

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Ivana Brkić  
Fraktalno Brownovo gibanje

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Ivana Brkić  
Fraktalno Brownovo gibanje

Diplomski rad

Voditelj: doc.dr.sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2018.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teorija vjerojatnosti</b>	<b>4</b>
2.1	Prostor elementarnih događaja i definicija vjerojatnosti . . . . .	4
2.2	Slučajna varijabla . . . . .	5
2.3	Brownovo gibanje . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Fraktali</b>	<b>13</b>
3.1	Konstrukcija fraktala i Hausdorffova dimenzija . . . . .	13
3.2	Primjeri fraktala . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Fraktalno Brownovo gibanje</b>	<b>21</b>
4.1	Karakteristike Brownovog gibanja . . . . .	21
4.2	Fraktalno Brownovo gibanje . . . . .	25
4.3	Svojstva fraktalnog Brownovog gibanja . . . . .	27
4.4	Stabilni procesi . . . . .	29
4.5	Brownove površine . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Fraktalna priroda tržišta</b>	<b>31</b>
5.1	Mandelbrotova analiza cijena pamuka . . . . .	31
5.2	Multifraktali . . . . .	32
5.3	Multifraktalno vrijeme . . . . .	34
5.4	Multifraktalan model . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Sažetak</b>	<b>38</b>
<b>7</b>	<b>Abstract</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Životopis</b>	<b>40</b>

# Poglavlje 1

## Uvod

Glavna motivacija za uvođenje pojma Brownovo gibanje je nasumično gibanje čestica fluida. Škotski botaničar Robert Brown je 1820. godine otkrio da se čestice peluda raspršene u tekućini neprekidno nasumično gibaju. Po njemu je ta pojava i dobila naziv Brownovo gibanje. U statistici, Brownovo gibanje definiramo kao slučajan proces  $\mathcal{X}$ , za koji vrijedi da je s vjerojatnošću 1  $X(0) = 0$  te ima nezavisne i normalno distribuirane priraste.

Pionir fraktalne geometrije je poljsko-američki matematičar B. Mandelbrot koji je razvio granu matematike koja proučava neregularne i fragmentirane uzorke, odnosno fraktale. Mandelbrot je fraktal definirao kao skup za koji Hausdorffova dimenzija strogo prelazi topološku. Možemo uočiti da graf Brownovog gibanja ima fraktalnu strukturu. Osim fraktalne dimenzije, fraktali imaju svojstvo samosličnosti, odnosno kod svakog povećanja postoji dio objekta koji je sličan cjelini. Mandelbrot je 1982. objavio svoju poznatu knjigu *The fractal geometry of nature* [11] u kojoj nas uvodi u svijet fraktala, fraktalne dimenzije, fraktalnog Brownovog gibanja i dr.

Brownovo gibanje je proces koji je vrlo značajan za modeliranje velikog niza pojava. Kod onih pojava gdje vjerojatnost ekstremnih događaja nije zanemariva, Brownovo gibanje više nije pogodno. Stoga postoje dvije njegove varijacije, a to su stabilni procesi i fraktalno Brownovo gibanje. Glavni cilj ovog rada je definirati i analizirati fraktalno Brownovo gibanje, njegova svojstva i primjenu.

U prvom poglavlju proučavamo osnovne pojmove teorije vjerojatnosti koje nam služe kao pozadina za razumijevanje rada. Potom definiramo Brownovo gibanje te dokazujemo njegovo postojanje. Kako je Brownovo gibanje važan primjer martingala, navodimo i definiciju martingala te pokazujemo da je Brownovo gibanje zaista martingal.

U drugom poglavlju se upoznajemo s fraktalima. Osim što ih definiramo, pokazat ćemo da su njihova osnovna svojstva fraktalna dimenzija te samosličnost. Navodimo nekoliko primjera fraktala i slikovitim prikazom prikazujemo kako nastaju i izgledaju.

U trećem poglavlju definiramo fraktalno Brownovo gibanje, pokazujemo njegova osnovna svojstva te proučavamo stabilne procese. Spominjemo i fraktalne Brownove površine koje se koriste za kreiranje računalno generiranih krajolika te pokazujemo dva takva primjera.

U četvrtom poglavlju primjenjujemo koncepte prethodnih poglavlja na financijsko tržište, odnosno proučavamo primjenu fraktalnog Brownovog gibanja. Kako bi pokazali da je priroda tržišta fraktalna dajemo Mandelbrotovu analizu cijene pamuka. On je 1963. godine uočio da kretanje cijena pamuka ne prati normalnu distribuciju i da su pokazali veliku frekvenciju ekstremnih varijacija. Pojasnit ćemo pojam multifraktala, multifraktalnog vremena, i to preko teorema kojeg Mandelbrot naziva "The baby theorem".

# Poglavlje 2

## Teorija vjerojatnosti

### 2.1 Prostor elementarnih događaja i definicija vjerojatnosti

Uvedimo prvo osnovne pojmove teorije vjerojatnosti koje su nam potrebne za razumijevanje rada. Kao temeljni objekt teorije vjerojatnosti definiramo neprazan skup  $\Omega$  koji zovemo *prostor elementarnih događaja*. Taj skup predstavlja sve ishode nekog slučajnog pokusa te ćemo njegove elemente zvati *elementarni događaji*. Definirat ćemo dovoljno bogatu familiju podskupova od  $\Omega$  koja će biti temelj definicije vjerojatnosti. Takvu familiju podskupova od  $\Omega$  zovemo *familijom događaja* i označavamo s  $F$ . Sljedećom definicijom su dani zahtjevi koje familija  $F$  mora ispunjavati.

**Definicija 1.** *Neka je dan neprazan skup  $\Omega$ . Familija  $F$  podskupova skupa  $\Omega$  jest  $\sigma$ -algebra skupova na  $\Omega$  ako vrijedi:*

(i)  $\emptyset \in F$ ,

(ii) ako je  $A \in F$ , onda je i  $A^c \in F$ ,

(iii) ako je dana prebrojiva familija skupova  $A_n \subseteq F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , onda  $F$  sadrži i njihovu uniju,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F.$$

Postoje dvije trivijalne  $\sigma$ -algebre na  $\Omega$ . Najmanja je ona koja se sastoji od samo dva elementa, tj.  $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Najveća je ona koja sadrži sve podskupove skupa  $\Omega$ , tj. partitivni skup od  $\Omega$  u oznaci  $P(\Omega)$ . Vrijedi spomenuti da za neki skup  $S$  vrijedi:  $|P(S)| = 2^n$ , gdje je  $n$  broj elemenata od  $S$ .

**Definicija 2.** *Neka je  $F$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Uređeni par  $(\Omega, F)$  prostora elementarnih događaja zove se **izmjerivi prostor**.*

Definirajmo sada vjerojatnost na odabranoj familiji događaja.

**Definicija 3.** *Funkcija  $P: F \rightarrow \mathbb{R}$  definirana na  $\sigma$ -algebri  $F$  skupa elementarnih događaja  $\Omega$  je vjerojatnost na  $\Omega$  ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

(i) *Nenegativnost vjerojatnosti:*  $P(A) \geq 0, \forall A \in F$ .

(ii) *Normiranost vjerojatnosti:*  $P(\Omega) = 1$ .

(iii)  $\sigma$ -aditivnost vjerojatnosti: Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktih skupova  $(A_i, i \in I) \subseteq F$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$ , odnosno  $A_i \cap A_j = \emptyset$  za  $i \neq j$ , tada je  $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ .

**Definicija 4.** Neka je  $\Omega$  neprazan skup,  $F$   $\sigma$ -algebra događaja na njemu, a  $P$  vjerojatnost na  $\Omega$ . Uređenu trojku  $(\Omega, F, P)$  zovemo vjerojatnosni prostor.

Navedimo sada neka svojstva vjerojatnosti.

(i) Vjerojatnost suprotnog događaja.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor i  $A \in F$  događaj. Komplement događaja  $A$  je njemu suprotan događaj te vrijedi  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

(ii) Vjerojatnost praznog skupa.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor. Tada je  $P(\emptyset) = 0$ .

(iii) Monotonost vjerojatnosti.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor te neka su  $A, B \in F$  takvi da je  $A \subseteq B$ . Tada vrijedi  $P(A) \leq P(B)$ .

(iv) Vjerojatnost unije događaja.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor te neka su  $A, B \in F$ . Tada je  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

(v)  $\sigma$ -subaditivnost vjerojatnosti.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor te neka je  $(A_i, i \in I) \subseteq F$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$  prebrojiva familija događaja tog prostora. Tada vrijedi  $P(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} P(A_i)$ .

(vi) Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor te neka je  $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq F$  rastuća familija događaja, odnosno vrijedi  $A_n \in F$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  te  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \dots$  i vrijedi  $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .

(vii) Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor i  $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq F$  padajuća familija događaja, odnosno  $A_n \in F$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  te  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \dots$ ; tada vrijedi  $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .

## 2.2 Slučajna varijabla

U prethodnom poglavlju smo uveli pojam vjerojatnosnog prostora koji je osnovni objekt u teoriji vjerojatnosti. Upoznajmo se s vjerojatnosnim prostorom čiji je prostor elementarnih događaja  $\Omega$  konačan skup.

Neka je  $\Omega$  konačan prostor elementarnih događaja. Takve skupove ćemo označiti kao:  $\Omega = \{\Omega_i : i \in I_\Omega\}$ ,  $I_\Omega \subseteq \mathbb{N}$ ,  $I_\Omega$  nam označava skup indeksa. U ovom slučaju je dovoljno promatrati vjerojatnosti koje su definirane na partitivnom skupu  $P(\Omega)$ .

Vjerojatnosni prostor kod kojega je  $\Omega$  konačan skup, a pridružena  $\sigma$ -algebra  $P(\Omega)$ , ćemo zvati *diskretan vjerojatnosni prostor*. Na tako zadanom prostoru možemo za svaki pojedini  $\omega_i \in \Omega$  izračunati vjerojatnost  $p_i = P(\{\omega_i\})$ . Sada ako iskoristimo navedeno svojstvo  $\sigma$ -aditivnosti, pomoću tako dobivenog niza  $(p_i, i \in I_\Omega)$ ,  $I_\Omega \subseteq \mathbb{N}$  možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja  $A = \{\omega_i : i \in I_A\}$ , gdje je  $I_A \subseteq I_\Omega$  skup indeksa elemenata od  $A$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} p_i.$$

Uočimo još da niz  $(p_i, i \in I_\Omega)$  ima svojstva:

$$(i) \ p_i \geq 0, \text{ za sve } i \in I_\Omega, \quad (1)$$

$$(ii) \ \sum_{i \in I_\Omega} p_i = 1. \quad (2)$$

Sada možemo reći da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Neka je s  $(p_i, i \in I)$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$  zadan niz realnih brojeva sa svojstvima (1)-(2) te neka je  $\Omega$  bilo koji skup koji ima  $k(I)$  elemenata. Tada je izrazom

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i, \ A \subseteq \Omega,$$

gdje je  $I_A$  skup indeksa elemenata iz  $\Omega$  koji pripadaju skupu  $A$ , dobro definirana *vjerojatnost* na  $(\Omega, P(\Omega))$ .

Prostor elementarnih događaja također može sadržavati neki interval pa ćemo sada definirati vjerojatnost na takvom vjerojatnosnom prostoru.

Neka je  $f$  realna funkcija,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da vrijedi:

$$(i) \ f(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Nadalje neka je  $B$  najmanja  $\sigma$ -algebra podskupova od  $\mathbb{R}$  koja sadrži sve intervale. Tada je vjerojatnost dana izrazom

$$P(A) = \int_A f(x) dx, \ A \in B.$$

Sada možemo definirati slučajnu varijablu na diskretnom te potom na neprekidnom prostoru.

**Definicija 5.** *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, P(\Omega), P)$ . Svaku funkciju  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zvat ćemo diskretna slučajna varijabla.*

Skup svih vrijednosti koje može poprimiti diskretna slučajna varijabla  $X$  ćemo označiti kao  $R(X) = \{x_i, i \in I\}$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$ , a pripadne vjerojatnosri nizom brojeva  $(p_i, i \in I)$  tako da vrijedi

$$p_i = p(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = P\{X = x_i\}, \ i \in I.$$



Slučajnu varijablu  $X$  možemo prikazati u obliku tablice koju nazivamo zakon razdiobe, tablica distribucije ili jednostavno *distribucija slučajne varijable  $X$* , a zapisujemo je na sljedeći način

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

**Definicija 6.** Neka je dan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  i funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi sljedeće:

(i)  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in F$ , za svaki  $x \in \mathbb{R}$ ,

(ii) postoji nenegativna realna funkcija realne varijable takva da je

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju  $X$  zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla na skupu  $\Omega$ , a funkciju  $f$  zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti od  $X$ .

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable ima sljedeća svojstva:

(i) Nenegativnost:  $f(x) \geq 0$ , za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Normiranost:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

(iii) Neka je  $f$  funkcija gustoće slučajne varijable  $X$ . Vjerojatnost da  $X$  primi vrijednosti iz intervala  $(a, b]$  jednak je

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \in (a, b]\} = \int_a^b f(x)dx.$$

**Definicija 7.** Neka je dan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  te  $X$  neka slučajna varijabla. Funkciju  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  za koju je

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\},$$

odnosno koja realnom broju  $x$  pridružuje vjerojatnost da slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju zovemo funkcija distribucije slučajne varijable  $X$ .

**Definicija 8.** Neka je dan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  i  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  Borelova  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{R}$ . Funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi da je  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} = X^{-1}(B) \in F$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  zove se slučajna varijabla na  $\Omega$ .

Pojam slučajne varijable možemo generalizirati i na  $\mathbb{R}^n$  i tako dolazimo do definicije slučajnog vektora.

**Definicija 9.** Neka je dan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  i  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Kažemo da je  $X$   $n$ -dimenzionalni slučajni vektor (na  $\Omega$ ) ako vrijedi:  $X^{-1}(B) \in F$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Definirajmo još i osnovno numeričko svojstvo slučajne varijable, a to je matematičko očekivanje.

