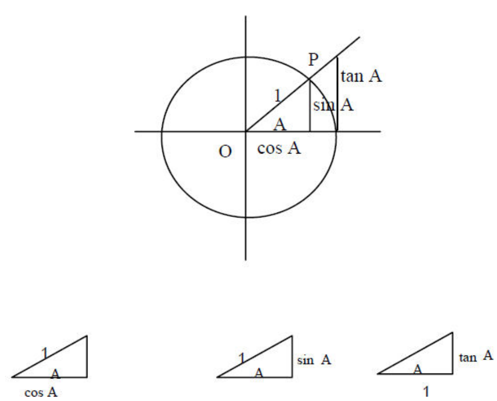
Trigonometriju smo prvo proučavali pomoću pravokutnog trokuta, primjenjujući metodu omjera. Drugi pristup trigonometriji odnosi se na metodu brojevne, odnosno jedinične kružnice. Margaret Kendal i Kaye Stacey provode istraživanje na učenicima, s ciljem utvrđivanja koja metoda bolje promiče razumijevanje temeljnih pojmova i svladavanje vještina vezanih za trigonometriju. Cijelo istraživanje Kendal i Kaye opisale su u jednom članku kojeg ćemo obraditi u ovom radu. Da ne bi bilo zabune, autorice se ne pitaju na koji način učenici trebaju znati definirati trigonometrijske funkcije, već koju metodu koristiti da bismo predstavili trigonometriju, a učenici bi trebali znati na oba načina definirati funkcije.

Nasumično je podijeljeno osam razrednih odijeljenja u dvije grupe, jedna grupa je poučavana metodom omjera, a druga metodom brojevne kružnice. Na temelju uobičajnog testa koji se provodio u svakom razredu prije pokusa, zaključeno je da se u obje grupe nalaze učenici sličnih sposobnosti. Napravile su se pripreme za svaku od metoda, a nastavnike se uputilo u metode i strategije učenja. Vježbe koje su učenici pohađali su bile identične, ali u drugačijem redoslijedu kako bi se uklopile u odgovarajuću metodu poučavanja. Dvadeset 45 - minutnih predavanja su posvećena ovom poučavanju, a provedena su dva testa prije i nakon poučavanja. Prvim testom utvrđivala se razina određenih algebarskih i arimetičkih vještina, a drugi test bio je iz trigonometrije i sadržavao dvanaest pitanja. Svako to pitanje je tražilo izračun (označene) nepoznate duljine stranice pravokutnog trokuta. Nakon 6 tjedana dana su 4 slična pitanja u sklopu ispita na kraju godine. Svakom pitanju iz trigonometrije dodijeljeno je tri ocjene: jedna za prepoznavanje trigonometrijske funkcije, jedna za točnu formulaciju i prilagodbu jednadžbe koju treba riješiti, jedna za točan izračun. Dakle, svaki učenik je mogao dobiti najviše 36 bodova. Razočaravajuće je da je na inicijalnom testu, koji je dan bez najave, od ukupnog broja učenika, samo njih četvero imalo više od 0 bodova.

