Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Ivana Bubić**

# Život i djelo Paula Erdősa

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Ivana Bubić**

# Život i djelo Paula Erdősa

Diplomski rad

Voditelj: Doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2012.

# Sadržaj

**1. Uvod** **1**

**2. Paul Erdős** **2**

2.1. Od "čuda od djeteta" do "matematičkog doajena" . . . . . 2

2.2. O Erdősovu odnosu s majkom i nekim suradnicima . . . . . 14

2.3. "Odlazak" ne znači i "umiranje" . . . . . 16

**3. Erdősov broj** **18**

**4. Neki lijepi rezultati** **21**

4.1. Beskonačnost skupa prostih brojeva . . . . . 24

4.2. Bertrandov postulat . . . . . 25

4.3. Binomni koeficijenti gotovo nikad nisu potencije . . . . . 29

4.4. Teorem Erdős - Ko - Rado . . . . . 33

**Sažetak** **38**

**Summary** **39**

# 1. Uvod

Znatiželja da pobliže upoznamo život i djelo matematičara koji je dao ogroman doprinos matematici 20. stoljeća te koji je svojim načinom djelovanja ostavio tragove za buduće generacije i buduća traganja za matematičkom istinom nagnali su nas da u ruke uzmemo dvije knjige koje su bile osnova za pisanje ovoga rada. Jednu vrstu "odskočne daske" za pisanje poglavlja *Paul Erdős* dala nam je knjiga "The man who loved only numbers". Ovo poglavlje podijelili smo na tri dijela koja opisuju život Paula Erdősa. Riječ je o pododjeljcima *Od "čuda od djeteta" do "matematičkog doajena"*, *O Erdősovu odnosu s majkom i nekim suradnicima* te *"Odlazak" ne znači i "umiranje"*. Valja spomenuti da su u pododjeljku *Od "čuda od djeteta" do "matematičkog doajena"* navedeni i neki bitni teoremi poput Teorema o prostim brojevima te je jedan dio posvećen otvorenim problemima Paula Erdősa. U poglavlju *Erdősov broj* definiramo Erdősov broj, dva različita načina na koje ga ljudi određuju te na zornom prikazu objašnjavamo kako se dodjeljuje Erdősov broj dva. Osnovu za pisanje poglavlja *Neki lijepi rezultati* nalazimo u knjizi "Proofs from THE BOOK" iz koje smo odabrali nekoliko lijepih rezultata za koje je dokaze dao Erdős ili je svojom genijalnošću i originalnim idejama druge matematičare usmjerio u pravom smjeru. Navodimo Erdősove dokaze *Teorema o beskonačnosti skupa prostih brojeva* i *Bertrandova postulata*, potom se jednim rezultatom nadovezujemo na Bertrandov postulat. Posljednji dio se odnosi na *Teorem Erdős - Ko - Rado* te dokaz Gyula Katone.

# 2. Paul Erdős

Slika 1: *Paul Erdős*

Paul Erdős, čovjek koji je svoje vjerovanje utjelovio na matematičkoj istini i nikada nije sumnjao u važnost i apsolutnost svoje potrage za matematičkom istinom. Matematičar koji je dao ogroman doprinos matematici 20. stoljeća, a način na koji je djelovao, jedinstven samo i isključivo njemu, ostavio je tragove za buduće generacije i buduća traganja za matematičkom istinom. Sebe, svoje ogromne talente i energiju u potpunosti je posvećivao Hramu Matematike. Kroz povijest se pojavljaju osobe koje su odbacivale obiteljsko bogatstvo kao oblik mučenja, tako je i Erdős je bio čovjek koji je sav svoj zarađen novac davao u humanitarne svrhe, skitnicama, rodbini u nevolji, poznanicima i slično. Skrbio se za školovanje mnogih matematičara. On jednostavno nije trebao taj novac. Znao je reći: "Vlasništvo je smetnja.". Unatoč mnogim tragedijama koje su prožimale njegov život uvijek ga je uspijevao konstruirati tako da je iz njega izvlačio maksimalnu količinu sreće. Njegov suradnik, matematičar Tom Trotter, smatrao je da je Paul Erdős bio jedan od onih vrlo posebnih genija, vrsta koja se rijetko pojavljuje (prema [11], str. 3).

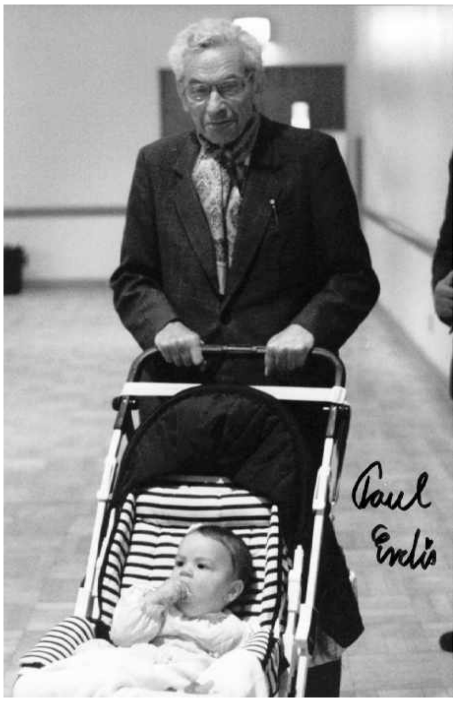
## 2.1. Od "čuda od djeteta" do "matematičkog doajena"

Zapitamo li se ikada koje je značenje riječi genijalnost, darovitost ili talentiranost, jesu li to istoznačnice? Tko su djeca koja nose ove osobine? Erdős je zasigurno bio čovjek koji je uz mnoge druge osobine nosio i ove tri još od ranog djetinjstva. U [15] Ellen Winner navodi da je darovito dijete dijete rođeno s neuobičajenom sposobnošću da svlada određeno područje, a genij je ekstremnija verzija darovitog djeteta koje stvara na stupnju odrasle osobe iako je još uvijek dijete. Biti talentiran ili imati talenta u starih naroda poput Hebreja i Grka značilo je biti osoba s osjećajem za mjeru rezultat čega je duhovno bogatstvo. "Čudo od djeteta", "matematički doajen" − Paul Erdős − nosio je sve ove osobine u sebi i sa sobom tijekom cijelog života. Već u ranom djetinjstvu, kao trogodišnjak, pokazao je neuobičajene sposobnosti kao što je logičko zaključivanje i povezivanje činjenica, kako u životnim pitanjima tako i u području u kojem je kasnije postao stručnjak, matematici.

Osoba s pomalo čudnim smislom za humor, zabavan u društvu, s jedne strane zbog čudnog engleskog jezika koji je govorio, a s druge strane zbog anegdota kojima je olakšavao život sebi i drugima. Jedna od anegdota koje je Paul često znao pričati je anegdota o Bogu. Zvao ga je SF (Supreme Fascist). Čovjek iz oblaka uvijek ga je znao "mučiti" sakrivajući mu naočale, kradući mu njegovu mađarsku putovnicu ili u najgorem slučaju zadržavajući za sebe elegantna rješenja svih vrsta intrigantnih matematičkih problema. Paul Erdős je govorio: "SF nas je stvorio da bi uživao u našoj patnji. Što prije umremo, tim više prkosimo njegovim planovima." Prema Erdősu, postoji stara rasprava o tome kreira li se matematika ili se otkriva, odnosno, da li matematičke istine postoje čak i ako ih ljudska vrsta još ne zna. Za one koji vjeruju u Boga odgovor je očit, matematičke istine se nalaze u SF-ovom umu, a matematičari ih samo ponovno otkrivaju. Znao je reći: "Nisam kvalificiran da govorim o tome postoji li Bog ili ne. Ja nekako sumnjam da postoji. Ipak, uvijek govorim da SF ima transfinitnu knjigu koja sadrži najbolje dokaze svih matematičkih teorema, dokaze koji su elegantni i savršeni.". Prema Erdősu svaka stranica Knjige imala je najelegantnije rješenje nekog matematičkog problema. Bit matematičke elegancije za njega je bilo razumjeti zašto je nešto istina. Na pitanje zašto su brojevi lijepi, odgovarao je: "To je kao da pitate zašto je Beethovenova Deveta simfonija lijepa. Ako oni nisu lijepi, onda ništa nije lijepo." Također je znao dodati: "Ne morate vjerovati u Boga, ali bi trebali vjerovati u Knjigu.". Najveći kompliment koji je Erdős znao dati kolegi s kojim je surađivao bio je: "To je ravno iz Knjige!", što je za njega značilo da je dokaz vrlo lijep i elegantan i da je ta osoba otvorila još jednu stranicu u SF-ovoj knjizi što je i sam učinio mnogo puta za života, pretpostavljajući i dokazujući. Sa sigurnošću možemo reći da je bio najplodniji matematičar što potvrđuje broj objavljenih znanstvenih radova i broj ljudi s kojima je surađivao.