**Definicija 10.** Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor  $(\Omega, P(\Omega), P)$  i  $X$  neka slučajna varijabla na njemu. Ako red  $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\}$  apsolutno konvergira, tada slučajna varijabla  $X$  ima matematičko očekivanje, a broj

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\}$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable  $X$ .

**Definicija 11.** Neka je dana neprekidna slučajna varijabla  $X$  te  $f$  njena funkcija gustoće. Ako je integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$$

konačan, onda slučajna varijabla  $X$  ima matematičko očekivanje te pišemo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

## 2.3 Brownovo gibanje

Prije nego što definiramo i dokažemo postojanje Brownovog gibanja navesti ćemo pojmove koji će nam u tome koristiti.

U teoriji vjerojatnosti izravan rad s funkcijama distribucije izbjegavamo korištenjem odgovarajućih karakterističnih funkcija što nam omogućava da se prilikom rješavanja problema vezanih za funkcije distribucije koristimo svojstvima karakterističnih funkcija. Navedimo sada njenu definiciju.

**Definicija 12.** Karakteristična funkcija slučajne varijable  $X$ , odnosno njezine funkcije distribucije  $F_X$ , je funkcija  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definirana na sljedeći način

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)dF_X(x), t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki  $t \in \mathbb{R}$  funkcija  $x \mapsto e^{itx}$  je neprekidna i budući da je  $|e^{itx}| = 1$ ,  $\varphi_X$  je dobro definirana, odnosno imamo  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Vrijedi

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_X(x) = E[e^{itx}], t \in \mathbb{R}.$$

Ako je  $X$  diskretna slučajna varijabla sa zakonom razdiobe  $P\{X = x_k\} = p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , onda slijedi

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{itx_k}p_k, t \in \mathbb{R}.$$

Ako je  $X$  neprekidna slučajna varijabla s gustoćom  $f_X$ , onda vrijedi

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f_X(x), t \in \mathbb{R}.$$

Sada ćemo iskazati teorem koji nam pokazuje kako se funkcija distribucije, ili u specijalnom slučaju gustoća, mogu eksplicitno prikazati pomoću svoje karakteristične funkcije.

**Teorem 13. Teorem inverzije**

(i) Ako je  $\varphi_X$  karakteristična funkcija od  $F_X$  te ako su  $a, b$  proizvoljne točke neprekidnosti od  $F$  takve da je  $a < b$ , onda vrijedi

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

(ii) Ako je  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty$ , onda funkcija distribucije  $F$  ima gustoću  $f$ , odnosno

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \text{ za sve } x \text{ i vrijedi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_X(t) dt.$$

Sljedeći nam teorem daje karakterizaciju nezavisnosti pomoću karakterističnih funkcija.

**Teorem 14.** Slučajne varijable  $X_1, \dots, X_n$  su nezavisne ako i samo ako vrijedi

$$\varphi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k), \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Navedimo sada definiciju slučajnog procesa.

**Definicija 15.** Pod pojmom slučajan proces smatramo familiju slučajnih varijabli  $(X_t, t \in T_0)$  na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, F, P)$ , gdje je  $T_0 \subseteq \mathbb{R}$ .

Od posebnog interesa su sljedeća dva skupa koja su vezana uz slučajan proces  $(X_t, t \in T_0)$ :

- (i) Skup stanja: Skup svih mogućih vrijednosti slučajnih varijabli  $X_t$ , označimo ga sa  $S \subseteq \mathbb{R}$ .
- (ii) Skup indeksa: Elemente skupa indeksa  $T_0 \subseteq \mathbb{R}$  razmatramo kao vremenske trenutke i interpretiramo kao vrijeme.

Za proizvoljan konačan podskup  $\{t_1, \dots, t_n\}$  od  $T$  neka je  $F_{t_1, \dots, t_n}$  funkcija distribucije slučajnog vektora  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Familija  $\{F_{t_1, \dots, t_n}\}$  svih takvih funkcija distribucije je familija konačnodimenzionalnih distribucija slučajnog procesa. Izreći ćemo još teorem koji kaže da svaka suglasna familija funkcija distribucije je familija konačno dimenzionalnih distribucija barem jednog slučajnog procesa. Navedimo prvo uvjete uz koje je familija funkcija distribucije suglasna.

**Definicija 16.** Za  $n \in \mathbb{N}$  i  $t_1, \dots, t_n \in T$  neka je  $F_{t_1, \dots, t_n}$   $n$ -dimenzionalna funkcija distribucije. Familija  $\{F_{t_1, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T\}$  je suglasna ako vrijede sljedeći uvjeti:

(i) Za proizvoljnu permutaciju  $(i_1, \dots, i_n)$  od  $(1, \dots, n)$  vrijedi

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) Za sve  $m < n$  vrijedi

$$F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty).$$

**Teorem 17.** *Neka je  $T = \mathbb{R}$ , ili je  $T$  interval na  $\mathbb{R}$ , te neka je  $\{F_{t_1, \dots, t_n}\}$  zadana suglasna familija funkcija distribucije. Tada je  $\{F_{t_1, \dots, t_n}\}$  familija konačnodimenzionalnih distribucija barem jednog slučajnog procesa.*

Sada ćemo definirati Brownovo gibanje te uz pomoć prethodno navedenih pojmova i teorema dokazati njegovo postojanje.

**Definicija 18.** *Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor. Brownovo gibanje je slučajan proces  $\mathcal{X} = \{X(t), t \geq 0\}$  koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

- (i)  $P\{X(0) = 0\} = 1$ .
- (ii)  $\mathcal{X}$  ima nezavisne priraste, tj. za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i sva vremena  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$  takva da je  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  vrijedi da su prirasti  $(X(t_1) - X(t_0), (X(t_2) - X(t_1), \dots, (X(t_n) - X(t_{n-1})))$  međusobno nezavisni.
- (iii) Za svaki  $t \geq 0$  i za svaki  $h > 0$  prirast  $(X(t+h) - X(t))$  je normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom  $h$ , tj.  $(X(t+h) - X(t)) \sim \mathcal{N}(0, h)$ .

Dakle, možemo reći da je Brownovo gibanje slučajan proces koji kreće iz 0 te ima nezavisne i normalno distribuirane priraste. Pokažimo da takav proces zaista postoji.

**Teorem 19.** *Postoji vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  i slučajn proces  $\mathcal{X} = \{X(t), t \geq 0\}$  definiran na njemu, koji je Brownovo gibanje za dano  $\sigma^2 > 0$ .*

**Dokaz.** *Neka je  $n \in \mathbb{N}$  proizvoljan i neka su  $t_0, t_1, \dots, t_n$  proizvoljni realni brojevi takvi da je  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ . Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne slučajne varijable (definirane na nekom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega', F', P')$ ) takve da je  $X_t \sim \mathcal{N}(0, (t_j - t_{j-1})\sigma^2)$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Za svako  $n$  i  $t_0, t_1, \dots, t_n$  definirajmo sljedeće funkcije*

$$F_{t_0}(X) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < 0 \\ 1, & \text{ako je } x \geq 0, \end{cases}$$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{S_j \leq x_j\}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right),$$

gdje je  $S_j = X_1 + \dots + X_j$ , za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Vrijedi da je  $S_j \sim \mathcal{N}(0, t_j\sigma^2)$ . Neka je sada  $\mathcal{X}$  familija svih funkcija  $\{F_{t_0, \dots, t_n}\}$  dobivenih za ovako sve  $n \in \mathbb{N}$  i sve  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  takve da je  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ . Sada nam slijedi iz teorema 17 da postoje vjerojatnosni prostor  $(\Omega, F, P)$  i slučajan proces  $\mathcal{X} = \{X(t), t \geq 0\}$  definiran na njemu, takvi da za sve  $F_{t_1, \dots, t_n} \in \mathcal{X}$  vrijedi

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq x_j\}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right).$$

Dokazat ćemo da je  $X(t)$  Brownovo gibanje. Prvi uvjet iz definicije je očigledno ispunjen.

Da bi dokazali drugi uvjet iz definicije ćemo staviti  $Y_j = X(t_j) - X(t_{j-1})$ , za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne slučajne varijable (definirane na nekom drugom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega', F', P')$ ) takve da je  $X_t \sim \mathcal{N}(0, (t_j - t_{j-1})\sigma^2)$  za  $j = 1, 2, \dots, n$ . Neka je sada  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$  karakteristična funkcija slučajnog vektora  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ .

Tada za  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$\begin{aligned} E[\exp(i \sum_{j=1}^n x_j Y_j)] &= \\ &= E\{\exp[i((x_1 - x_2)X(t_1) + (x_2 - x_3)X(t_2) + \dots + (x_{n-1} - x_n)X(t_{n-1}) + x_n X(t_n))]\} \\ &= \varphi_{t_1, \dots, t_n}(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n). \end{aligned}$$

Nadalje, obzirom da  $(S_1, \dots, S_n)$  i  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  imaju jednake funkcije distribucije imamo

$$\begin{aligned} E[X] &= E\{\exp[i((x_1 - x_2)X_1 + (x_2 - x_3)(X_1 + X_2) + \dots + (x_{n-1} - x_n)(X_1 + \dots + X_{n-1}) + x_n(X_1 + \dots + X_n))]\} \\ &= E[\exp(i(x_1 X_1 + x_2 X_2) + \dots + x_n X_n)]. \end{aligned}$$

Budući da su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne slijedi

$$E[\exp(i \sum_{j=1}^n x_j Y_j)] = \prod_{j=1}^n E[\exp(i x_j X_j)].$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} E[\exp(i x_j X_j)] &= E\{\exp[i(x_j(X_1 + \dots + X_j) - x_j(X_1 + \dots + X_{j-1}))]\} \\ &= \varphi_{t_1, \dots, t_n}(0, \dots, 0, -x_j, x_j, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

gdje se  $-x_j$  pojavljuje na  $(j - 1)$ -voj koordinati.

Zaključujemo

$$\begin{aligned} E[\exp(i x_j X_j)] &= \varphi_{t_{(j-1)}, t_j}(-x_j, x_j) = \varphi_{Y_j}(x_j). \\ E[\exp(i \sum_{j=1}^n x_j Y_j)] &= \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(x_j), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

pa na osnovi teorema 14 možemo zaključiti da su  $Y_1, \dots, Y_n$  nezavisne, odnosno vrijedi drugo svojstvo.

Da bi dokazali i treće svojstvo iz definicije primjetimo da vrijedi

$$\varphi_{Y_j}(x_j) = \varphi_{t_{j-1}, t_j}(-x_j, x_j) = \varphi_{S_{j-1}, S_j}(-x_j, x_j) = \varphi_{X_j}(x_j).$$

Iz teorema inverzije 13 slijedi  $Y_j \sim \mathcal{N}(0, (t_j - t_{j-1})\sigma^2)$ , odnosno vrijedi i treće svojstvo definicije Brownovog gibanja.  $\square$

Brownovo gibanje je važan primjer martingala te ćemo sada navesti definiciju *martingala* i dokazati da je Brownovo gibanje zaista martingal. Prvo definirajmo što je to filtracija te kada kažemo da je neki slučajni proces adaptiran na svoju filtraciju.

**Definicija 20.** *Familija  $(F_t, t \geq 0)$   $\sigma$ -algebri na  $\Omega$  zovemo filtracija ako vrijedi  $F_s \subset F_t, \forall s \in [0, t)$ .*

**Definicija 21.** Za slučajan proces  $(X_t, t \geq 0)$  kažemo da je adaptiran na filtraciju  $(F_t, t \geq 0)$  ako je  $\sigma(X_t) \subset F_t, \forall t \geq 0$ , tj. ako je  $X_t$   $F_t$ -izmjeriva slučajna varijabla.

Neka je  $(\Omega, F, P)$  vjerojatnosni prostor i  $(T, <)$  parcijalno uređen skup. Nadalje, neka je  $F_t$  filtracija na  $\Omega$ .

**Definicija 22.** Kažemo da je slučajan proces  $M = (M_t, t \in T)$  martingal u odnosu na filtraciju  $(F_t, t \geq 0)$  ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- (i)  $E[|M_t|] \leq \infty$ ,
- (ii)  $M$  je adaptiran na filtraciju  $F_t$ , odnosno  $\sigma(M_t) \subset F_t, \forall t \geq 0$ ,
- (iii)  $E[M_t | F_s] = M_s, \forall s \in [0, t)$ .

Za  $M$  kažemo da je *submartingal* ako u zadnjem svojstvu prethodne definicije stoji nejednakost " $\geq$ ", a ako umjesto " $=$ " stoji " $\leq$ " kažemo da je *supermartingal*.

**Teorem 23.** Brownovo gibanje  $(X_t, t \geq 0)$  je martingal (s obzirom na filtraciju za to Brownovo gibanje).

**Dokaz.** Neka je  $(X_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje te  $(F_t, t \geq 0)$  pripadna filtracija. Pokažimo da je ono martingal tako što ćemo pokazati da za njega vrijede svi uvjeti iz definicije martingala.

- (i) Prvo svojstvo Brownovog gibanja je očito, odnosno zaista vrijedi da je  $E[|X_t|] \leq \infty$ , jer je  $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ .
- (ii) Brownovo gibanje jest adaptirano na svoju prirodnu filtraciju  $(F_t, t \geq 0)$ , gdje je  $F_t = \sigma(\{X_s : 0 \leq s \leq t\})$
- (iii)  $E[X_t | F_s] = E[X_t - X_s | F_s] + E[X_s | F_s] = E[X_t - X_s] + X_s = E[X_{t-s}] + X_s = X_s$ .

□

# Poglavlje 3

## Fraktali

### 3.1 Konstrukcija fraktala i Hausdorffova dimenzija

Klasična geometrija ne može opisati oblike poput oblaka, krošnje drveta, planine ili obale. Znameniti poljsko-američki matematičar B. Mandelbrot (1924. – 2010.) smatra se pionikom *fraktalne geometrije*. Svoju znamenitu knjigu [11] *The Fractal Geometry of Nature*, B. Mandelbrot započinje riječima "Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu krugovi, lavež nije gladak niti munja putuje ravnom linijom". Ova grana matematike bavi se opisom neregularnih i fragmentiranih uzoraka, koje nazivmo *fraktalima*. Sam pojam fraktal datira iz 1975. godine, a dolazi od latinskog "fractus".