Rezultati su pokazali kako je bolji uspjeh postigla ona grupa koja je poučavana metodom omjera. Ne samo da su imali znatno veći prosjek od učenika metode kružnice, već su i na godišnjim ispitima postigli bolje rezultate. Najslabija grupa metode omjera bila je bolja od prosječne grupe koja je radila metodu brojevne kružnice. Kada je riječ o odabiru ispravne funkcije, učenici metode omjera prepoznali su prosječno 11.08 od 12 funkcija ispravno, sa srednjim rezultatom 12. Istovremeno, veliki broj učenika koji su poučavani metodi jedinične kružnice nije prepoznao trigonometrijske funkcije. Zaključuje se da je metoda omjera jednostavnija. Za nju učenici trebaju prepoznati nepoznate strane trokuta pa odabrati ispravnu funkciju. Nasuprot tome, kod metode brojevne kružnice učenik si mora re-orijenirati dan trokut, ako je potrebno prisjetiti se slike jedinične kružnice i prepoznati koji pravokutni trokut odgovara re-orijentiranom trokutu. Otprilike trećina studenata ne može si namjestiti trokuta, a gotova polovina njih ne može nacrati odgovarajuće pravokutne trokute. Pravokutni trokut za tangens je bio najteži. Jednadžba se smatra ispravno oblikovanom ako je točno zapisana ili ako je student pravilno izrekne. Primjer u kojem treba odrediti duljinu stranice nasuprot zadanom kutu koji iznosi 20 stupnjeva ako je poznata duljina hipotenuze točno je riješilo 94% učenika metode omjera i 68% metode brojevne kružnice. Zadatci u kojima treba odrediti hipotenuzu ako je dan sinus kuta i kateta bili su teži te je uspješnost bila 77% za učenike omjera i 38% za učenike jedinične kružnice. Učenici slabijih sposobnosti koji su koristi metodu omjera bili su posebno uspješni. Rezultati su očito pokazali da metoda omjera pruža svim učenicima, a posebno onim slabijim, učinkovit način svladavanja teškoća vezanih za rješavanje jednadžbi. U isto vrijeme u kojem su dani testovi, učenici su zamoljeni da izraze svoj stav prema trigonometriji ocjenama 1 do 5. Učenici metode omjera su imali značno pozitivniji stav od učenika jedinične kružnice, na svakoj razini sposobnosti.

Ovo istraživanje dalo je čvrsti dokaz da metodom omjera učenici bolje svladavaju potrebne vještine za rješavanje trigonometrije. Također je pokazano da metoda poučavanja, ne nastavnik, ima dominantan efekt. Najviše koristi od metode omjera imali su učenici slabijih matematičkih spososobnosti. Za kraj ovog članka, autorice su navele kako smatraju kako bi se osnovna trigonometrija trebala uvesti definicijom trigonometrijskih funkcija pomoću jedinične kružnice (u više kvadranata od 1.) i povezati sa definicijama metode omjera.

Ukoliko malo zastanemo i razmislimo na koji način je trigonometrija prikazana u udžbenicima koje smo proučavali, zaključujemo da se metode omjera i metode jedinične kružnice povezuju na početku trećeg razreda srednjoškolskog obrazovanja, pojašnjavajući osnovne definicije pomoću Slike 34. No, koliko zapravo koristimo brojevnu kružnicu u daljnim zadatcima koje riješavamo? Vrlo malo, jer učenici na raspolaganju imaju tablicu trigonometrijskih vrijednosti, ili pak kružnicu s danim trigonometrijskim vrijednostima iz čega mogu iščitati sve što im je potrebno. Naravno da je jednostavnije u pravokutnom trokutu primjeniti metodu omjera. Sve u svemu, niti u jednom proučavanom udžbeniku se ne pojavljuje primjer koji je naveden u ovom članku (Slika 59), tako da veliki broj naših učenika vjerojatno nema viziju na koji način bi riješili takav primjer koristeći brojevnu kružnicu. Ovdje dolazimo do pitanja je li, općenito, matematika samo aritmetika i algebra ili ipak nešto više od toga. Kada izađemo iz osnovne škole naša vizija matematike su brojevi, izračuni i zadatci riječima, a oni se ubrajaju pod složenije zadatke. U srednjoj školi, kada je riječ o trigonometriji, učenike poučavamo kako primijeniti trigonometriju u velikom broju različitih tipova zadataka. Prvo ih upoznajemo s trigonometrijom pravokutnog trokuta, njenom primjenom na raznim geometrijskih likovima ili tijelima. Zatim, sljedeće školske godine, ponovo definiramo trigonometrijske funkcije na brojevnoj kružnici te objašnjavamo jako puno novih pojmova iz ovog dijela gradiva. Ako nam trigonometrija nije bila jasna u drugom razredu, hoće li se to promijeniti u trećem razredu gdje se broj izračuna znatno povećava i traži se povezivanja svega do sada naučenog iz ovog područja?



Slika 59: Definicija trigonometrijskih funkcija pomoću jedinične kružnice na temelju kuta A i pravokutnih trokuta

Literatura

[1] N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec, *Udžbenik za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Udžbenik i zbirka zadataka za 2.razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2007.