Prije nego je umro, u dobi od 83 godine, uspio je razmišljati o više problema nego ijedan matematičar u povijesti. U vrijeme kada je Hoffman napisao knjigu o Erdősu, broj znanstvenih radova koje je napisao ili u kojima je bio koautor dosegao je 1475. Procjenjuje se da bi posmrtno trebalo biti objavljeno 50 do 100 radova osoba koje su surađivale sa Erdősom, a kojima je Erdős bio koautor. Najnovija istraživanja objavljuju brojku od oko 1525 objavljenih radova na kojima je radio (prema [16]). U zadnjim godinama svoga života objavljivao je i do 50 radova godišnje, što je više nego što dobar matematičar napiše za vrijeme čitavog života. Time je dokazivao da matematika nije igra samo za mladog čovjeka. Bio je čovjek koji je stalno mislio o matematici, teoremima, dokazima, pretpostavkama... u punom smislu riječi živio je matematiku. Uvijek je nastojao što više vremena posvećivati matematici. Nije imao ženu ni djecu, stalan posao niti dom za koji bi se vezao. Imao je ono što ga je hranilo i ispunjavao – matematiku. Sve što je nosio sa sobom na svoja brojna putovanja bila su dva poluprazna kofera u kojima se nalazilo nešto rublja, radio i obavezno bilježnica za njegove bilješke. Jedino vlasništvo koje mu je zapravo bilo bitno bili su njegovi matematički podsjetnici.

U potrazi za novim matematičkim talentima i matematičkom istinom proputovao je uzduž i poprijeko četiri kontinenta, bio je čest posjetilac dvadeset i pet zemalja širom svijeta. Kao pomahnitao putovao je od zemlje do zemlje, od jednog matematičkog centra do drugog, od fakulteta do fakulteta. Zalazio je i u vrtiće, osnovne i srednje škole u potrazi za mladim talentima. Kada bi našao takvog epsilona – Erdősov izraz za djecu – pobrinuo bi se da mu osigura dobrog mentora kako epsilonov talent ne bi propao. Imao je izrazit osjećaj za ljude, za djecu. U svom poslu kojim se bavio uvijek je uspijevao odvojiti vremena da se raspita o zdravlju prijateljeve majke, prijateljičinog djeteta i slično. U tome mu je pomagala njegova sposobnost izvršavanja više stvari u isto vrijeme. Bio je specifičan i po načinu na koji je dolazio u nečiju kuću. Samo bi se pojavio na vratima kolege matematičara, često nenajavljen, i izjavio: "Moj mozak je otvoren.", što je za njega značilo da je on spreman raditi na najizazovnijim matematičkim problemima. Zadržao bi se dan – dva i potom kretao dalje. Njegov moto je bio: "Another roof, another proof.". Što potvrđuje još jedan njegov nadimak "Matematički hodočasnik". Odrekao se fizičkih užitaka i materijalnih imetaka za mislilački život posvećen samo jednoj uskoj misiji, otkrivanju matematičke istine.

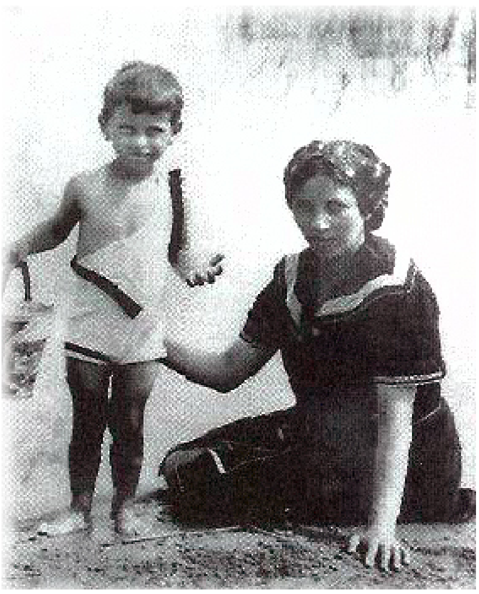


Slika 2: *Paul Erdős s epsilonom*

Premda se bavio matematikom od treće godine života, u zadnjih dvadeset i pet godina – nakon smrti majke – radio je i do 20 sati dnevno, održavajući se uz pomoć amfetamina, kofeinskih tableta i jake kave. Često je znao govoriti izreku koja se pripisuje i njemu i mađarskom matematičaru Alfrédu Rényiju, da je matematičar stroj za pretvaranje kave u teoreme. Kada su ga prijatelji molili da se malo zaustavi i uspori, kao papagaj je odgovarao: "Bit će mnogo vremena za odmaranje u grobu." Bio je osoba koja nije dopuštala ničemu da stane na put napretku matematike.

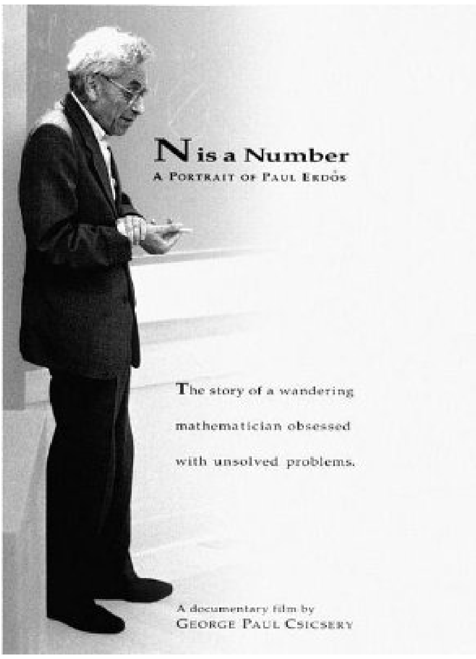
U dobi od tri godine shvatio je da će umrijeti, a puno kasnije je postao opsjednut starom dobi. Govorio je da postoje tri znaka senilnosti. Prvi je kada čovjek počne zaboravljati svoje teoreme, drugi kada počne zaboravljati zakopčati rasporak, a treći znak je kada se zaboravi otkopčati. Nikada nije postigao niti jedan od ova tri znaka. Što se prvoga tiče, znao je bolje od ikoga koji teorem je s kime, u kojem časopisu i koje godine objavio. Znao je s kim, o čemu i kada je pričao, a ako bi nakon dvije godine ponovno vidio osobu s kojom nije završio matematičku ili kakvu drugu raspravu, samo bi nastavio razgovor tamo gdje su stali kad su se zadnji put vidjeli.