Kako bi proučili matematiku fraktala, moramo spomenuti pojam mjere. Teorija mjere je matematička disciplina koja se bavi proučavanjem duljine, površine i volumena, i to pod zajedničkim nazivom mjera. Mjera je način pripisivanja numeričke veličine nekom skupu.

Reći ćemo da je  $\mu$  mjera na  $\mathbb{R}^n$  ako ona dodjeljuje nenegativan broj svakom podskupu od  $\mathbb{R}^n$  tako da:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , ako je  $A \subset B$ ,
- (iii) Ako su  $A_1, A_2, \dots$  konačni nizovi skupova onda

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad (*)$$

pri čemu jednakost

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad (**)$$

vrijedi ako su  $A_i$  disjunktni Borelovi skupovi. U Borelove skupove ubrajamo otvorene, zatvorene, poluotvorene, neograničene intervale, jednočlane skupove i prebrojive podskupove skupa  $\mathbb{R}$ .

Tada  $\mu(A)$  zovemo mjerom skupa  $A$ , za  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Ako je  $A \subset B$ , onda se  $A$  može izraziti kao disjunktna unija  $A = B \cup (A \setminus B)$ , tako da neposredno iz svojstva (\*\*\*) vrijedi

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Slično, ako je  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  rastući niz Borelovih skupova onda

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Primjetimo da je uz disjunktnu uniju  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$  vrijedi

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Općenito slijedi da, ako su za  $\delta > 0$ ,  $A_\delta$  Borelovi skupovi koji rastu kako se  $\delta$  smanjuje, tj.  $A_{\delta'} \subset A_\delta$  za  $0 < \delta < \delta'$ , onda vrijedi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta > 0} A_\delta\right).$$

Kako bi mogli razumjeti matematičku podlogu fraktala nužno je i poznavanje *Hausdorffove mjere* i dimenzije. U daljnjem tekstu ćemo definirati ove pojmove.

Ako je  $U$  neprazan podskup  $n$ -dimenzionalnog Euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$ , promjer od  $U$  je definiran kao  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , odnosno najveća udaljenost između bilo kojeg para točaka iz  $U$ . Ako je  $\{U_i\}$  konačna kolekcija skupova promjera najviše  $\delta$  koja pokriva  $F$ , tj.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , gdje je  $0 < |U_i| \leq \delta$ , za svaki  $i$ , kažemo da je  $\{U_i\}$   $\delta$ -pokrivač od  $F$ .

Pretpostavimo da je  $F$  podskup od  $\mathbb{R}^n$  i  $s$  je nenegativan broj. Za bilo koji  $\delta > 0$  definiramo

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač od } F\right\}.$$

Možemo pisati

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Ovaj limes postoji za bilo koji podskup  $F$  od  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{H}^s(F)$  zovemo *s-dimenzionalna Hausdorffova mjera* od  $F$ . Posebice,  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ , ako je  $E$  sadržan u  $F$  tada  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ , te ako je  $\{F_i\}$  prebrojiva kolekcija disjunktnih Borelovih skupova, onda je

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Hausdorffova mjera generalizira već poznate ideje duljine, površine ili volumena. Svojstva skaliranja duljine, površine ili volumena su dobro poznata. Na povećanju za faktor  $\lambda$ , duljina dužine je pomnožena s  $\lambda$ , površina je pomnožena s  $\lambda^2$ , a volumen tijela s  $\lambda^3$ . Analogno tome, s-dimenzionalna Hausdorffova mjera skalira se faktorom  $\lambda^s$ . Formaliziranje ovog koncepta vodi do pojma Hausdorffove dimenzije.



**Propozicija 24.** Ako je  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $\lambda > 0$ , onda

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F),$$

gdje je  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ , tj. skup  $F$  skaliran faktorom  $\lambda$ .

**Dokaz.** Ako je  $\{U_i\}$   $\delta$ -pokrivač od  $F$ , onda je  $\{\lambda U_i\}$   $\lambda\delta$ -pokrivač od  $\lambda F$ . Stoga je

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

jer ovo vrijedi za bilo koji  $\delta$ -pokrivač od  $\{U_i\}$ . Ako  $\delta \rightarrow 0$ , onda  $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ . Ako zamijenimo  $\lambda$  sa  $1/\lambda$  te  $F$  sa  $\lambda F$  dobivamo i obratnu nejednakost.  $\square$

Sličan argument daje sljedeću procjenu efekta generalnije transformacije Hausdorffove mjere skupova.

**Propozicija 25.** Neka je  $F \subset \mathbb{R}^n$  i  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  tako da je

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad x, y \in F$$

za konstante  $c > 0, \alpha > 0$ . Tada za svaki  $s$

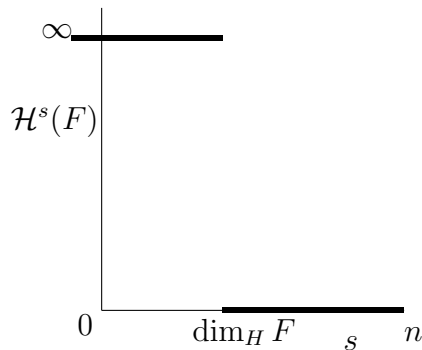
$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

**Dokaz.** Ako je  $\{U_i\}$   $\delta$ -pokrivač od  $F$ , onda, zbog  $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$ , slijedi  $\{f(F \cap U_i)\}$  je  $\epsilon$ -pokrivač od  $f(F)$ , gdje je  $\epsilon = c\delta^\alpha$ . Stoga  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$ , tako da  $\mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Kad  $\delta \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$ , što nam daje našu nejednakost.  $\square$

Ako se vratimo na jednadžbu s početka,  $\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty |U_i|^s : \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrivač od } F\}$ , vidimo da za bilo koji skup  $F$  i  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  ne raste sa  $s$ , pa tako i  $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$  ne raste. Točnije, ako je  $t > s$  i  $U_i$  je  $\delta$ -pokrivač od  $F$  imamo

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s,$$

stoga  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Ako  $\delta \rightarrow 0$  vidimo da, ako  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , onda  $\mathcal{H}^t(F) = 0$ , za  $t > s$ . Stoga graf od  $\mathcal{H}^s(F)$  nasuprot  $s$ , slika 3.1, pokazuje da postoji kritična vrijednost od  $s$  na koju  $\mathcal{H}^s(F)$  skoči s  $\infty$  na 0. Upravo ta kritična vrijednost se naziva *Hausdorffova dimenzija od  $F$* , i pišemo  $\dim_H F$ .



Slika 3.1: Graf od  $\mathcal{H}^s(F)$  nasuprot  $s$ .

Možemo pisati

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

tako da je

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } s < \dim_H F \\ 0, & \text{ako je } s > \dim_H F. \end{cases}$$

Ako je  $s = \dim_H F$ , onda  $\mathcal{H}^s(F)$  može biti nula ili beskonačno, ili može zadovoljavati

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

Borelovi skupovi koji zadovoljavaju zadnji uvjet se nazivaju *s-skupovi*. Npr., neka je  $F$  ravni disk jediničnog promjera u  $\mathbb{R}^3$ . Slijedi da je  $\mathcal{H}^1(F) = \text{duljina}(F) = \infty$ ,  $0 < \mathcal{H}^2(F) = \frac{1}{4}\pi * \text{površina}(F) < \infty$  i  $\mathcal{H}^3(F) = \frac{4}{3}\pi * \text{volumen}(F) = 0$ . Stoga  $\dim_H F = 2$ , uz  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ , ako je  $s < 2$  te  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ , ako je  $s > 2$ .

Navedimo još osnovna svojstva Hausdorffove dimenzije.

- (i) Otvoreni skupovi: Ako je  $F \subset \mathbb{R}^n$  otvoren, onda je  $\dim_H F = n$ , jer  $F$  sadrži kuglu pozitivnog  $n$ -dimenzionalnog volumena.
- (ii) Glatki skupovi: Ako je  $F$  glatka (odnosno neprekidno diferencijabilna)  $m$ -dimenzionalna površina iz  $\mathbb{R}^n$ , onda je  $\dim_H F = m$ . Posebno, glatke krivulje imaju dimenziju 1, a glatke površine dimenziju 2.
- (iii) Monotonost: Ako je  $E \subset F$ , onda je  $\dim_H E \leq \dim_H F$ . Ovo dolazi neposredno iz svojstva mjere da je za svaki  $s$   $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ .
- (iv) Prebrojiva stabilnost: Ako je  $F_1, F_2, \dots$  (prebrojiv) niz skupova, onda je  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$ . Vrijedi svakako da je  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_j$ , za svaki  $j$  iz prethodnog svojstva. S druge strane, ako je  $s > \dim_H F_i$ , za sve  $i$ , onda je  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ , tako da je  $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$  dajući time obratnu nejednakost.
- (v) Prebrojivi skupovi: Ako je  $F$  prebrojiv, onda je  $\dim_H F = 0$ . Ako je  $F_i$  jedna točka,  $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$  i  $\dim_H F_i = 0$ , pa po prethodnom svojstvu  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$ .

## 3.2 Primjeri fraktala

B. Mandelbrot, u knjizi [11] *The Fractal Geometry of Nature*, definira fraktal na sljedeći način: "Fraktal je po definiciji skup za koji Hausdorffova dimenzija strogo prelazi topološku". Također navodi da svaki skup koji ima Hausdorffovu dimenziju koja nije cijeli broj je fraktal. Naime, fraktal može imati Hausdorffovu dimenziju koja je cijeli broj te kao primjer uzimamo put Brownovog gibanja, gdje je  $\dim_H F = 2$ , dok je topološka dimenzija jednaka 1, tj.  $\dim = 1$ . Zbog toga se često Hausdorffova dimenzija naziva *fraktalna dimenzija*, gdje ona može biti cijeli broj koji je manji od  $n$ , ako se nalazimo u  $\mathbb{R}^n$ , te nužno veća od topološke dimenzije.

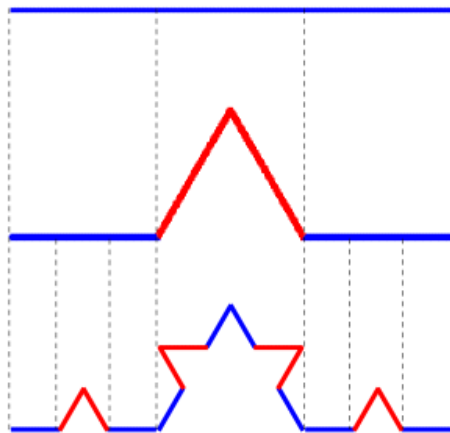
Osim fraktalne dimenzije, fraktali imaju svojstvo samosličnosti. Oni su formirani iterativnim postupkom gdje se u svim mjerilima pojavljuje isti tip strukture, odnosno kod svakog povećanja postoji manji dio objekta koji je sličan cjelini. Samosličnost je koncept koji nastaje iz fraktalne geometrije, što nam govori rečenica iz časopisa [1] *The American Mathematical Monthly*: "Self-similarity, in one form or another, has been intensely studied over the past few decades, arising in the areas of fractal geometry, Markov partitions, symbolic dynamics, radix representations, and wavelets".

Pokažimo nekoliko primjera fraktala kako bismo ilustrirali dosad navedene pojmove.

### Primjer 1. Kochova krivulja

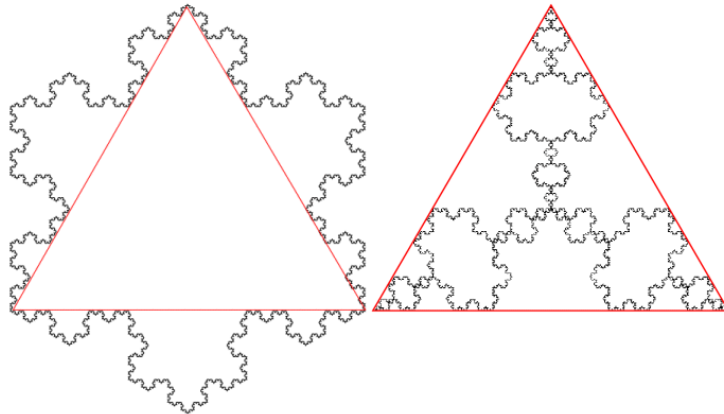
Kochova krivulja je matematička krivulja te jedna od prvih fraktala koji su opisani, a čovjek zaslužan za to je Helge von Koch u 1904. Ona započinje s ravnom linijom. Kada se ta linija podijeli na tri jednaka dijela srednji se dio zamijeni s dvije stranice jednakostraničnog trokuta iste dužine, kao uklonjeni segment. Odnosno, prva iteracija tada sadrži 4 dužine jednake  $1/3$  prijašnje duljine. Postupak se nastavlja dalje na isti način. Uzmemo svaku od 4 dužine, podijelimo ju na 3 jednaka dijela i opet srednji segment zamijenimo sa stranicama jednakostraničnog trokuta. Postupak možemo vidjeti na slici 3.2. Još ćemo samo spomenuti da je fraktalna dimenzija Kochove krivulje je

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186. \quad (3.1)$$



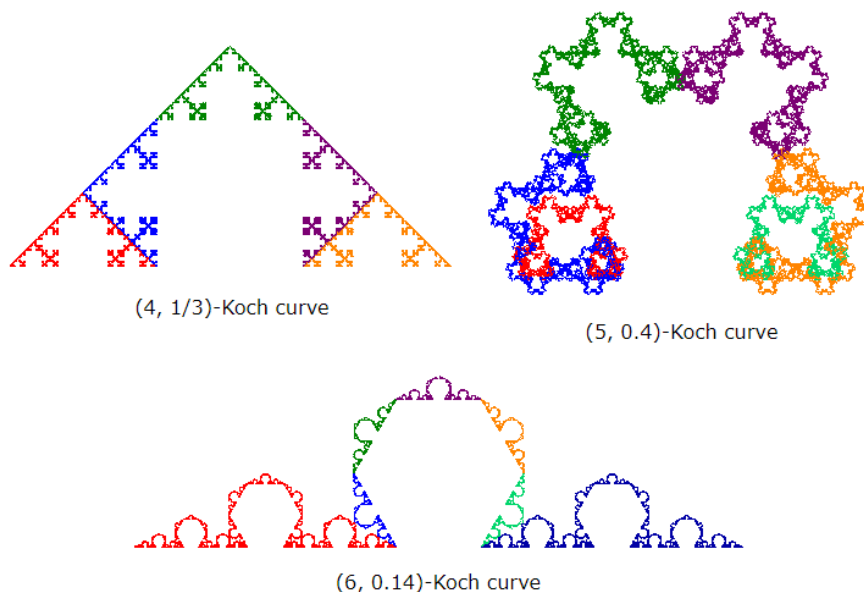
Slika 3.2: Konstrukcija Kochove krivulje.