[3] S. Đelatović, *Trigonometrijske funkcije i neki trigonometrijski identiteti*, Diplomski rad, Osijek, 2012.

[4] Lj. Kelava-Račić, Z. Šikić, *Udžbenik za 2.razred četverogodišnje strukovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[5] M. Kendal, K. Stacey, *Teaching trigonometry*, Vinculum, **34**(1),4–8, 1997.

[6] Đ. Kurepa, F. Hrabak, L. Rajčić, *Geometrija za drugi razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[7] Đ. Kurepa, S. Škreblin, *Trigonometrija za više razrede gimnazije*, Školska i pedagoška izdanja Nakladnog zavoda Hrvatske, Zagreb, 1946.

[8] S. Varošanec, *Udžbenik i zbirka zadataka za 2.razred tehničkih škola*, Element, Zagreb, 2008.

[9] S. Varošanec, *Udžbenik i zbirka zadataka za 3.razred tehničkih škola*, Element, Zagreb, 2009.

[10] http://dokumenti.ncvvo.hr/Drzavna_matura/2012-10-15/vodic_2013.pdf

[11] http://dokumenti.ncvvo.hr/Drzavna_matura/2013-01-11/brosura_ucenici.pdf

[12] http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2246

Sažetak

Samo ime *trigonometrija* riječ je grčkog podrijetla, a nastala je iz riječi *trigonon* - trokut i *metreo* - mjeriti. Možemo ju podijeliti na *ravninsku* (kutovi i udaljenosti u ravnini) i *sfernu* (kutovi i udaljenosti u prostoru). Trigonometrija je nastala pri promatranju neba, mjerenjima zbog navigacije, te rješavanju raznih problema iz zemljomjerstva. Obzirom da se učenici u dva navrata upoznaju s trigonometrijom, proučili smo udžbenike za drugi i treći razred tehničkih i strukovnih škola te udžbenike za gimnazije. Cilj nam je bio proučiti na koji način su se uveli pojmovi trigonometrijskih funkcija i u kolikoj mjeri je zastupljena primjena trigonometrije u planimetriji, stereometriji i svakodnevnom životu u pojedinom udžbeniku. Kao i sve u životu, svaki udžbenik ima svoje prednosti i nedostatke, što je i istaknuto u ovom radu. Obzirom da se u današnje vrijeme uz pojam *matematike* nadovezuje pojam *državne mature*, dali smo kratak osvrt trigonometrije na državnoj maturi. U zadnjem poglavlju proučavamo članak u kojem se opisuje istraživanje provedeno na skupini učenika koje za cilj ima utvrditi koja metoda, metoda omjera ili metoda brojevne kružnice, bolje promiče razumijevanje temeljnih pojmova i svladavanje vještina vezanih za trigonometriju.

Summary

The word *trigonometry* originated from the Greek language, after the words *trigonon* – triangle, and *metreo* – to measure. It can be divided into two types: *planar* (angles and distances in the plane) and *spherical* (angles and distances in space). Trigonometry was formed while observing the sky, performing navigational measurements, and solving various problems from the surveying. We have studied the textbooks for the second and third grade of technical and vocational schools and textbooks for high schools, considering that students are twice introduced to trigonometry. Our goal was to examine in what way the concepts of trigonometric functions were introduced and how great is the application of trigonometry in planimetry, stereometry and everyday life in a particular textbook. Like everything in life, every textbook has its advantages and disadvantages, which is highlighted in this paper. Since the term *mathematics* is nowdays associated with the term *state graduation*, we gave a brief overview of trigonometry on the state graduation exam. In the last chapter we have studied the article which deals with research conducted on a group of pupils that aims to identify which method (ratio method or unit circle method) provides better understanding of fundamental trigonometric concepts and mastering trigonometric skills.

Životopis

Anela Bocor rođena je 23. listopada 1988. godine u Našicama, gdje je završila Osnovnu školu "Dora Pejačević". 2003. godine upisuje srednju školu "Ugostiteljsko - turistička škola" u Osijeku, smjer hotelijersko - turistički tehničar. Srednju školu završava 2007. godine i uspisuje "Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike" na Odjelu za matematiku u Osijeku.