Kao mladić, za vrijeme rata, smislio je svoj poseban način komunikacije koji su s vremenom prihvaćali i drugi matematičari. Žene je zvao "šefovima", muškarce "robovima", ukoliko ste bili oženjeni on bi rekao da ste "zarobljeni", a ako biste se ponovno vjenčali on bi rekao da ste "ponovno zarobljeni". Glazba je za Paula bila "buka", alkohol "otrov", a "epsilonima" je zvao djecu. Budući da je u matematici to simbol kojim se označavaju malene veličine znao je reći i: "Daj mi epsilon otrova!" kada je željeo popiti malo vina. Držanje predavanja iz matematike zvao je "propovijedanjem". Kako u to vrijeme nisu smjeli otvoreno pričati na ulicama Budimpešte smislio je i nazive za Sjedinjene Američke Države i Sovjetski Savez, "Sam" i "Joe", redom. Za osobe koje su prestale raditi matematiku Erdős je govorio da su "umrle", a kada bi netko zbilja umro on bi rekao da je ta osoba "otišla".



Slika 3: *"Čudo od djeteta" s majkom*

Erdős Paul (Pál), rođen 26. ožujka 1913. u Budimpešti. Dolazi iz Židovske obitelji Englănder, sin je dvoje srednjoškolskih učitelja koji su ga uveli u svijet matematike. Otac Lajos i majka Anna imali su dvije kćeri, stare 3 i 5 godina, koje su umrle od šarlaha u vrijeme kada je Paul Erdős rođen. Njegova majka se nikada nije oporavila od gubitka niti je o tome željela pričati. Jedna od prvih u nizu tragedija Erdősovog života rezultirala je izrazito zaštitničkim stavom njegovih roditelja prema njemu samom. Rijetko su ga puštali izvan kuće, nije išao u osnovnu školu, odgajala ga je i obrazovala njegova odana majka i prema potrebama učitelj koji je dolazio u kuću Erdősovih. Kada je izbio Prvi svjetski rat Lajosa su zarobili Rusi i odveli u sibirski zatvor gdje je proveo šest godina. Anna je neko vrijeme bila učiteljica, ali je nakon rata bila smijenjena. Budući da mu je majka radila daleko od doma, a otac bio u zatvoru, Erdős je razdoblje od treće do šeste godine života proveo je s njemačkom odgojiteljicom. Postao je vješt s brojevima još kao dijete, proučavajući kalendar ne bi li razumio koliko je još dana preostalo prije nego li mu se majka vrati kući na praznike. Za sebe je govorio da je naučio čitati čitajući matematičke knjige i da se u vrlo ranoj dobi zaljubio u brojeve. Bio je čudo od djeteta koje je zabavljalo majčine prijatelje preračunavajući napamet koliko imaju godina u sekundama. Kao četverogodišnjak otkrio je negativne brojeve te je mogao množiti četveroznamenkaste brojeve. Tijekom jednog intervjua za dokumentarni film "N is a number" izjavio je: "Jednom sam izračunao koliko je Sunce udaljeno, jer mi je majka rekla koliko dugo bi trebalo vlaku da dođe do Sunca, kad bi se moglo putovati vlakom. Imao sam vrlo dobar osjećaj za brojeve kad sam bio malo dijete."

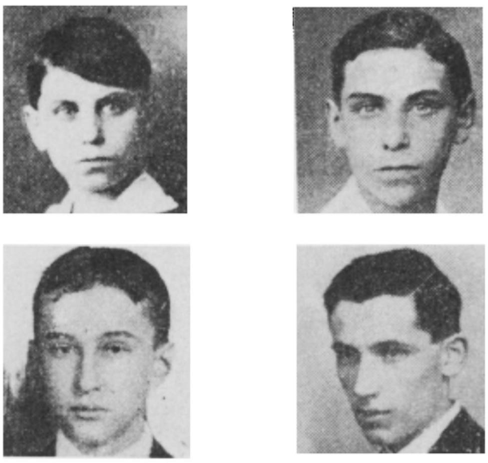



Slika 4: *Paul Erdős*

Dokumentarni film "N is a number: A portrait of Paul Erdős" sniman je tijekom 4 godine (u razdoblju od 1988. do 1991. godine). Film je producirao, režirao i uredio George Paul Csicsery. U sat vremena, koliko film traje, obuhvaćen je život Paula Erdősa te neki njegovi rezultati. Najzanimljiviji su dijelovi u kojima Erdős govori o svom životu, radu, suradnicima i slično. Većina Erdősovih citata koji su navedeni u ovom radu prijevod su onoga što je Paul Erdős rekao za vrijeme snimanja filma. U filmu se pojavljuju neki Erdősu bliski suradnici kao što su Ronald Graham, Vera T. Sós, Joel Spencer, Márta Svéd, Tibor Gallai, Béla Bollobás, Fan Chung te mnogi drugi. Gledajući ovaj film osoba koja je čitala o velikom matematičaru Paulu Erdősu može dobiti uvid u ono što je on bio. Treba napomenuti da je film nastao na osnovu članka Paula Hoffmana "The man who loves only numbers," koji je Hoffmanu bio osnova za knjigu "The man who loved only numbers."

Za vrijeme boravka u zatvoru Erdősov otac je naučio engleski jezik iz knjiga, a kada se 1920. godine vratio kući, odlučio je naučiti i Paula engleski jezik. "Zato je moj naglasak tako loš, to je zato što sam ja učio engleski od nekog tko ga nikada nije čuo od izvornog govornika.", govorio je. Naglasak mu se nije popravio ni kada je počeo živjeti u Velikoj Britaniji i Americi. Béla Bollobás, jedan u nizu Erdőevih suradnika i prijatelja u [4] navodi da je nakon 1922. godine Erdős je krenuo u Tavaszmezo gimnaziju koju je iz godine u godinu pohađao kao redovit ili privatan učenik. Nakon četvrte godine pohađao je školu Sv. Stephena (Szent Istvan Gymnazium) gdje je njegov otac bio srednjoškolski učitelj. Svo vrijeme je dobivao značajnu poduku od svojih roditelja.

Slika 5: *"Čudo od djeteta" s oba roditelja*



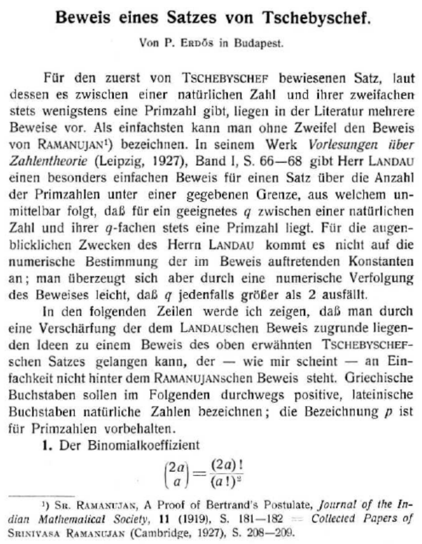
Slika 6: *Slike mladog Erdősa izdane u matematičkom časopisu KőMaL. U prvom redu Erdős u dobi 14 i 17 godina, u drugom redu Erdősovi kolege matematičari Paul Turán i Tibor Gallai. Slika preuzeta iz [3].*

Matematički časopis za srednje škole (KőMaL) je u to vrijeme bio uspješan časopis u kojem su svaki mjesec objavljivali određen broj matematičkih problema za svaku dobnu grupu, a čitatelje su pozivali da im predaju svoja rješenja od kojih su najbolja bila objavljivana pod imenom osobe koja ih je riješila. Mladi Erdős postao je vatren čitatelj ovoga časopisa, a njegova ljubav prema matematici uvelike je pridonijela zanimljivim problemima koji su se našli u časopisu. Kada je sa sedamnaest godina pristupio Sveučilištu znanosti u Budimpešti upoznao je skupinu od desetak vršnjaka predanih i posvećenih matematici. Ubrzo je postao žarište ove skupine, a duge matematičke diskusije poticale su ga u velikoj mjeri. Skupina je uključivala Paula Turána, Tibora Gallai, George Szekeresa, Esther Klein, Mártu Svéd i još nekoliko velikih matematičara. Svi oni su surađivali sa Paulom gotovo cijeli njegov život i većina ih nosi Erdősov broj 1 prema šali koju su smislili njegovi prijatelji matematičari.