Tri kopije Kochove krivulje, koje su smještene izvana sa svake strane jednakostraničnog trokuta, formiraju zatvorenu krivulju koja postavlja granicu za Kochovu pahuljicu, a tri kopije smještene iznutra jednakostraničnog trokuta formiraju Kochovu anti-pahuljicu, što vidimo na slici 3.3.



Slika 3.3: Kochova pahuljica i anti-pahuljica.

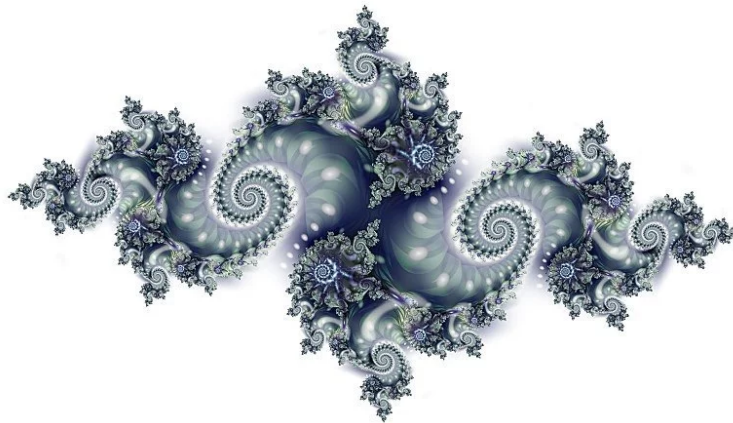
Postoje razne varijacije Kochove krivulje, a sada ćemo navesti jednu od njih. Sama konstrukcija varira o veličini izbrisanog srednjeg segmenta ili ako umjesto jednostraničnog trokuta stavimo pravilan polinom s više strana. Konstrukcija  $(n, c)$ -Kochove krivulje počinje sa linijom duljine  $l$  i pozitivnim brojem  $c < 1$ . Zamijenimo srednji  $cl$  dio segmenta sa stranama pravilnog polinoma s  $n$  strana čija je duljina  $cl$ . Ovo rezultira s  $n + 1$  novom linijom segmenta. Rekurzivno ponavljamo postupak na svaku novu liniju. Granica ovog iterativnog procesa je  $(n, c)$ -Kochova krivulja. Slikom 3.4 su prikazana tri primjera.



Slika 3.4: Kochove  $(n, c)$ -krivulje.

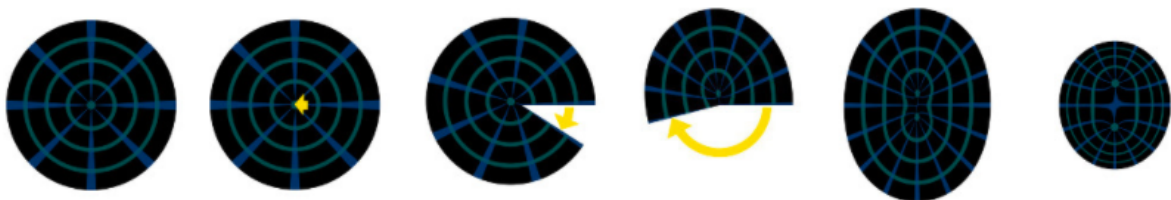
## Primjer 2. Julijin skup

Julijin skup je fraktal koji nam daje predivne ilustracije kako naizgled jednostavan proces može dovesti do jako zamršenih skupova. Funkcije kompleksne ravnine  $\mathbb{C}$ , jednostavne kao  $f(z) = z^2 + c$ , gdje je  $c$  konstanta, dovodi do fraktala egzotičnog izgleda. Ovdje se nećemo previše baviti matematičkom podlogom ovakvog skupa, nego ćemo pokušati pokazati i shvatiti kako se generira i kako on izgleda. Ovakav skup obično je generiran inicijalizacijom kompleksnog broja  $z = x + yi$ , gdje je  $i^2 = -1$ , a  $x$  i  $y$  su koordinate u rasponu od  $-2$  do  $2$ . Tada je  $z$  ponovo ažuriran koristeći  $z = z^2 + c$ , gdje je  $c$  neki drugi kompleksan broj koji daje specifičan Julijin skup. Nakon određeno mnogo iteracija, ako je veličina od  $z$  manja od  $2$ , kažemo da se točka nalazi u skupu i obojamo ju skladno prema tome. Na slici 3.5 možemo vidjeti jedan takav skup.



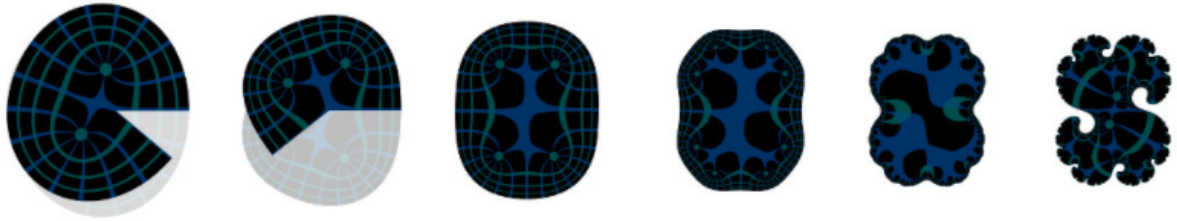
Slika 3.5: Julijin skup.

Ovaj proces ćemo možda bolje razumjeti vizualno ako konstantno transformiramo oblik koristeći jednadžbu  $z = \sqrt{z - c}$ . Korijen kompleksnog broja raspolavlja kut i korjenuje veličinu. Raspolavljujući kut nekog oblika je kao urušavanje punog kruga na pola, sa  $360^\circ$  na  $180^\circ$ . Druga polovica kruga se popuni jednakim polukrugom. Nakon što opet korjenujemo veličinu dolazi do kontrakcije prema promjeru  $1$ . Na slici 3.6 možemo vidjeti jednu iteraciju ovakve transformacije koja je primjenjena na krug promjera  $2$  s polarnom rešetkom nacrtanom preko njega.



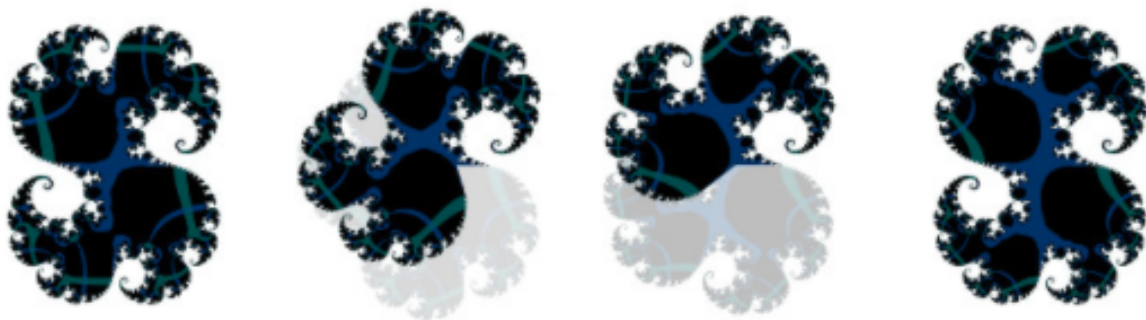
Slika 3.6: Konstrukcija Julijinog skupa.

*Nakon što ovakvu transformaciju primjenimo iznova i iznova, javlja se fraktalan oblik. Slika 3.7 pokazuje sljedeću iteraciju našeg procesa. Neki koraci su ovdje preskočeni da bi se došlo brže do 3., 6., 20. iteracije.*



Slika 3.7: Neke druge iteracije Julijinog skupa.

*Za svaku transformaciju oblik se duplicira u svaku polovicu dobivenog oblika te tako dobiva dvostruku količinu detalja ili broja petlji u obliku. Neka područja oblika se mogu smanjiti ili malo rotirati kako bi se dobile spirale, dok se druga područja pomaknu da bi se dobile ponavljajuće fraktalne kopije. Slikom 3.8 su prikazane transformacije iteracije 100. i 101.*



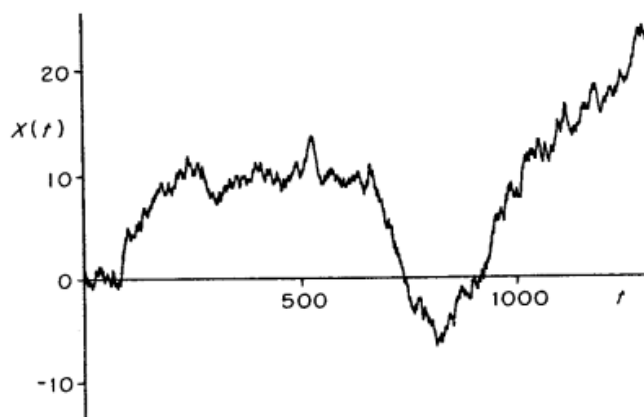
Slika 3.8: 100. i 101. iteracija Julijinog skupa.

# Poglavlje 4

## Fraktalno Brownovo gibanje

### 4.1 Karakteristike Brownovog gibanja

Brownovo gibanje,  $\mathcal{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ , smo u poglavlju 2.3 definirali kao slučajan proces takav da je  $P\{X(0) = 0\} = 1$  te ima nezavisne i normalno distribuirane priraste. Slikom 4.1 je prikazan graf uzorka Brownovog gibanja. U ovom poglavlju cilj je definirati vjerojatnosnu mjeru na prostoru funkcija, takvih da putovi koji se mogu pojaviti sličie promatranom Brownovom gibanju. Proučavat ćemo fraktalne oblike klasičnog Brownovog gibanja te pokazati neke varijante koje se koriste za modeliranje velikog izbora pojava.



Slika 4.1: Graf funkcije uzorka Brownovog gibanja.

Definiciju Brownovog gibanja lako proširimo s prostora  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}^n$ . Kažemo da je funkcija  $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  *n-dimenzionalno Brownovo gibanje* na nekom vjerojatnosnom prostoru, ako je svaka komponenta  $X_i(t)$  vektora  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  jednodimenzionalno Brownovo gibanje te  $X_1(t_1), \dots, X_n(t_n)$  su nezavisne za bilo koji skup vremena  $t_1, \dots, t_n$ . Uzorak puta Brownovog gibanja u  $\mathbb{R}^n$  je prikazano slikom 4.2. Po definiciji, projekcije od  $X(t)$  na osi koordinatnog sustava predstavljaju jednodimenzionalno Brownovo gibanje. Za *n*-dimenzionalno Brownovo gibanje možemo reći da je *izotropno*, odnosno da ima jednaka svojstva u svim smjerovima.



Slika 4.2: Simulacija Brownovog puta u  $\mathbb{R}^n$ .

Pretpostavimo da je  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$   $n$ -dimenzionalno Brownovo gibanje. Kako  $X_i(t+h) - X_i(t)$  ima za svaki  $i$  nezavisne normalne distribucije, vrijedi da na  $[a_i, b_i]$

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i.$$

Ako je  $E$  paralelepiped za  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , onda

$$\begin{aligned} P(X(t+h) - X(t) \in E) &= \prod_{i=1}^n \left[ (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i \right] \\ &= (2\pi h)^{-n/2} \int_E \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) dx, \end{aligned}$$

gdje je  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Ponekad se kaže da  $X(t+h) - X(t)$  ima multidimenzionalnu normalnu distribuciju. Stoga, uzimajući  $E$  kao kuglu  $B_\rho(0)$  vrijedi

$$P(X(t+h) - X(t) \leq \rho) = ch^{-n/2} \int_{r=0}^{\rho} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr, \quad (4.1)$$

gdje je  $c$  konstanta koja ovisi samo o  $n$ .

Jedno od osnovnih svojstava Brownovog gibanja je da, s vjerojatnošću 1, zadovoljava Hölderov uvjet eksponenta  $\lambda$ , za svaki  $\lambda < \frac{1}{2}$ .

**Propozicija 26.** *Pretpostavimo da je  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . Brownova funkcija  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  s vjerojatnošću 1 zadovoljava*

$$|X(t+h) - X(t)| \leq b|h|^\lambda, \quad (|h| < H_0) \quad (4.2)$$

za neke  $H_0 > 0$ , gdje  $b$  ovisi samo o  $\lambda$ .

**Dokaz.** *Ako je  $h > 0$ , imamo*

$$\begin{aligned} P(|X(t+h) - X(t)| > h^\lambda) &= ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^{\infty} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr \\ &= c \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} u^{n-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &\leq c_1 \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} \exp(-u) du \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= c_1 \exp(-h^{\lambda-1/2}) \\
&\leq c_2 h^{-2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

nakon substitucije  $u = rh^{-1/2}$  i procjene gdje  $c_1$  i  $c_2$  ne ovise o  $h$  ili  $t$ . Uzimajući za  $[t, t+h]$  binarni interval  $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$  imamo

$$\begin{aligned}
P(|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})| > 2^{-j\lambda} \text{ za neke } j \geq k \text{ i } 1 \leq m \leq 2^j) \\
\leq c_2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^j 2^{-2j} = c_2 2^{-k+1}.
\end{aligned}$$

Stoga, s vjerojatnošću 1, postoji cijeli broj  $K$  takav da je

$$|X((m-1)2^{-j}) - X(m2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda}$$

za sve  $j > K$  i  $1 \leq m \leq 2^j$ . Ako je  $h < H_0 = 2^{-K}$  interval  $[t, t+h]$  se može izraziti kao prebrojiva unija susjednih intervala oblika  $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ , gdje je  $2^{-j} \leq h$  i s najviše dva intervala bilo koje duljine. Uzmimo sada sve binarne intervale iz  $[t, t+h]$  koji nisu sadržani niti u jednom drugom takvom intervalu. Tada, ako je  $k$  najmanji cijeli broj takav da je  $2^{-k} \leq h$ , vrijedi

$$\begin{aligned}
|X(t) - X(t+h)| &\leq 2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} \\
&= \frac{2^{-k\lambda} 2}{(1-2^{-\lambda})} < \frac{2h^\lambda}{(1-2^{-\lambda})}.
\end{aligned}$$

□

**Teorem 27.** S vjerojatnošću 1, uzorak Brownovog puta u  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , ima Hausdorffovu dimenziju jednaku 2.

**Dokaz.** Za svaki  $\lambda < \frac{1}{2}$  funkcija  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , s vjerojatnošću 1, zadovoljava Hölderov uvjet (4.2) pa je  $\dim_H X([0, 1]) \leq \frac{1}{\lambda} \dim_H [0, 1] < \frac{1}{\lambda}$ . Dakle, Brownov put gotovo sigurno ima dimenziju najviše 2.

Za donju granicu uzmimo da je  $1 < s < 2$ . Za dani  $t$  i  $h$  neka  $p(r)$  predstavlja izraz (4.1). Tada imamo

$$\begin{aligned}
E(|X(t+h) - X(t)|^{-s}) &= \int_0^{\infty} r^{-s} dp(r) \\
&= ch^{-n/2} \int_0^{\infty} r^{-s+n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr \\
&= \frac{1}{2} ch^{-s/2} \int_0^{\infty} w^{(n-s-2)/2} \exp\left(\frac{-w}{2}\right) dw \\
&= c_1 h^{-s/2}
\end{aligned}$$

nakon substitucije  $w = r^2/h$ , gdje je  $c_1$  nezavisan od  $h$  i  $t$ . Tada, zbog  $s < 2$

$$\begin{aligned}
&E\left(\int_0^1 \int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s} dt du\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E|X(t) - X(u)|^{-s} dt du \\
&= \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t - u|^{-s/2} dt du \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Postoji način definiranja funkcije  $\mu_x$  puta  $f$ , odnosno  $\mu_f(A) = \mathcal{L}\{t : 0 \leq t \leq 1, f(t) \in A\}$ , gdje je  $\mathcal{L}$  Lebesgueova mjera. Tada  $\int g(x)d\mu_f(x) = \int_0^1 g(f(t))dt$ , za bilo koju funkciju  $g$ . Tada izraz (4.4) postaje

$$E\left(\int \int |x - y|^{-s} d\mu_x(x) d\mu_x(y)\right) < \infty.$$

Ako je  $s < 2$ , onda  $\int \int |x - y|^{-s} d\mu_x(x) d\mu_x(y) < \infty$  gotovo sigurno, gdje je  $\mu_x$  funkcija  $X(t)$  pa je  $\dim_H X([0, 1]) \geq s$ .

□

Slično možemo pokazati i za Brownove grafove.

**Teorem 28.** *S vjerojatnošću 1 graf Brownove funkcije  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ima Hausdorffovu dimenziju  $1\frac{1}{2}$ .*

**Dokaz.** *Iz uvjeta (4.2) je očito da, s vjerojatnošću 1,  $X$  ima Hausdorffovu dimenziju najviše  $2 - \lambda$ , za svaki  $\lambda < \frac{1}{2}$ . Odnosno, dimenzija mu je najviše  $1\frac{1}{2}$ . Za donju granicu, kao u prethodnom teoremu 27 vrijedi*

$$\begin{aligned} E((|X(t+h) - X(t)|^2 + h^2)^{-s/2}) &= \int_0^\infty (r^2 + h^2)^{-s/2} dp(r) \\ &= ch^{-1/2} \int_0^\infty (r^2 + h^2)^{-s/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr \\ &= \frac{1}{2}c \int_0^\infty (uh + h^2)^{-s/2} u^{-1/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) du \\ &\leq \frac{1}{2}c \int_0^h (h^2)^{-s/2} u^{-1/2} du + \frac{1}{2}c \int_h^\infty (uh)^{-s/2} u^{-1/2} du \\ &\leq c_1 h^{1/2-s}. \end{aligned}$$

Neka je sada  $\mu_f(A) = \mathcal{L}\{t : 0 \leq t \leq 1, (t, f(t)) \in A\}$ , gdje je  $\mathcal{L}$  Lebesgueova mjera. Tada koristeći Pitagorin teorem vrijedi

$$\begin{aligned} &E\left(\int \int |x - y|^{-s} d\mu_x(x) d\mu_x(y)\right) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 E(|X(t) - X(u)|^2 + |t - u|^2)^{-s/2} dt du \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t - u|^{1/2-s} dt du \\ &\leq \infty \end{aligned}$$

ako je  $s < 1\frac{1}{2}$ . Stoga je  $\mu_x$  na grafu  $X$  pozitivna i konačna te vrijedi  $\dim_H X \geq 1\frac{1}{2}$ .

□

Ako, s vjerojatnošću 1, graf od  $X$  na bilo kojem intervalu ima dimenziju  $1\frac{1}{2}$ , onda Brownove funkcije, iako neprekidne, nisu neprekidno diferencijabilne. Vrijedi da, s vjerojatnošću 1, Brownove funkcije su nigdje diferencijabilne.

## 4.2 Fraktalno Brownovo gibanje

Brownovo gibanje je slučajan proces vrlo značajan za modeliranje niza pojava. Međutim, to neće biti slučaj kod pojava kod kojih vjerojatnost ekstremnih događaja nije zanemariva. Brownova uzoračka funkcija se često smatra tipičnom slučajnom funkcijom iako njen graf ima dimenziju  $1\frac{1}{2}$  gotovo sigurno. Naime, ovakve slučajne funkcije s grafovima neke druge dimenzije su bitne za raznovrsne svrhe modeliranja.

Brownov proces ima jedinstvenu vjerojatnosnu distribuciju funkcije s nezavisnim prirastima koji su stacionarni i konačne varijance. Postoje dvije njegove uobičajene varijacije. Fraktalno Brownovo gibanje ima priraste koji su normalno distribuirani, ali više nisu nezavisni, dok stabilni procesi izostavljaju svojstvo konačne varijance.

**Definicija 29.** *Fraktalno Brownovo gibanje s indeksom  $\alpha$  na nekom vjerojatnosnom prostoru, za  $0 < \alpha < 1$ , definiramo kao slučajan proces  $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tako da vrijedi:*

- (i) *S vjerojatnošću 1,  $X(t)$  je neprekidan i  $X(0) = 0$ ,*
- (ii) *Za sve  $t \geq 0$  i  $h > 0$  prirast  $X(t+h) - X(t)$  ima normalnu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom  $h^{2\alpha}$  tako da*

$$P(X(t+h) - X(t) \leq x) = (2\pi)^{-1/2} h^{-\alpha} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h^{2\alpha}}\right) du. \quad (4.5)$$

Vidimo da su prirasti  $X(t+h) - X(t)$  stacionarni. Međutim, distribucija ovako definirane funkcije ne može imati nezavisne priraste, osim u Brownovom slučaju za  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Po drugom svojstvu definicije slijedi da je  $E((X(t+h) - X(t))^2) = h^{2\alpha}$ , odakle se može pokazati da

$$E(X(t)(X(t+h) - X(t))) = \frac{1}{2}[(t+h)^{2\alpha} - t^{2\alpha} - h^{2\alpha}]$$

je različito od nula za  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ . Stoga,  $E((X(t) - X(0))(X(t+h) - X(t)))$  je pozitivno ili negativno, ovisno o tome je li  $\alpha > \frac{1}{2}$  ili  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Time prirasti nisu nezavisni, ako je  $\alpha > \frac{1}{2}$  onda su  $X(t) - X(0)$  i  $X(t+h) - X(t)$  jednakog predznaka, tako da se  $X(t)$  povećava u budućnosti ako ima sklonost povećanju u prošlosti. Slično, ako je i  $\alpha < \frac{1}{2}$  onda su  $X(t) - X(0)$  i  $X(t+h) - X(t)$  različitog predznaka.

Dimenzija grafa fraktalnog Brownovog gibanja se može odrediti na sličan način kao u Brownovom slučaju.

**Propozicija 30.** *Neka je  $0 < \lambda < \alpha$ . S vjerojatnošću 1, Brownova uzoračka funkcija s indeksom  $\alpha$ ,  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava*

$$|X(t+h) - X(t)| \leq b|h|^\lambda, \quad (4.6)$$

ako je  $|h| < H_0$ , za neke  $H_0 > 0$  i  $b > 0$ .

**Ideja dokaza.** *Ako je  $\lambda < \frac{1}{2}$ , dokaz ide kao u propoziciji 26, gdje se umjesto izraza (4.1) koristi izraz (4.5). Ako je  $\alpha > \lambda \geq \frac{1}{2}$ , onda to vodi do procjene  $c_2 h^{1/2-\alpha}$  na mjesto (4.3). Tada se može pokazati da Hölderov uvjet (4.6) vrijedi uniformno za sve  $t$ .  $\square$*

**Teorem 31.** *S vjerojatnošću 1, Brownova uzoračka funkcija s indeksom  $\alpha$ ,  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , ima graf s Hausdorffovom dimenzijom  $2 - \alpha$ .*

**Ideja dokaza.** *Neka je  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija tako da  $|f(t) - f(u)| \leq c|t - u|^{2-s}$ , ( $0 \leq t, u \leq 1$ ), gdje je  $c > 0$  i  $1 \leq s \leq 2$ . Tada  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  i  $\dim_H \text{grafa}(f) \leq \dim_B \text{grafa}(f) \leq s$ . Ovo vrijedi za  $|t - u| < \delta$ , za  $\delta > 0$ . Ovaj uvjet zajedno s izrazom (4.6) pokazuju da je dimenzija gotovo sigurno najviše  $2 - \alpha$ . Donja granica se dobije kao u teoremu koristeći vjerojatnosnu distribuciju (4.5).  $\square$*

Pogodno je pretpostaviti da je  $X$  definiran za sva vremena, odnosno  $X : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ovaj uvjet zahtjeva malu izmjenu u definiciji fraktalnog Brownovog gibanja. Kako varijanca  $E(|X(t+h) - X(t)|^2)$  teži u beskonačnost s  $h$ , imamo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)^2 dt\right) = \infty$$

pa uzoračke funkcije teže beskonačnom kvadratnom očekivanju. Štoviše,

$$E\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t+h) - X(t))^2 dt\right) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(X(t+h) - X(t))^2 dt = h^{2\alpha}.$$

Može se zaključiti da u prosjeku uzoračke funkcije zadovoljavaju

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t+h) - X(t))^2 dt \simeq ch^{2\alpha},$$

pa se može zaključiti da ovo odgovara grafu dimenzije  $2 - \alpha$ .

Zbog korelacije između prirasta simulacija fraktalnog Brownovog gibanja s indeksom  $\alpha$  može biti nezgodno. Ako uzmemo da  $X(k2^{-j})$  ima normalnu distribuciju varijance  $2^{2\alpha j}$  za neparan  $k$  i nezavisan za svaki  $k$  i  $j$ , rezultirajuća funkcija nema stacionarne priraste. Moguće je aproksimirati  $X$  slučajnom šetnjom koristeći određene sume normalnih slučajnih varijabli. Takva formula je pak jako komplicirana.

Alternativna metoda konstrukcije funkcije s karakteristikama sličnim  $\alpha$  Brownovim funkcijama je sljedeća. Promotrimo slučajnu funkciju

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} \sin(\lambda^k t + A_k) \quad (4.7)$$

gdje je  $\lambda > 1$  i  $C_k$  su nezavisne slučajne varijable normalne distribucije s očekivanjem 0 i varijancom 1, dok su  $A_k$  nezavisne s uniformnom distribucijom na  $[0, 2\pi)$ . Očito je  $E(X(t+h) - X(t)) = 0$ . Osim toga

$$\begin{aligned} E(X(t+h) - X(t))^2 &= E\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda^{-\alpha k} 2 \sin\left(\frac{1}{2}\lambda^k h\right) \cos\left(\lambda^k\left(t + \frac{1}{2}h\right) + A_k\right)\right)^2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-2\alpha k} \sin^2\left(\frac{1}{2}\lambda^k h\right), \end{aligned}$$

koristeći da je  $E(C_k C_j) = 1$  ili 0, ovisno o tome je li  $k = j$  ili ne, te da je očekivanje od  $\cos^2(a + A_k) = \frac{1}{2}$ . Ako odaberemo  $N$  takav da je  $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ , onda je

$$\begin{aligned}
E(X(t+h) - X(t))^2 &\simeq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda^{-2\alpha k} \lambda^{2k} h^2 + 2 \sum_{K=N+1}^{\infty} \lambda^{-2\alpha k} \\
&\simeq c \lambda^{-2\alpha N} \\
&\simeq ch^{-2\alpha}
\end{aligned}$$

gdje je  $0 < c_1 \leq E(X(t+h) - X(t))^2/h^{2\alpha} \leq c_2 < \infty$ , za  $h < 1$ . Stoga (4.7) ima određena statistička svojstva slična  $\alpha$  fraktalnom Brownovom gibanju što nam pruža korisne metode za crtanje slučajnog grafa raznih dimenzija. Takve funkcije su često korištene u fraktalnom modeliranju. Na primjer, za vrijednost  $\alpha = 0.8$  dobijemo graf dimenzije 1.2, što odgovara horizontu planine.