Za vrijeme studentskih dana Erdős je većinom radio na teoriji brojeva, dobivši više značajnih rezultata. Jedan od tih rezultata valja posebno istaknuti. Riječ je dokazu Bertrandova postulata, koji glasi:

*"Za svaki $n \geq 1$, postoji prost broj takav da je $n < p \leq 2n$."*

Prema [2], prije Erdősa dokazali su ga Joseph Bertrand (za $n < 3000000$), Pafnuty Chebyshev (za svaki $n$) i Ramanujan. Ovaj dokaz je bio temelj njegove doktorske disertacije; dao ga je kao student druge godine – sa nepunih dvadeset godina. Time je zaslužio otvaranje svoje prve stranice u SF−oj Knjizi. Dokaz je bio elegantan i ono što je on drugima znao reći "Ravno iz Knjige". Fakultet je završio dvije godine kasnije u dobi od 21 godine, a njegovo ime već tada bilo je dobro poznato među vodećim matematičarima teorije brojeva. U to vrijeme surađivao je sa više matematičara u Engleskoj, uključujući Louisa Mordella, Richarda Radoa te Harolda Devenporta.



**Beweis eines Satzes von Tschebyschef.**

Von P. Erdős in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyschef bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von Ramanujan[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr Landau einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes $q$ zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer $q$-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn Landau kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß $q$ jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem Landauschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten Tschebyschefschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachkeit nicht hinter dem Ramanujanschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung $p$ ist für Primzahlen vorbehalten.

**1.** Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

[1]) Sr. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, **11** (1919), S. 181—182 = *Collected Papers of* Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 208—209.

Slika 7: *Slika predstavlja prikaz prve stranice Erdősovog dokaza Bertrandovog postulata izdanog 1932. godine. Slika je preuzeta iz [6].*

Godine 1934. na Mordellov poziv otišao je iz Mađarske u Manchester, ne znajući da nikada više neće trajno živjeti u zemlji u kojoj je rođen. Rekao je: "Bio sam Židov, a Mađarska je bila antifašistička zemlja." Došavši u Manchester pridružio se grupi sjajnih matematičara i time je bio oduševljen. Dobio je dozvolu da pod Mordellovim vodstvom može vršiti istraživanja i uskoro je počeo pisati radove zapanjujućom brzinom. Četiri godine je proveo u Engleskoj na poslijedoktorskim studijima. Prema Bollobásu od dolaska u Englesku jedva da je ikada spavao u istom krevetu sedam uzastopnih noći, često je napuštao Manchester odlazeći na Cambridge, u London ili u Bristol u posjet kolegama na drugim fakultetima. Već tada se mogla vidjeti njegova snažna želja i volja za putovanjima po svijetu u potrazi za matematičkom istinom. Stvorio je velika prijateljstva s brojnim matematičarima i boravak u Engleskoj za njega je bio veliko matematičko zadovoljstvo. Privatno nije bio ispunjen, nedostajala mu je Mađarska, a više od svega roditelji. "Bio sam bolestan za domom.", govorio je. Godine 1938. prihvatio je stipendiju koju mu je ponudio Institut za napredna istraživanja u Princetonu. Nakon godinu dana boravka u Sjedinjenim Američkim Državama stipendiju su mu produžili na samo šest mjeseci, smatrali su ga "čudnim i nekonvencionalnim" no za njega je to bilo matematički najproduktivnije razdoblje[1], što je i sam rekao tridesetak godina kasnije. U Sjedinjenim Američkim Državama proveo je gotovo deset godina. Ratne godine su za njega bile izrazito teške, sve je više patio za domom, za obitelji i prijateljima matematičarima koji su ostali u Mađarskoj. Imao je poteškoća s kontaktiranjem roditelja u Budimpešti, a kada bi se čuli vijesti nisu bile dobre. Erdősov otac Lajos umro je u kolovozu 1942. od srčanog udara, a baka mu je umrla 1944 godine. Mnoge njegove rođake ubili su nacisti. I obitelj i Paul su strahovito patili, nisu mogli kontaktirati od 1941. do 1944. godine.

Daleko od doma ipak je uspijevao baviti se matematikom, u čemu ga gotovo cijeloga života ništa nije spriječavalo. Po odlasku iz Princetona započela su njegova putovanja. Kada je prvi puta počeo putovati više nije prestajao. Posjetio je Philadelphiju, Purdue, Notre Dame, Stanford, Syracuse... Osim mnogobrojnih važnih radova koje je napisao sam, surađivao je sa sve više i više matematičara s kojima je objavljivao zajedničke radove. Neki od njih su Mark Kac, Aurel Wintner, Kai Lai Chung, Ivan Niven, Arye Dvoretzky, Shizuo Kakutani, Arthur A. Stone, Leon Alaoglu, Irving Kaplansky, Alfred Tarski, Gabor Szegő, William Feller, Fritz Herzog, George Piranian i drugi. Suradnju je nastavio i sa Paulom Turánom, Haroldom Devenportom, Chao Kohom i Tiborom Gallaijem (Grűnwald). Četrdesetih godina prošloga stoljeća surađivao je sa Stanislawom Ulamom, matematičarem koji se bavio teorijom skupova. Ulam se prisjeća: "U njegovim očima se dalo vidjeti da je uvijek razmišljao o matematici, proces koji je mogao biti prekinut samo njegovim pesimističnim izjavama o događajima u svijetu, politici... Ako bi mu kakva zabavna misao pala na pamet, skočio bi, lupio rukama i ponovno sjeo."

Nije bio od onih matematičara koji su svoje znanje držali samo za sebe, naprotiv, bio je vrlo velikodušan kada bi se našao u situaciji da može dijeliti svoje matematičke ideje s kolegama. Njegov cilj nije bio biti prvi u dokazivanju nečega, više je volio vidjeti da je netko nešto dokazao, s njim ili bez njega. Isto tako možemo reći da je stvorio velik broj matematičara. Neki od njih su Béla Bollobás, Louis Pósa i David Williamson. Bio je odličan u postavljanju problema, a imao je izrazito veliku sposobnost da formulira probleme bilo koje težine. Uvijek je postavljao prava pitanja, štoviše, postavljao ih je i pravim osobama. Znao je bolje od osoba kojima je zadavao probleme za što su sposobni,

[1]Popis radova kao i svi radovi objavljeni do 1990. godine mogu se vidjeti na web stranici Instituta matematike Alfréd Rényi [17].

odnosno, rješavanjem problema koji bi vam zadao naučili bi puno više nego što ste prije znali. Važna značajka problema koje je postavljao Erdős je da se za njihova rješenja moglo dobiti novčanu nagradu. Nagrade indiciraju na težinu problema koje je zadavao, bile su u rasponu od nekoliko dolara za jednostavnije matematičke probleme do nekoliko tisuća dolara za probleme koje je smatrao da su bili teški i matematički značajni. Velik je broj otvorenih pitanja za koja je Erdős za života nudio nagrade, a danas je za isplaćivanje nagrada zadužen Ronald Graham. Neka od otvorenih pitanja mogu se pogledati u [5], a odnose se na probleme iz područja teorije grafova. Članak o kojem govorimo napisala je Fan Chung s ciljem iskazivanja otvorenih matematičkih problema Paula Erdősa, nalaženja izvora i osiguravanja referenci koje se odnose na ove probleme. Veliko blago koje je Paul Erdős ostavio iza sebe jesu brojni riješeni i neriješeni problemi. Neriješeni problemi prožimaju mnoga područja matematike kao što su teorija brojeva, teorija grafova, vjerojatnost, geometrija, algoritmi i dr. Riješen ili djelomično riješen Erdősov probem obično vodi otvaranju novih pitanja, obično u novim smjerovima. Kroz probleme koje je ostavio otvorenima njegova ostavština se obnavlja, posebno ukoliko rješenje nekog otvorenog problema vodi otvaranju, na primjer, tri nova. Matematički možda i najznačajniji problemi za koje je Erdős nudio novac su Erdősova pretpostavka o aritmetičkim nizovima za koju je nudio nagradu od 5 000 dolara te Collatzova pretpostavka, poznata i pod nazivom $3n + 1$ pretpostavka za koju je nudio nagradu od 500 dolara. Erdősova pretpostavka o aritmetičkim nizovima glasi:

*"Ako suma recipročnih vrijednosti članova podskupa A skupa prirodnih brojeva divergira, tada A sadrži proizvoljno dug aritmetički niz, odnosno ako vrijedi*

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} = \infty$$

*tada A sadrži aritmetički niz proizvoljne duljine."*

Ukoliko se ispostavi da je ova pretpostavka istinita nekoliko drugih otvorenih problema iz područja teorije brojeva bit će riješeno.

Dr. Straus je rekao: "U našem stoljeću, u kojem svijetom snažno dominiraju 'graditelji teorija', on ostaje princ među onima koji rješavaju probleme i apsolutni monarh među onima koji postavljaju probleme. Erdős je Euler našeg vremena.". Više od šezdeset godina bio je svjetski najpoznatiji matematičar koji je rješavao i postavljao probleme, neusporediv s drugima. Zvali su ga zapadni Ramanujan, Euler modernog vremena, Mozart matematike. Dvije su značajke njegovog matematičkog djelovanja: vladanje elementarnim metodama i zagovaranje slučajnih metoda. Počevši sa svojim prvim radom Erdős je zagovarao elementarne metode u različitim granama matematike. Iznova je pokazivao da elementarne metode uspijevaju protiv velikih čuda. Njegov stil je bio raditi na mnogim problemima odjednom, s više ljudi u isto vrijeme. Okupio bi ih u svojoj hotelskoj sobi ili u kući nekog kolege matematičara i kružio od matematičara do matematičara raspravljajući sa svakim o drugom matematičkom problemu. Kada bi primjetio da nekom od kolega matematičara lutaju misli, opominjao je riječima: "Bez nedozvoljenih misli.".

Za Erdősa je matematika bila jedina beskonačna ljudska aktivnost. Za njega je bilo razumljivo da ljudski rod može naučiti sve u fizici ili bioligiji, ali što se matematike tiče bio je siguran da to nije moguće jer je predmet beskonačan. Govorio je: "Brojevi su sami po sebi beskonačni. Zato je matematika stvarno moj jedini interes." Prosti brojevi su bili njegovi intimni prijatelji, uz njih je proučavao prijateljske brojeve, savršene brojeve itd. te je vezano za to dao brojne rezultate. Dokazao je elementarnim metodama teorem koji se pripisuje Euklidu, a glasi:

*"Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva."*

Osim toga valja spomenuti i Teorem o prostim brojevima za koji je godine 1948. Erdős dao elementaran dokaz. Opišimo ukratko ovaj povijesno izuzetno važan problem u teoriji brojeva. Teorem o prostim brojevima daje uvid u to kako su prosti brojevi distribuirani u skupu prirodnih brojeva. U traženju zakona koji kontrolira distribuciju prostih brojeva, odlučujući korak je bio kada su matematičari digli ruke od uzaludnih pokušaja da pronađu jednostavnu matematičku formulu koja daje sve proste brojeve ili koja daje broj prostih brojeva u prvih $n$ prirodnih brojeva. Umjesto toga su ispitivali prosječnu distribuciju prostih brojeva među prirodnim brojevima. Prosječna udaljenost između dva uzastopna prosta broja u blizini danog broja $n$ aproksimira se prirodnim logaritmom od $n$. Aproksimacija se poboljšava što je $n$ veći. Prvi koji se ovime intenzivnije bavio bio je Carl Friedrich Gauss koji je u potragu za formulom koja daje asimptotsku distribuciju prostih brojeva krenuo kada je imao petnaest godina, 1792. godine. Težak posao doveo ga je do rezultata te je dao prvu formulu koja predviđa distribuciju prostih brojeva. Gauss ovu formulu poznatu pod nazivom Teorem o prostim brojevima nikada nije dokazao te su stoljeće kasnije, neovisno jedan o drugome, 1896., to učinili Jacques Hadamard i Charles de la Vallée Poussin. Kada je imao dvadeset godina, Paul Erdős je izjavio da će dokazati veliki Teorem o prostim brojevima, elementarnim metodama, koristeći Eratostenovo sito. Dvadeset godina kasnije to je i napravio zajedno s Atle Selbergom.

**Definicija 2.1** *S $\pi(x)$ ćemo označavati broj prostih brojeva $p$ takvih da je $p \leq x$.*

**Teorem 2.1** *(***Teorem o prostim brojevima***)*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}=1 \tag{2.1}$$

Koristeći asimptotsku notaciju formulu (2.1) zapisujemo ovako:

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}.$$

Godine 1951. Erdős je dobio Cole Prize nagradu za ovaj rezultat[2]. Osim ove nagrade dobio je 1983. godine nagradu Wolf Prize za svoje brojne doprinose u teoriji brojeva, kombinatorici, vjerojatnosti, teoriji skupova i matematičkoj analizi. Kad bi Guinnessova knjiga rekorda imala kategorije povezane sa matematičkim aktivnostima, Paul Erdős bi bio rekorder u kategorijama kao što je postavljanje nekoliko tisuća matematičkih problema, milijuni proputovanih milja, desetci tisuća održanih matematičkih rasprava, tisuće različitih kreveta u kojima je spavao, tisuće različitih predavanja održanih na različitim sveučilištima, a treba spomenuti i stotine matematičara kojima je pomogao i s kojima je surađivao.

Brojna su područja matematike kojima se bavio. Mogu se podijeliti na:

- Teorija brojeva
- Teorija grafova
- Kombinatorika
- Diskretna matematika
- Kombinatorna geometrija
- Teorija skupova
- Matematička analiza
- Teorija aproksimacije
- Teorija vjerojatnosti

Prema nekim izvorima njegovo nasljedstvo je najveće na području diskretne matematike. Joel Spencer u [3] navodi da je napredak diskretne matematike u prošlom stoljeću imao dva glavna uzroka. Prvi su bili računala, a drugi (uz dužno poštovanje prema ostalima)

[2]Više pogledati u [11], stranica $40-41$

stalna pažnja Paula Erdősa i njegova poznata rečenica: "Dokazuj i pretpostavljaj!". Bollobás navodi da su područja vjerojatnosne teorije brojeva, račun particija za beskonačne kardinalne brojeve, ekstremalne kombinatorike, teorije slučajnih grafova područja koja je praktički Erdős sam stvorio te da nitko nije učinio više za razvoj i promicanje korištenja vjerojatnosnih metoda u matematici.