### 4.3 Svojstva fraktalnog Brownovog gibanja

Neka varijabla  $t$  predstavlja vrijeme, kao i do sada, za  $-\infty < t < \infty$ , te neka je  $\omega \in \Omega$ . Standardno Brownovo gibanje je slučajna funkcija s nezavisnim Gausovim prirastima, tako da  $X(t_2, \omega) - X(t_1, \omega)$  ima očekivanje nula i varijancu  $|t_2 - t_1|$  te ako se intervali  $(t_1, t_2)$  i  $(t_3, t_4)$  ne preklapaju, onda  $X(t_2, \omega) - X(t_1, \omega)$  je nezavisno od  $X(t_4, \omega) - X(t_3, \omega)$ . Činjenica da je standardna devijacija prirasta  $X(t+T, \omega) - X(t, \omega)$  za  $T > 0$  jednaka  $T^{1/2}$  se često naziva *zakon  $T^{1/2}$* .

**Definicija 32.** *Neka je  $0 < \alpha < 1$ , te neka je  $b_0$  proizvoljan realan broj. Slučajnu funkciju  $X_\alpha(t, \omega)$  nazivamo reducirano fraktalno Brownovo gibanje s parametrom  $\alpha$  i početnom vrijednošću  $b_0$  za vrijeme  $t = 0$ . Za  $t > 0$ ,  $X_\alpha(t, \omega)$  je definirano kao*

$$\begin{aligned}
X_\alpha(0, \omega) &= b_0 \\
X_\alpha(t, \omega) - X_\alpha(0, \omega) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{\alpha-1/2} - (-s)^{\alpha-1/2}] dB(s, \omega) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1/2} dB(s, \omega) \right\}.
\end{aligned}$$

Analogno vrijedi i za  $t < 0$ . Primjetimo da, ako je  $b_0 = 0$ , onda je  $X_{1/2}(t, \omega) = X(t, \omega)$ . Za druge vrijednosti  $\alpha$ ,  $X_\alpha(t, \omega)$  zovemo *fraktalni derivat fraktalnog integrala* od  $X(t, \omega)$ .

**Definicija 33.** *Zapis  $\{X(t, \omega)\} \stackrel{\Delta}{=} \{Y(t, \omega)\}$  nam označava da slučajne funkcije  $X(t, \omega)$  i  $Y(t, \omega)$  imaju jednake konačnodimenzionalne distribucije.*

**Definicija 34.** *Prirasti slučajne funkcije  $X(t, \omega)$  definirane za  $-\infty < t < \infty$  su samoslični s eksponentom  $\alpha \geq 0$  ako za bilo koji  $h > 0$  i bilo koji  $t_0$*

$$\{X(t_0 + \tau, \omega) - X(t_0, \omega)\} \stackrel{\Delta}{=} \{h^{-\alpha}[X(t_0 + h\tau, \omega) - X(t_0, \omega)]\}.$$

Sljedeći teorem je dao motivaciju za fraktalno Brownovo gibanje.

**Teorem 35.** *Prirasti od  $X_\alpha(t, \omega)$  su stacionarni i samoslični s parametrom  $\alpha$ .*

**Korolar 1.**  *$T^\alpha$  zakon za standardnu devijaciju od  $X_\alpha$  naveden je kako slijedi,*

$$E(X_\alpha(t+T, \omega) - X_\alpha(t, \omega))^2 = T^{2\alpha} V_\alpha$$

gdje je

$$V_\alpha = [\Gamma(\alpha + 1/2)]^{-2} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(1-s)^{\alpha-1/2} - (-s)^{\alpha-1/2}]^2 ds + \frac{1}{2\alpha} \right\}.$$

**Definicija 36.** Neka je  $X(t, \omega)$  realna slučajna funkcija. Njen kumulativni raspon je definiran na sljedeći način

$$M(t, T, \omega) = \sup_{t \leq s \leq t+T} [X(s, \omega) - X(t, \omega)] - \inf_{t \leq s \leq t+T} [X(s, \omega) - X(t, \omega)].$$

**Korolar 2.**  $T^\alpha$  zakon za sekvencijalni raspon procesa sa samosličnim prirastima je dan na sljedeći način: ako  $X_\alpha(t, \omega)$  ima samoslične priraste s parametrom  $\alpha$  tada

$$M(T, \omega) \stackrel{\Delta}{=} T^\alpha M(1, \omega).$$

**Propozicija 37.** Ako  $X(t, \omega)$  ima samoslične i stacionarne priraste te je neprekidna u srednje kvadratnom smislu, tada  $0 \leq \alpha < 1$ .

**Dokaz.** Koristeći nejednakost Minkowskog za bilo koji  $\tau_1$  i  $\tau_2 > 0$  vrijedi

$$\left\{ E[X(t+\tau_1+\tau_2) - X(t)]^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ E[X(t+\tau_1+\tau_2) - X(t+\tau_1)]^2 \right\}^{1/2} + \left\{ E[X(t+\tau_1) - X(t)]^2 \right\}^{1/2}.$$

Prema hipotezi postoji konsanta  $V$  takva da je

$$E[X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)]^2 = V\tau^{2\alpha}.$$

Stoga slijedi da je

$$V^{1/2}[\tau_1 + \tau_2]^\alpha \leq V^{1/2}[\tau_1^\alpha + \tau_2^\alpha],$$

što implicira da je  $\alpha < 1$ . Neprekidnost u srednje kvadratnom smislu zahtijeva da je  $\alpha \geq 0$ .  $\square$

**Propozicija 38.** Ako je  $X(t, \omega)$  Gaussova slučajna funkcija koja zadovoljava uvjete propozicije 37 te nije konstanta, onda ona mora biti fraktalno Brownovo gibanje.

Znamo da je fraktalno Brownovo gibanje za parametar  $\alpha \neq 0.5$  karakterizirano kao Gaussovo sa stacionarnim prirastima te svojstvom samosličnosti. Odnosno možemo reći da vrijedi:

- (i) Gaussov je proces.
- (ii) Prirasti  $X_\alpha(t) - X_\alpha(t - \delta)$ , definirani kada je  $t$  višekratnik od  $\delta$ , konstruiraju stacionaran slučajan proces.
- (iii) Samoslični su u smislu da ako se vrijeme mijenja u omjeru  $r$ , onda reskalirana funkcija  $r^{-\alpha}[X_\alpha(tr) - X_\alpha(0)]$  ima jednaku distribuciju kao originalna funkcija  $X_\alpha(t) - X_\alpha(0)$ .

Navedimo sada tri korolara koja se tiču svojstva samosličnosti fraktalnog Brownovog gibanja.

Prvi korolar slijedi iz činjenice da je varijanca od  $\delta^{-\alpha}[X_\alpha(t + \delta) - X_\alpha(t)]$  nezavisna od  $t$  i  $\delta$ . Stoga,

$$E[X_\alpha(t + \delta) - X_\alpha(t)]^2 = E[\Delta X_\alpha]^2 = C_\alpha \delta^{2\alpha}$$

za svaki  $t$  i  $\delta$  i konstantu  $C_\alpha$ .

**Korolar 3** (Prvi korolar samosličnosti fraktalnog Brownovog gibanja). Standardna devijacija od  $X_\alpha(t + \delta) - X_\alpha(t) = \sqrt{C_\alpha} \delta^\alpha$ , za svaki  $t$  i svaki  $\delta$ .

Drugi korolar se tiče raspona  $R_p(t, \delta) = \max_{0 \leq u \leq \delta} [X_\alpha(t+u) - X_\alpha(t)] - \min_{0 \leq u \leq \delta} [X_\alpha(t+u) - X_\alpha(t)]$ .

**Korolar 4** (Drugi korolar samosličnosti fraktalnog Brownovog gibanja). *Distribucija varijable  $R_p(t, \delta)\delta^{-\alpha}$  je nezavisna od  $t$  i  $\delta$ .*

Ovo je *uniformni  $\delta^\alpha$  zakon* za raspon stanovništva. Posebice, kako je konstanta  $D_\alpha$  različita od  $C_\alpha$ , vrijedi

$$E[R_p(t, \delta)] = D_\alpha \delta^\alpha, \text{ za svaki } t \text{ i } \delta.$$

**Korolar 5** (Treći korolar samosličnosti fraktalnog Brownovog gibanja). *Distiribucija varijable  $R(t, \delta)\delta^{-\alpha}$  je nezavisan od  $t$  i  $\delta$ .*

## 4.4 Stabilni procesi

Alternativna generalizacija Bownovog gibanja daje *stabilne procese* koje nam je predstavio Lévy. Stabilan proces je slučajna funkcija  $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sa stacionarnim prirastima  $X(t+h) - X(t)$ , odnosno distribucija im ovisi samo o  $h$ , te nezavisnim prirastima, odnosno  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$  nezavisni ako  $0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots < t_{2m}$ . Stabilni procesi, osim u specijalnom slučaju kao što je Brownovo gibanje, imaju beskonačnu varijancu i s vjerojatnošću 1 nisu neprekidni.

Distribucija slučajne varijable  $Y$  se može prikazati pomoću svoje karakteristične funkcije, odnosno Fourierove transformacije  $E(\exp(iuY))$ , za  $u \in \mathbb{R}$ . Uzmimo prikladnu funkciju  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tako da prirasti  $X(t+h) - X(t)$  zadovoljavaju

$$E(\exp(iu(X(t+h) - X(t)))) = \exp(-h\psi(u)) \quad (4.8)$$

gdje su  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$  nezavisni za  $0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots < t_{2m}$ . Prirasti su očito stacionarni. Ova definicija je konzistentna u sljedećem smislu. Neka je  $t_1 < t_2 < t_3$ , tada vrijedi

$$\begin{aligned} E(\exp(iu(X(t_3) - X(t_1)))) &= E(\exp iu((X(t_3) - X(t_2)) + X(t_2) - X(t_1))) \\ &= E(\exp iu(X(t_3) - X(t_2)))E(\exp iu(X(t_2) - X(t_1))) \\ &= \exp(-(t_3 - t_2)\psi(u)) \exp(-(t_2 - t_1)\psi(u)) \\ &= \exp(-(t_3 - t_1)\psi(u)). \end{aligned}$$

Ako uzmemo da je  $\psi(u) = c|u|^\alpha$ , za  $0 < \alpha \leq 2$ , dobijemo *simetrične stabilne procese indeksa  $\alpha$* . Zamijenimo li  $h$  s  $\gamma h$  te  $u$  s  $\gamma^{-1/\alpha} u$  u izrazu (4.8), desna strana jednadžbe će ostati nepromijenjena pa slijedi da  $\gamma^{-1/\alpha} X(\gamma t)$  ima istu distribuciju kao  $X(t)$ . Slučaj kada je  $\alpha = 2$  je standardno Brownovo gibanje. Navesti ćemo teorem vezan za Hausdorffovu dimenziju simetričnih stabilnih procesa.

**Teorem 39.** *S vjerojatnošću 1, graf stabilnog simetričnog procesa indeksa  $\alpha$  ima Hausdorffovu dimenziju  $\{1, 2 - 1/\alpha\}$ .*

Ako je  $\alpha < 1$ , gotovo sigurno je  $\dim_H \text{grafa}(X) = 1$ .

## 4.5 Brownove površine

Kratko ćemo spomenuti fraktalne Brownove površine koje se koriste za kreiranje računalno generiranih krajolika. Zamijenimo varijablu vremena  $t$  s koordinatama  $(x, y)$  tako da se slučajna varijabla  $X(x, y)$  može smatrati kao visina površine na mjestu  $(x, y)$ .

Za  $0 < \alpha < 1$  definiramo  $\alpha$  Brownovu funkciju  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kao slučajnu funkciju tako da vrijedi sljedeće:

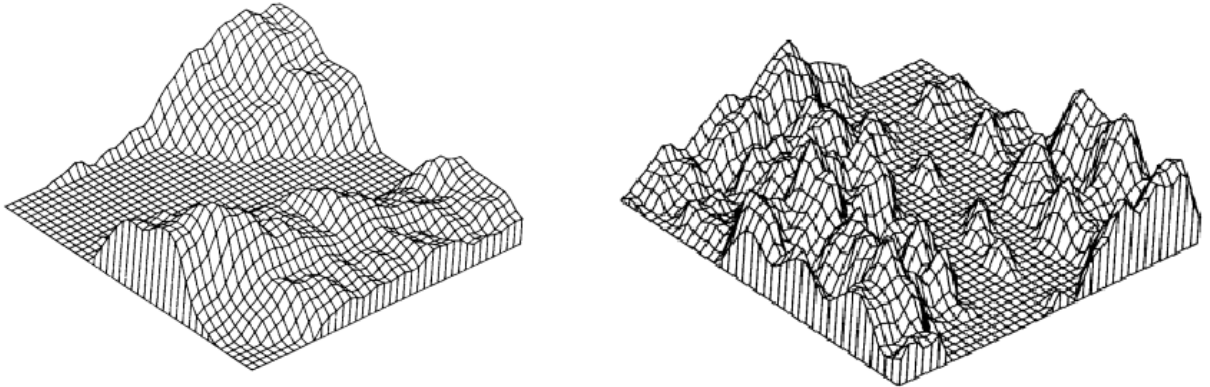
- (i) S vjerojatnošću 1,  $X(0, 0) = 0$  i  $X(x, y)$  je neprekidna funkcija od  $(x, y)$ .
- (ii) Za  $(x, y), (h, k) \in \mathbb{R}^2$  prirasti visine  $X(x+h, y+k) - X(x, y)$  imaju normalnu distribuciju s očekivanjem nula i varijancom  $(h^2 + k^2)^\alpha$ , stoga

$$\begin{aligned}
 &P(X(x+h, y+k) - X(x, y) \leq z) \\
 &= (2\pi)^{-1/2} (h^2 + k^2)^{-\alpha/2} \int_{-\infty}^z \exp\left(\frac{-r^2}{2(h^2 + k^2)^\alpha}\right) dr. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$\alpha$  Brownovu površinu definiramo izrazom

$$\{(x, y, X(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Slikom 4.3 su prikazana dva primjera takvih površina.