Za cijeloga života Erdős je bio zaposlen na samo dva sveučilišta, Purdue i Notre Dame. Michael Golomb u [18] navodi da je na Sveučilištu Purdue radio od 1943. do 1945. godine, a prema [11] Paul Hoffman navodi da je u Notre Dameu radio oko 1952. godine. Golomb navodi da je ljude kod Paula impresionirala njegova totalna zadubljenost u matematiku. Davao je dojam da mu nije važno ništa drugo osim matematike, ali prema mnogim njegovim kolegama to nije bila istina. Zanimala ga je povijesna literatura, znanost, politika, čak je čitao i medicinske knjige te slušao klasičnu glazbu. Sve što bi pročitao ostajalo je u njemu. Tijekom cijeloga života imao je poseban osjećaj za ljude, za svakoga je mogao odvojiti vremena, ali matematika je davala smisao njegovom životu. Svim grupama matematičara s kojima je surađivao mnogo je značio zbog matematičke genijalnosti, ali je jednako tako doprinosio i društvenom životu ljudi oko sebe. "Svi smo se osjećali društveno ugroženima, bili smo ograničeni malim gradom poljoprivredne države, daleko od kozmopolitskih centara. Sada smo među nama imali čovjeka sa svojom prošlošću iz europskih kulturnih središta, čovjeka koji je bio blizak prijatelj sa međunarodno poznatim matematičarima, ali isto tako i čovjeka širokih interesa za znanstvenu kulturu i svjetsku politiku.", rekao je Golomb. Za Golomba je Erdős bio najodaniji prijatelj, nije se brinuo samo za profesionalne suradnike nego i za njihove obitelji. "Nikada nije zaboravljao pitati za djecu – epsilone, a kasnije i za unuke – kvadrirane epsilone.", navodi Golomb u svom članku "Paul Erdős at Purdue". Snalažljivost je bila još jedna od Erdősovih osobina koje su ga krasile, što potvrđuje situacija u kojoj se našao tijekom jednog okupljanja matematičara na Purdueu. Govornik se nije pojavio te je Erdős ponudio da on održi govor. "Nepripremljen, bez ikakvih bilješki iznio je fascinantan izvještaj o nekom nedavnom istraživanju o vidljivosti boja koje pčele vide. Bili smo začarani i iznenađeni ovim izlaganjem; nismo očekivali da je Paul imao bilo kakva zanimanja za takva područja.", rekao je Golomb.

Godine 1954. napustio je Sjedinjene Američke Države kako bi otišao na Internacionalni kongres matematičara u Amsterdamu. Kako navode [4] i [11], od vlasti je tražio dozvolu za povratak no zahtjev mu je bio odbijen jer su mislili da će otići u Mađarsku. Napustio je Sjedinjene Američke Države bez dozvole za povratak rekavši: "Ni Sam ni Joe ne mogu mi uskratiti moje pravo na putovanje."("Neither Sam nor Joe can restrict my right to travel.") Izrael mu je priskočio u pomoć, nudeći mu zaposlenje na Hebrejskom sveučilištu u Jeruzalemu i putovnicu. U Izrael je došao 30. studenog 1954. godine i od tada se vraćao u Izrael gotovo svake godine. Prije nego je otišao iz Izraela u Europu u srpnju 1955. tražio je dozvolu za povratak. Kada su ga dužnosnici pitali želi li postati izraelski državljanin, pristojno je odbio, rekavši da on ne vjeruje u državljanstvo. Godine 1959. se mogao vratiti u Sjedinjene Američke Države, a odnos između Erdősa i Imigracijskog odjela Sjedinjenih Američkih Država se normalizirao 1963. godine i od tada nije imao problema s njima. Dvije godine poslije Staljinove smrti 1955., na kratko se uspio vratiti u Mađarsku, kada je njegov dobar prijatelj, George Alexitis, povukao veze i uvjerio službenike da mu daju izlaznu vizu. Nakon 1956. mogao se vraćati u Mađarsku u redovitim intervalima. Provodio je više vremena s majkom koja mu je intenzivno nedostajala tijekom cijelog razdoblja njegova odsustva. S matematičke strane gledano, više vremena je imao i za suradnju s mađarskim matematičarima, posebice sa Turánom i Rényijem. U mračnim danima, Erdős je bio glavna veza između mađarskih matematičara i zapada.

## 2.2. O Erdősovu odnosu s majkom i nekim suradnicima

Nakon njegovih brojnih povrataka u Mađarsku, Erdősa je na putovanja počela pratiti majka koja je tada imala 84 godine. Premda nije voljela putovati i nije znala gotovo niti riječi engleskog jezika bila je uz sina na svim putovanjima od 1964. godine do smrti. Kada god je radio matematiku ona bi tiho sjedila pokraj njega i uživala u svom sinu – matematičkom geniju. Svaki obrok su jeli zajedno, a uvečer bi ju držao za ruku dok ne zaspi. Paul je bio njezin svijet. Konstantno je bila zabrinuta za njegovo zdravlje i njegovu fizičku sigurnost.

Slika 8: *Slika prikazuje majku i sina u Melbournu, 1969. godine.*

Nikada nije imao djevojku, niti dečka. "U njegovim sedamdesetim, rekao mi je da nikada nije imao seksualni odnos.", prisjeća se Vázsonyi. Znao je reći: "Privilegija zadovoljstava vezanih za žene nije mi dana." Nikada nije prišao ženi, niti je to želio, matematika je bila njegova prava ljubav. Od rane dobi se opirao pritisku da bude poput drugih. Nije podnosio razgovore o ženama, govorio je "Ne budite trivijalni!". Tijekom cijelog njegova života postojala je samo jedna uporna žena koja je s njim održala platonsku vezu. Bila je to prijateljica matematičarka, Josephine Bruening. Neki su je zvali "drugom ženom", jer prva je bila njegova majka. Bilo je to šezdesetih godina prošlog stoljeća i taj odnos nije dugo trajao. Godine 1971. majka Anna je umrla u Calgaryju, Canada, gdje je Erdős boravio kako bi održao predavanje. Erdős u to vrijeme počinje uzimati velike količine antidepresiva i amfetamina. "Bio sam vrlo depresivan, a Paul Turán, stari prijatelj, podsjetio me, 'Veliko uporište je naša matematika,' ", rekao je Erdős. Tada je počeo raditi matematiku devetnaest sati dnevno, pišući radove koji su mijenjali matematičku povijest. Nikada više nije mogao spavati u stanu koji su on i njegova majka dijelili u Budimpešti; koristio ga je samo kako bi smjestio svoje posjetitelje, a on se preselio u gostinjski apartman Mađarske Akademije znanosti.

Prvi puta kada su se Béla Bollobás i Erdős susreli, Bollobás je imao četrnaest godina, pobijedio je na natjecanju iz matematike u Mađarskoj i Erdős ga je zapazio. Za njega je Erdős smišljao nove matematičke probleme te je već tada bio određen smjer kojim je Bollabás išao u matematici. Riječ je o području kojim se Erdős bavio pedesetih godina prošlog stoljeća, poznatom pod nazivom slučajni grafovi. Bollabás se u [4] prisjeća da ga je prvi puta čuo kako predaje kada je bio mlad učenik. Ne samo da je pričao o fascinantnim problemima, nego i o zemljama za koje Bollabás nije mislio da će ikada posjetiti. Godine 1958. Bollabás je pobijedio na državnom natjecanju na osnovu čega je bio pozvan u elegantan hotel gdje je boravio s Erdősom i njegovom majkom. "Nisu mogli biti ljubazniji: Erdős mi je postavio niz intrigantnih pitanja , dok me njegova majka (Annus Néni ili Teta Anna – kako su je zvali prijatelji) častila kolačima, sladoledom i pićima.", navodi Bollabás. Tri godine kasnije obitelj Bollobás i Erdősova majka su se upoznali i postali dobri prijatelji. Gledajući ih zajedno, nije bilo sumnje u njihovu zajedničku sreću: to su bili blaženi dani za oboje. Bollobás navodi da je Erdős potpuno uživao provodeći vrijeme sa svojom majkom, a ona je bila oduševljena što je mogla provoditi više vremena sa sinom. Brinuli su se jedno za drugo s puno ljubavi, jedno je pazilo je li ono drugo jelo, dovoljno spavalo ili možda bilo umorno. Annus Néni je bila vrlo ponosna na svoga prekrasnog sina, voljela je vidjeti znakove koji su pokazivali da je Paul veliki matematičar. Prema Bollobásu Erdősova majka Anna uživala je u svojoj ulozi Kraljice Majke matematike. Oboje su bili okruženi osobama koje su im se divile, koje su ih poštovale i koje su bile dobronamjerne prema njima. Ona nikada nije bila daleko od sinove matematike, čuvala je stotine Erdősovih radova u savršenom redu i prema zahtjevima slala kopije ljudima. Smrt majke uništila je Erdősa te se nikada nije u potpunosti oporavio od toga udarca.

Osoba koja je vodila računa o Erdősu nakon smrti njegove majke bio je Ronald Graham. Zajedno sa svojom ženom, Fan Chung, Graham je za Erdősova života organizirao Erdősu putovanja, brinuo se o njegovoj financijskoj situaciji, o produživanju viza i slično. Kao i ostali matematičari i njihove obitelji diljem svijeta, i Graham i Fan Chung su se brinuli o Erdősovim osobnim potrebama i njegovom zdravstvenom stanju. Erdős je volio ostajati kod Grahama i Fan budući da je u ovom slučaju mogao istodobno surađivati s dvoje velikih matematičara. Godine 1987. Graham je izgradio dodatni dio na svojoj kući u Watchungu, New Jersey, kako bi Erdős mogao imati vlastitu sobu, kupaonicu i knjižnicu za mjesec dana ili više koje je provodio kod Grahama i Fan godišnje. Njih dvojica su se često "prepirali" oko svakodnevnih stvari o kojima je Erdős znao jako malo ili nimalo, na primjer o guljenju grejpa ili prokuhavanju vode. Graham je na neki način bio posrednik i prevoditelj između Erdősa i Fan. "Jednom je toliko iziritirao Fan da je rekla da više nikada neće raditi s njim.", rekao je Graham. Do problema između njih dvoje je dolazilo kada Erdős nije mogao nešto razumjeti, a nije ga bilo lako uvjeriti. S druge strane, on je pri objašnjavanju dokaza znao preskakati korake što je znalo uzrujati Fan. Pred kraj života je priznao da su njegova objašnjenja bila teška za pratiti što je shvatio kada se osvrnuo na svoje stare radove. Bio je zaprepašten koliko mu je bilo teško razumjeti osobne argumente od prije 30 ili više godina. Premda je imao osjećaj da stari i nestaje, bio je još uvijek iznad svih ostalih.

Godine 1979. Graham je Erdősa izazvao na okladu u iznosu 500 dolara. Oklada je podrazumijevala prestanak konzumiranja amfetamina na mjesec dana. Erdős je željeo dokazati da nije ovisnik te je pristao. Kada mu je Graham isplaćivao novac, Erdős mu je rekao: "Pokazao si mi da nisam ovisnik, ali nisam napravio ništa posla." Ustajao bi se jutrima i po cijele dane gledao u prazan papir, nije imao ideja. "Bio sam poput obične osobe.", rekao je Grahamu, "Unazadio si matematiku mjesec dana."

Slika 9: *Slika Ronalda Grahama, Erdősa i Fan Chung.*

## 2.3. "Odlazak" ne znači i "umiranje"

Erdősov slab i umoran izgled zavaravao je njegove prijetelje tijekom godina. Mnogi su mislili da je njegovo zdravsteveno stanje strahovito krhko, a za njega su mislili da izgleda nezdravo dok je on, s druge strane, nadživio većinu suradnika i kolega. Zdravlje ga je počelo usporavati tek u posljednjih desetak godina života, ali i unatoč tome on se nije dao, nastavljao je raditi jakim tempom. S vremenom je počeo gubiti vid na jedno oko, ali nije htio prihvatiti odgovarajuću njegu jer bi zbog toga morao odvajati vrijeme provedeno u potrazi za matematičkom istinom. Nakon nekog vremena potpuno je izgubio vid na to oko i hitno je trebao transplataciju rožnice. Kada su napokon našli donora, imali su problema s Erdősom kako ga odvesti u bolnicu, budući da je u isto vrijeme imao zakazan govor u Cincinnatiju i odbijao je ići na operaciju. Na kraju je pristao, ali su mu u bolnici za vrijeme operacije morali dovesti matematičara s Odjela za matematiku u Memphisu da ima s kime razgovarati o matematici. Oči nisu bile jedini njegov zdravstveni problem, imao je problema i sa srcem zbog čega je završio u bolnici. Za vrijeme boravka u bolnici imao je papire raširene po cijelom bolničkom krevetu, a parade matematičara su ulazile u sobu i izlazile van. Medicinske sestre ga nisu mogle obuzdati. Istu stvar je učinio kada je bio hospitaliziran zbog manjeg srčanog udara u Mađarskoj kada je dovodio liječnike i ostalo osoblje do ludila. Tražio je premještaj u drugu bolnicu jer ta u kojoj je bio nije imala dovoljno veliku sobu da primi sve njegove goste. Soba u koju su ga premjestili bila je nagomilana papirima, časopisima, a on je radio s tri grupe matematičara odjednom. S jednom grupom je komunicirao na mađarskom, s drugom grupom na njemačkom, a s trećom grupom na engleskom jeziku. Kada su mu doktori ušli u sobu rekao im je: "Odlazite, ne vidite li da sam zauzet? Vratite se za nekoliko sati.", tako je i bilo.

Posljednje godine njegova života, 1996., održan je godišnji internacionalni simpozij iz kombinatorike, teorije grafova i informatike, bilo je to u ožujku, oko Erdősovog rođendana. Konferencija se izmjenjivala između gradova Boca Raton (Florida) i Baton Rouge (Louisiana), a u oba grada Erdős je tradicionalno predavao četvrtkom. Na pola njegova predavanja u Boci ustao se kao bi nešto zapisao na ploču i u jednom trenutku se srušio. Osiguranje je pokušavalo isprazniti prostor u kojem su bili, a Erdős je u međuvremenu došao k sebi i rekao: "Reci im da ne idu, imam još dva problema o kojima im trebam ispričati.". Nekoliko mjeseci kasnije, Paul Erdős, jedan od najizvanrednijih umova prošlog stoljeća, "otišao" je. Matematikom se nikada nije prestao baviti, što bi u njegovom riječniku značilo da nikada nije "umro". Naslijeđe koje je iza sebe ostavio ovaj izrazito nadaren i produktivan matematičar ogromnih je razmjera. Za sebe je govorio da želi umrijeti kao Euler. "Želim izlagati svoje predavanje, dovršavati važan dokaz na ploči, a kada netko iz publike dobaci: 'Što je s generalizacijom?', ja bi se okrenuo prema publici, nasmijao i rekao: 'Ostavit ću to slijedećoj generaciji.', i tada se srušiti." Paul Erdős nije bio daleko od svoje želje. Umro je od dva srčana udara, 20. rujna 1996. godine, za vrijeme kratkog semestra u hotelskoj sobi u Banach Centru, Varšava. Mnogi njegovi prijatelji i kolege matematičari s kojima je bio blizak žale što u tim trenutcima nisu bili s njim, kao što je on bio s njima tijekom cijelog njihova života.

# 3. Erdősov broj

Erdős je za života surađivao s više matematičara nego ijedan matematičar u svijetu pa su matematičari u skladu s tim smislili šalu – Erdősov broj. Ova činjenica nagnala je druge matematičare da ga definiraju. Nekoliko je različitih načina na koje su matematičari definirali Erdősov broj. Casper Goffman prvi ga je definirao. Prema članku objavljenom 1969. u časopisu American Mathematical Monthly, Goffman definira Erdősov broj na slijedeći način:

**Definicija 3.1** *Neka su $A$ i $B$ matematičari i neka je $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ skup matematičara koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $A_0 = A, A_n = B$;
2. *matematičar $A_i$ je napisao barem jedan rad u koautorstvu s matematičarom $A_{i+1}, i = 0, ..., n-1$.*

*Tada se $A_0, A_1, ..., A_n$ naziva lanac duljine $n$ koji povezuje matematičare $A$ i $B$. $A-$broj matematičara $B$, u oznaci $v(A; B)$, je duljina najkraćeg lanca koji povezuje $A$ i $B$. Ukoliko ne postoji lanac koji povezuje $A$ i $B$, vrijedi $v(A; B) = +\infty$. Dodatno se definira $v(A; A) = 0$. Uočimo da za $v(A; B)$ vrijedi $v(A; B) = v(B; A)$ te $v(A; B) + v(B; C) \geq v(A; C)$.*

Promotrimo specijalan slučaj u kojem je upravo Paul Erdős odabran da bude prvi matematičar u lancu, tj. neka je $A = Erdős$. Tada oznaka $v(Erdős; B)$ predstavlja Erdősov broj matematičara $B$. Stoviše, možemo reći da smo nad skupom svih matematičara definirali funkciju $v(Erdős; \cdot)$ koja proizvoljnom matematičaru pridružuje duljinu najkraćeg lanca koji povezuje tog matematičara s Paulom Erdősom.