Slika 4.3:  $\alpha$  fraktalne Brownove površine za indekse  $\alpha = 0.95$  i  $\alpha = 0.8$ , dimenzije 2.20.

Ako usporedimo 4.9 s distribucijom 4.5 vidimo da je graf dobiven presijecanjem  $X(x, y)$  s bilo kojom vertikalnom ravninom 1 – *dimenzionalna* Brownova funkcija s indeksom  $\alpha$ .

Iskažimo sada teorem vezan za Hausdorffovu dimenziju ovakvih površina.

**Teorem 40.** *S vjerojatnošću 1, Brownova površina s indeksom  $\alpha$  ima Hausdorffovu dimenziju jednaku  $3 - \alpha$ .*



## Poglavlje 5

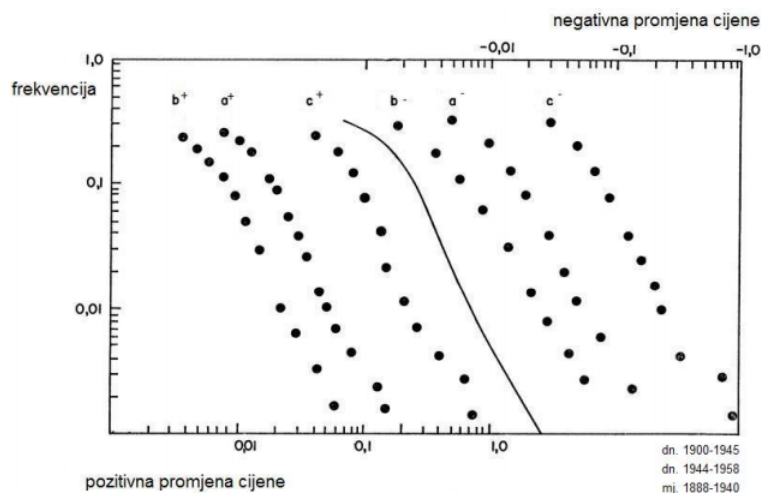
# Fraktalna priroda tržišta

Ovim poglavljem ćemo koncepte navedene do sad primjeniti na financijsko tržište. Pokazat ćemo da su financijska tržišta fraktalne prirode te da je to jedna od najbitnijih karakteristika za razumijevanje financijskog rizika.

*Financijsko tržište* je mjesto na kojemu se susreću ponuda i potražnja financijskih sredstava. Promet na ovom tržištu odvija se korištenjem *financijskih instrumenata*, a oni su ugovori kojima su sadržana prava i obveze iz nekog financijskog odnosa. Financijska tržišta usmjeravaju štednju, koja većim dijelom dolazi od stanovništva i privrede, onim pojedincima i institucijama koji u nekom trenutku trebaju više sredstava za potrošnju nego što im omogućuje njihov raspoloživi dohodak. Ona određuju volumen raspoloživih zajmova, privlače štednju, te se njima temeljem sila ponude i potražnje određuje kamatna stopa i cijene vrijednosnih papira. Najvažnija podjela ovog tržišta se temelji na ročnosti instrumenata kojima se na njima trguje pa tako razlikujemo *tržište novca* i *tržište kapitala*. Na tržištu novca trguje se kratkoročnim financijskim sredstvima, čija su dospjeća obično do godinu dana. Tržište kapitala obuhvaća trgovinu vrijednosnim papirima s dužim dospjećima.

### 5.1 Mandelbrotova analiza cijena pamuka

Kao motivaciju za ovo poglavlje ćemo navesti Mandelbrotovu *analizu cijena pamuka*. Godine 1963. Mandelbrot analizira varijacije cijena pamuka u vremenskom nizu počevši od 1900. godine. Svojim proučavanjima uočio je dva bitna svojstva. Prvo je da kretanje cijena pamuka nije pratilo normalnu distribuciju nego su podaci pokazali značajnu frekvenciju ekstremnih varijacija. Drugo opažanje je da su varijacije cijena pratile uzorke koje su bile indiferentne prema skali, odnosno krivulja opisana promjenama cijena za jedan dan je bila slična krivulji za jedan mjesec i to je upravo svojstvo samosličnosti koje je prikazano slikom 5.1. Vidimo da su krivulje, koje opisuju mjesečne i dnevne promjene cijena slične, u usporedbi s teorijskom krivuljom.



Slika 5.1: Usporedba mjesečnih i dnevnih promjena cijena.

Mandelbrot je svoju fraktalnu teoriju koristio kako bi objasnio prisutnost ekstremnih događaja na Wall Streetu. Godine 2004. objavljuje svoju poznatu knjigu [12] o "lošem ponašanju" financijskih tržišta. Osnovna je ideja da je vjerojatnost doživljavanja ekstremnih fluktuacija veća od onoga što se vjerovalo, što pruža bolju viziju rizika u svijetu financija. Središnji cilj financijskih tržišta je povećanje prihoda za određenu razinu rizika. Standardni modeli za to se temelje na pretpostavci da je vjerojatnost ekstremnih varijacija u cijenama imovine vrlo niska. Ovi se modeli oslanjaju na pretpostavku da su fluktuacije cijena rezultat dobrog ponašanja slučajnog ili stohastičkog procesa. Iz tog razloga, poznati modeli, poput Black-Scholes modela, se baziraju na normalnim probabilističkim distribucijama kako bi opisali kretanje cijena. Međutim, analiza cijena pamuka, a kasnije i brojne slične analize, pokazale se da distribucija kretanja cijena nije normalna, već da slijedi distribucije s teškim repom.

## 5.2 Multifraktali

U poglavlju 3 *Fraktali* upoznali smo se s pojmom fraktala te njegovim osnovnim svojstvima. Rekli smo da je fraktal objekt koji se može razložiti na manje dijelove tako da je svaki od njih, makar približno, umanjena kopija cjeline te kažemo da je takav lik sam sebi sličan. *Multifraktal* je sustav koji je fraktalan na više načina. On je generalizacija fraktalnog sustava u kojem jedan eksponent (fraktalna dimenzija) nije dovoljan da opiše njegovu dinamiku. Umjesto toga potreban je kontinuirani spektar eksponenata, tzv. singularitetni spektar. Razlika između fraktala i multifraktala je ta što fraktale možemo definirati kao objekte koji se mogu prikazati kao crno-bijeli dok multifraktali uključuju polutonove te nijanse sive.

Općenito, pri razvoju modela težimo da on bude konceptualno što jednostavniji pa se stoga vraćamo na fraktalne skice. One postoje da budu manje realistične od preferiranog modela, ali dovoljno sposobne da zadrže bit svakog tipa tržišnog efekta, od Brownovog gibanja do Noinovog ili Josipovog učinka. Pojasnimo sada ove pojmove.

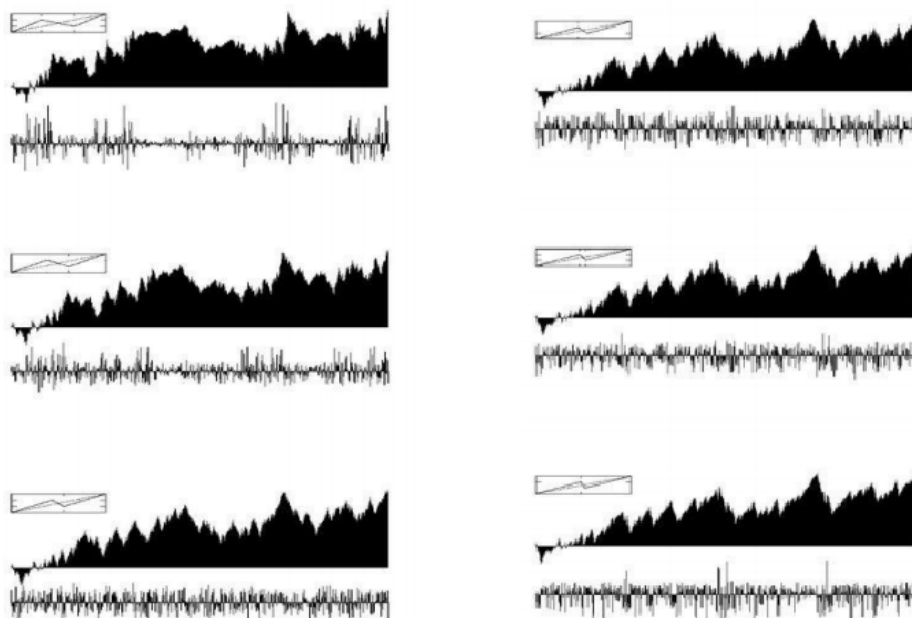
*Noin efekt* je sklonost da postojeći vremenski niz ima nagle i diskontinuirane promjene. Normalna distribucija podrazumijeva kontinuirane promjene u sutavu. Međutim, vremenski

niz koji pokazuje svojstva Hurst statistike može naglo promijeniti razinu, preskačući vrijednosti ili prema gore ili prema dolje. Hurstov eksponent je mjera pristranosti u fraktalnom Brownovom gibanju.

*Josipov efekt* je sklonost da vremenski niz, u kojem je vrijednost varijable na određeni datum usko povezana s prethodnom vrijednošću, ima trendove i cikluse. Dvije njegove temeljne mjere su autokovarianca i koeficijent autokorelacije.

*Skica* financijskog tržišta započinje rastućom, ravnom linijom. Preko linije se uklapa generator oblika munje. Nadalje, svaki put kada se pojavi ravna linija, interpolira se mala kopija generatora na njeno mjesto. Sve se ponovi u sve manjem i manjem mjerilu. Postepeno dobijemo oblik cik-cak grafa. Raznolike oblike dobivamo kada se mijenjaju generatori jer njegov precizan oblik jako utječe na ishod zbog toga što možemo promijeniti koordinate prijelomnih točaka, kao i broj točaka koji idu cik-cak od dvije na tri ili više. Brownov graf ima preciznu vezu između dužine i širine svakog intervala generatoru, takvu da je jedna veličina kvadratni korijen druge. Odabirom nekog drugog stupnja korjenovanja možemo generirati graf koji pokazuje različite stupnjeve dugoročne ovisnosti. Ako dodamo npr. vertikalne skokove, možemo proizvesti grafove s teškim repovima. Moguće je napraviti beskonačan broj raznovrsnih grafova. Neki od njih će biti jako neuredni i nećemo u njima moći prepoznati pravi graf cijena, dok će neki pak biti jako realistični.

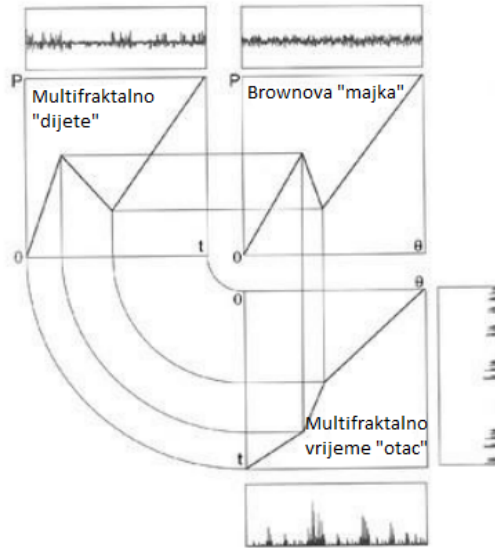
Slikom 5.2 ćemo rekonstruirati različite varijante Brownovog modela. Svaka od njih je dobivena mijenjanjem oblika cik-cak generatora. Kada su prijelomne točke najudaljenije, kao u prvom stupcu, vidimo jako velike fluktuacije baš kao na stvarnom grafu nekih cijena. Kada su točke blizu, i dalje imamo fluktuacije, ali su manje realistične.



Slika 5.2: Panorama financijskih multifraktala.

### 5.3 Multifraktalno vrijeme

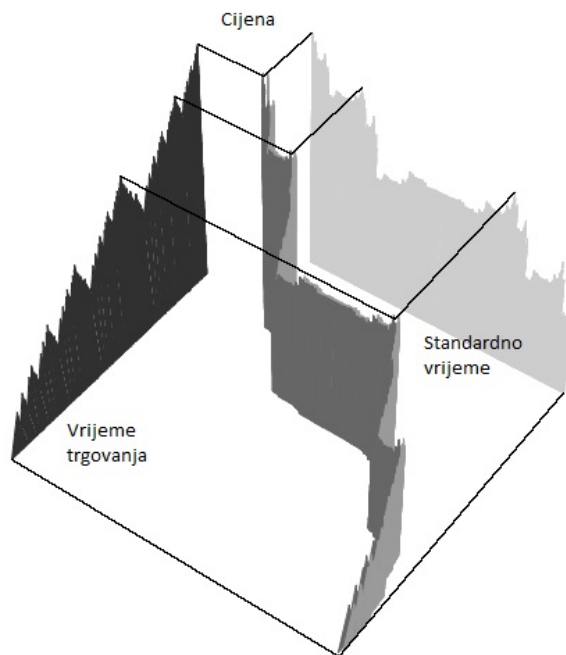
Moguće je dizajnirati generator koji naslijeđuje svojstva neka druga dva generatora. Pokazati ćemo kako dva roditeljska generatora, *otac* i *majka*, stvaraju generator *dijete* koji ima karakteristike oba roditelja. Ovo nas vodi do svestranosti u proizvodnji financijskih fraktala. Na slici 5.3, na osima dijagrama leže oznake  $t$  za vrijeme,  $P$  (Price) za cijenu i  $\theta$  nam označava pomoćno mjerilo koje nazivamo *vrijeme trgovanja*.



Slika 5.3: Konstrukcija multifraktala, kojeg Mandelbrot naziva "The baby theorem".

Ova "obitelj" započinje s roditeljima. Majka standardno vrijeme promijeni u cijenu, dok otac vrijeme promijeni u vrijeme trgovanja. Spojeni zajedno tvore dijete koje uzima očvo vrijeme trgovanja i mijenja ga u cijenu, i to po pravilima koje majka dozvoljava. Na kraju možemo uzeti generator dijete te napraviti puni graf cijena koji je varijanta jednog od ranije pokazanih sa slike. Ovime smo upravo pokazali realističan financijski graf koji je dobiven raspodjelom vremena.

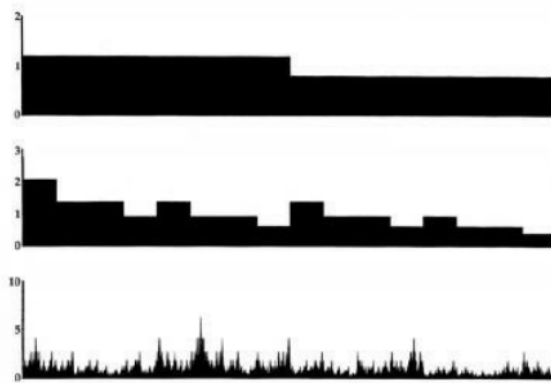
Slika 5.4 dodatno ilustrira prethodno opisano. Na lijevom zidu ove kocke se nalazi fraktalan graf kojeg generira majka. Ono je upravo varijanta skice modela Brownovog gibanja za kretanje cijena. Nazubljeni put na podu po dijagonali predstavlja oca te prikazuje kako se standardno vrijeme deformira u multifraktalno vrijeme trgovanja. Kada se povuku bočne linije od majke vertikalno od oca te projiciraju duž desnog bočnog zida dobijemo financijski graf nastao od generatora koji je naslijedio svojstva prethodna dva generatora, "oca" i "majke".



Slika 5.4: Kocka fraktalnog tržišta.

Spomenuli smo termin raspodjele vremena, odnosno rekli smo da otac deformira standardno vrijeme pa ćemo sada to objasniti. Prije svega navedimo citat Benoit Mandelbrota i Richarda Hudsona iz knjige [12]: “Time does not run in a straight line, like the markings on a wooden ruler. It stretches and shrinks, as if the ruler were made of balloon rubber. This is true in daily life: We perk up during high drama, nod off when bored. Markets do the same.”. U prijevodu, Mandelbrot kaže da vrijeme ne ide ravnom linijom, već se proširuje i smanjuje. Ovo vrijedi u svakodnevnom životu jer smo i mi užurbani kad smo pod pritiskom i stresom, a kad imamo vremena smo smireni, modeli tržišta rade istu stvar. Nastavimo sada s objašnjavanjem raspodjele vremena. Matematički proces koji ovo objašnjava se naziva multiplikativna kaskada. Ovo je termin za tip fraktalne/multifraktalne distribucije točaka koje su proizvedene putem iterativnog i multiplikativnog slučajnog procesa.

Zamislimo sad vrijeme kao neku materiju, specifično zlatnu rudu. Zlato nije jednako distribuirano širom svijeta. Grupira se na pojedinim dijelovima, kao što se akcije na financijskom tržištu grupiraju u različitim vremenskim razmacima. Ovaj efekt možemo oponašati matematički. Pogledamo li mapu bogatstva zlata Južne Afrike, posebice presjek duž pravca istok-zapad, vidjet ćemo da 60% rude leži na zapadnoj polovici, a 40% na istočnoj. Pogledamo li još bliže i ako prepolovimo ove dvije polovice 60% će ležati u najzapadnijoj četvrtini, ili 36% od ukupnog udjela. Ako ovako nastavimo dobiti ćemo dosta neravnomjernu raspodjelu, neki dijelovi će biti bogati rudom, dok drugi neće sadržavati gotovo ništa zlata. Isti princip se može primjeniti za grupiranje vremena u nepravilno razmaknute segmente. Slika 5.5 nam objašnjava prethodno rečeno.



Slika 5.5: Binomna raspodjela vremena.

Gornji pravokutnik je prva aproksimacija, pokazuje 60% zlata lijevo te 40% desno. Ako sada prepolovimo ova dva dijela i nastavimo istim načinom dobijemo nepravilni graf, kao na slici, koji mjestimično ima visoku, a mjestimično nisku koncentraciju zlatne rude. Ako zamislimo da se umjesto rude dijeli vrijeme, dobivamo proces raspodjele vremena o kojem smo pričali.

## 5.4 Multifraktalan model

Prema Mandelbrotu najbolja je prezentacija i objašnjenje načina funkcioniranja tržišta fraktalno Brownovo gibanje multifraktalnog vremena, koje se još naziva i Multifraktalan model povrata sredstava. Osnovna ideja veže se na sve što je rečeno ovim poglavljem. Skica Brownovog gibanja se zamijeni jednadžbom koju računalo može izračunati. Proces trgovanja vremena se izražava preko druge matematičke funkcije  $f(\alpha)$  koja se može podesiti da odgovara širokom rasponu ponašanja tržišta. Ove dvije funkcije zajedno rade skladno, cijena je funkcija vremena trgovanja, koja je je funkcija stvarnog vremena. Kao u prethodnim slučajevima sada se može dobiti dijete te krajnji produkt ima velike fluktuacije, skokove i teške repove, koje smo vidjeli i u primjeru cijena pamuka. Pokazuje se da skaliranje, koje naziva momenti, što je termin za osnovne statističke karakteristike niza cijena, prati skaliranje koje je zahvaćeno funkcijom  $f(\alpha)$ . Dosadašnja istraživanja su pokazala da je ovaj model točan.

Prvo testiranje primjenjivosti modela proveli su u svome doktoratu dva Mandelbrotova studenta, Laurent Calvet i Adlai Fisher. Oni su se fokusirali na globalno tržište razmjene njemačke marke i dolara. Kao što je to bilo kod primjera pamuka, ovaj je također jako privlačio ekonomiste jer je njegovo značenje za globalnu ekonomiju jako veliko. Također, njegovi zapisi su dugački, obilni, pouzdani te lako dostupni. Za istraživanje su koristili stvarne podatke koje je prikupila konzultantska tvrtka iz Zuricha, Olsen and Associates. Prikupili su 1472241 podatka o cijeni unutar jedne godine, i to 1992. – 1993. Model je prošao test, epizode brzih akcija su razasute s intervalima sporog i dosadnog trgovanja. Ako povećamo brze epizode, vidimo da oni imaju podgrupe, odnosno subklustere brzih i sporih podintervala i nastavljajući tako dalje imamo klasičan uzorak multifraktala. Ovo skaliranje se proteže i prati uzorak od 2 sata pa sve do 180 dana. Na kraćim vremenskim intervalima javlja se

novi uzorak, poznat kao tržišna mikrostruktura. Na intervalima dužim od 180 dana drugi efekt mijenja tok podataka, Noin efekt blijedi te se varijabilnost cijena smiruje. Ove dvije točke nazivaju se prijelomne točke te su česte u stvarnim, za razliku od teorijskih podataka. Testiranje su ponovili i s podacima Američke savezne uprave kako bi se uvjerali da prethodni rezultati nisu slučajnost te su opet dobili iste rezultate. Zatim je došlo u pitanje, da li se to događa samo na tim tržištima? Odgovor je bio ne. Testirali su i druga tržišta. Dionice Archer Daniels Midlandsa, Lockheeda, Motorole i United Continental Holdingsa su bile fraktali kao po knjizi. Dionice General Motorsa, U.S. Broad Market Index i tečaj dolar-yen su se pokazali multifraktalima.

Kako bi sve ove ideje mogli pretočiti u stvarni svijet, prvo se jednadžbe trebaju unijeti u računalo te model mora raditi u dva smjera. Prvi je unaprijed, što znači da bi trebali moći konstruirati umjetni graf cijena iz fraktalnog sjemena, kao što smo to napravili sa skicama prije. Drugi smjer je unazad, a po njemu bi trebali moći pomoću analiziranja cijena podataka na računalu procijeniti ključne parametar koje zahtijeva fraktalni model. S ovim vrijednostima možemo pomoću računala rekonstruirati tržište, da bi generirali umjetne nizove cijena koje se razlikuju od pravih, ali prate iste statističke uzorke. Upravo to se i radi s računalnim simulacijama, poput Monte Carlo. Rezultati pomoću ove simulacije statistički su relevantni, odnosno prate iste statističke uzorke.

Da bi mogli donjeti dobre financijske odluke moramo imati dovoljno dobar model za financijsko modeliranje. Ako možemo pronaći suštinu ponašanja dionice General Electric kompanije zadnjih 20 godina, možemo to primjeniti na financijski inženjering. Možemo procijeniti rizik držanja dionice u idućih 20 godina. Možemo izračunati koliki udio trebamo kupiti za naš portfelj, kolika je prava vrijednost opcije s kojom želimo trgovati na tržištu. Mandelbrot kaže da je po njemu najbolji učinak multifraktala to što jedan skup pravila može proizvesti veliku raznolikost ponašanja, ovisno uvjetima. Kaže da je cilj reći puno s jako malo informacija. No, većina financijskih modela govori malo, s puno informacija. Daje se previše podataka, parametara, dugo je vrijeme računanja. Kada nakon takvih izračuna propadnu, u smislu gubitka novca, rijetko će odbaciti taj model, promijeniti će ga i probati popraviti. Tako će on postajati sve kompliciraniji i kompliciraniji. Ali malo po malo, od lošeg početka se napravi model koji zadovoljava neke potrebe. No, ovim modelom se i dalje gubi novac i to ne bi trebalo biti neko veliko iznenađenje. Kao suprotnost ovome, multifraktalan model započinje s nepromijenjivim, fundamentalnim činjenicama ponašanja tržišta. On je ekonomičan, fleksibilan i oponaša stvaran svijet. Mandelbrot kaže da se nada kako će multifraktalna analiza narasti i da će ju prepoznati kao najbolji način upravljanja svjetskim novcem i ekonomijom.

# Poglavlje 6

## Sažetak

U radu se bavimo *Brownovim gibanjem*, slučajnim procesom nazvanim po Robertu Brownu, koji je otkrio da se čestice peluda raspršene u tekućini nasumično gibaju. Osnovna karakteristika ovog slučajnog procesa su nezavisni i *normalno distribuirani* prirasti. Premda su primjene i implikacije Brownovog gibanja brojne i značajne, ono nije pogodno za modeliranje pojava s nezanemarivom vjerojatnošću ekstremnih događaja. To je motivacija za uvođenje *fraktalnog Brownovog gibanja*, kao generalizacije Brownovog gibanja i modela za *stabilne procese*. U radu razmatramo pojmove *fraktala* i *fraktalne dimenzije*. Na primjerima pokazujemo *samosličnost* kao jedno od osnovnih svojstava fraktala. Razmatramo primjenu fraktalnog Brownovog gibanja na financijsko tržište. Najprije razmatramo povijesni problem cijena pamuka, na kojem je zapažena samosličnost u *vremenskim nizovima* cijena. Benoit Mandelbrot je uočio da cijene pamuka ne prate normalnu distribuciju već jednu od distribucija s *teškim repom*. Definiramo pojmove *multifraktala* i *multifraktalnog vremena*, na osnovu kojih izvodimo multifraktalni model tržišta.

**Ključne riječi:** fraktal, Hausdorffova dimenzija, samosličnost, Brownovo gibanje, fraktalno Brownovo gibanje, multifraktalno vrijeme, multifraktalan model



# Poglavlje 7

## Abstract

In this thesis we study Brownian motion, a random process named by Robert Brown who discovered that the pollen particles dispersed in the liquid move constantly and randomly. The basic characteristics of this random process are independent and normally distributed increments. Even though the applications and implications of Brownian motion are numerous and significant, it is not suitable for modeling a phenomenon with an unimaginable probability of extreme events. This is the motivation for introducing fractal Brownian motion, as a generalization of Brownian motion and model for stable processes. In the thesis we discuss the concepts of fractal and fractal dimensions. In examples, we show self similarity as one of the basic characteristics of a fractal. We consider the application of fractal Brownian motion to the financial market. First of all we consider the historical problem of cotton prices which is characterized by self similarity in time series of prices. Benoit Mandelbrot noticed that cotton prices do not follow the normal distribution but one of the distributions with the heavy tail. We also define terms multifractal and multifractal time, on the basis of which we are conducting a multifractal model of the market.

**Keywords:** fractal, Hausdorff dimension, self similarity, Brownian motion, fractal Brownian motion, multifractal time, multifractal model

# Poglavlje 8

## Životopis

Rođena sam 27. svibnja 1990. u Vukovaru. U Osijeku sam pohađala osnovnu školu "Dobriša Cesarić" te 3. gimnaziju Osijek. 2014. godine završavam preddiplomski studij na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Završni rad, pod nazivom *Osnovni teorem aritmetike*, sam radila pod mentorstvom doc. dr. sc. I. Matića. Nakon toga upisujem diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. U sklopu predmeta Stručna praksa odradila sam praksu u Kreditnoj uniji NOA.

# Bibliografija

- [1] M. F. Barnsley, A. Vince: *Self-Similar Polygonal Tiling*, The American Mathematical Monthly, Vol. 124, No. 10 (2017), 905-921
- [2] M. F. Barnsley: *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc; Prvo izdanje, 1988
- [3] M. F. Barnsely, M. Frame: *Glimpses of Benoit B. Mandelbrot*, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 59, No. 8 (2012), 1056-1063
- [4] M. F. Barnsely, M. Frame: *The influence of Benoit B. Mandelbrot on Mathematics*, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 59, No. 9 (2012), 1208-1221
- [5] M. Benšić, N. Šuvak: *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014
- [6] Richard Courant, Herbert Robbins, Ian Stewart: *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1941
- [7] K. Falconer: *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, England, 1990
- [8] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Third edition, John Wiley & Sons, New York, 1968
- [9] T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader: *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, 2008
- [10] B. Mandelbrot: *Gaussian Self-Affinity and Fractals*, Springer-Verlag, New York, 2002
- [11] B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1982
- [12] B. Mandelbrot, R. L. Hudson: *The (mis)behavior of markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books, New York, 2004
- [13] P. Mortes, Y. Peres: *Brownian Motion*, Cambridge University Press, Cambridge 2008
- [14] N. Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002