Prema različitim matematičarima, nekoliko je načina opisivanja Erdősova broja. Navodimo dva. Za oba vrijedi sljedeće: Erdősov broj jedan imaju osobe koje su objavile rad s Erdősom. Ako osoba ima Erdősov broj dva, znači da je objavila rad s osobom koja je objavila rad s Erdősom. Erdősov broj tri nose osobe koje su objavile rad s osobom koja objavila rad s osobom koja je objavila rad s Erdősom. Erdősu je dodijeljen broj nula, a osobe koje nisu objavljivale radove s osobama koje su objavljivale radove s Erdősom imaju Erdősov broj beskonačno, odnosno nemaju definiran Erdősov broj.


Slika 10: *Slika zornije prikazuje kako se dodjeljuje Erdősov broj dva. Ukoliko je osoba u crvenom koautor s Erdősom na jednom radu dodijeljuje joj se Erdősov broj jedan. Ukoliko osoba u crvenom potom surađuje s osobom u plavom, tada je osobi u plavom dodijeljen Erdősov broj dva, pretpostavlja se da osoba u plavom nikada nije surađivala sa Erdősom.*

Prvi način opisivanja Erdősova broja uključuje radove koji su mogli imati *jednog ili više koautora* s Erdősom. Prema ovom opisu najveći Erdősov broj je 13. U vrijeme kada je Hoffman pisao knjigu "The man who loved only numbers", Erdős je imao 485 koautora, a samim time ti ljudi nose Erdősov broj 1. Danas je ta brojka prema web stranici Sveučilišta Oakland[3], jednaka 504.

Drugi način opisivanja Erdősova broja podrazumijeva radove u koautorstvu Erdősa i *samo jednog matematičara.* Dakle, samo je jedna osoba mogla biti koautor na radu s Erdősom te joj je tada bio dodijeljen Erdősov broj jedan. Prema [7], Erdős je više preferirao ovaj opis. Uzmemo li u obzir ovaj način opisivanja Erdősova broja, broj osoba s Erdősovim brojem jedan je 230, a osobama sa najvećim Erdősovim brojem dodijeljen je broj 15.

U jednom intervjuu, Erdős navodi noviji način opisivanja Erdősova broja jedan. Odnosi se na osobe koje imaju Erdősov broj jedan, a s kojima je objavio više od jednog rada.

*"Ako imam $k$ zajedničkih radova s nekim, tada njemu pripada Erdősov broj $\frac{1}{k}$."*

Prema [16] Sárkőzy je s Erdősom objavio 62 rada, Hajnal 56 radova, Faudree 50 radova, što im daje Erdősove brojeve $\frac{1}{62}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{50}$, redom. Među ženama, zasigurno vodi Vera Sos Turán, sa 35 objavljenih radova. S jedne strane izvanredan broj Erdősovih suradnika govori mnogo o njemu kao o izvanrednom matematičaru, a s druge strane je osigurao da mnogi ljudi nose i čuvaju njegov rad diljem svijeta. Suradnici koji se posebno ističu su

[3]Web stranica Sveučilišta Oakland [16]

Paul Turán, Harold Davenport, Richard Rado, Mark Kac, Alfréd Rényi, András Hajnal, András Sárközy, Vera Sós i Ron Graham: svi oni nose Erdősov broj jedan i zajedno s Erdősom napravili su ogroman posao u raznim područjima matematike. Velik je broj nematematičara, u mnogim drugim znanstvenim disciplinama (biologija, medicina i sl.) s konačnim Erdősovim brojevima što je posljedica visoke stope interdisciplinarne suradnje u suvremenoj znanosti.

# 4. Neki lijepi rezultati

U prvom poglavlju ovog rada spomenuli smo anegdotu o Knjizi o kojoj je Erdős volio pričati. Iz te anegdote izrodila se sjajna ideja. Dvojica matematičara, Martin Aigner i Gűnter M. Ziegler predložili su Erdősu da zajedno napišu knjigu koja bi približno odgovarala Knjizi. Erdős je bio oduševljen idejom te je odmah počeo pisati prijedloge rezultata koji bi se mogli naći u njihovoj knjizi. Ova knjiga trebala je biti objavljena u ožujku 1998. godine kao poklon Erdősu za 85. rođendan. Tragična smrt ovog velikog matematičara promijenila je prvobitnu ideju te Erdős nije koautor ove knjige; umjesto toga posvećena je Erdősu, odnosno uspomeni na Erdősa. Na odabir dokaza navedenih u knjizi "Proofs from THE BOOK" u velikoj mjeri utjecao je Paul Erdős, a velik broj područja koje knjiga obrađuje njegovi su prijedlozi. Treba navesti i da knjiga sadrži brojne Erdősove dokaze ili dokaze matematičara koje je Erdős pokrenuo svojim pitanjima ili postavljanjem pravih pretpostavki.

Područja koja obuhvaća četvrto izdanje ove knjige su:

- teorija brojeva,
- geometrija,
- analiza,
- kombinatorika,
- teorija grafova.

Mi ćemo u ovom radu navesti nekoliko Erdősovih lijepih rezultata iz područja teorije brojeva i kombinatorike. Iz područja teorije brojeva navodimo Erdősov dokaz o beskonačnosti skupa prostih brojeva, Bertrandov postulat te interesantnu činjenicu da binomni koeficijenti gotovo nikad nisu potencije. Iz područja kombinatorike odabrali smo jedan od tri poznata teorema o konačnim skupovima. Riječ je o teoremu Erdős $-$ Ko $-$ Rado.

U nastavku uvodnog dijela ovog poglavlja navodimo definicije koje će nam olakšati razumijevanje lijepih rezultata navedenih u ovom radu. Osim toga navodimo nekoliko primjera te jednu korisnu procjenu koja će nam trebati kod dokaza Bertrandova postulata.

**Definicija 4.1** *Prirodan broj $p > 1$ se zove prost ako $p$ nema niti jednog djelitelja $d$ takvog da je $1 < d < p$. Ako prirodan broj $a > 1$ nije prost, onda kažemo da je složen.*

**Definicija 4.2** *Za prirodan broj $n$ kažemo da je potpun kvadrat ako postoji cijeli broj $m$ takav da je $n = m^2$.*

Brojevi 1, 4, 16, 49 su potpuni kvadrati, dok npr. niti jedan prost broj nije potpun kvadrat.

**Definicija 4.3** *Za prirodan broj $n$ kažemo da je kvadratno slobodan ako je 1 najveći potpuni kvadrat koji ga dijeli, tj. ukoliko iz $m^2|n, m \in \mathbb{N}$, slijedi $m = 1$.*

Na primjer, brojevi 6 i 15 su kvadratno slobodni, dok 12 i 100 nisu. Također, svaki prost broj je kvadratno slobodan.

**Definicija 4.4** *Neka je $x$ realan broj. Najveći cijeli broj koji nije veći od $x$ označavamo sa $\lfloor x \rfloor$ i zovemo najveće cijelo od $x$ ili 'pod' od $x$. Najmanji cijeli broj koji nije manji od $x$ označavamo sa $\lceil x \rceil$ i zovemo najmanje cijelo ili 'strop' od $x$.*

Na primjer, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lfloor 4 \rfloor = 4 = \lceil 4 \rceil$.

**Teorem 4.1** ***(Legendrov teorem)***
*Broj $n!$ sadrži prost faktor $p$ točno*

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

*puta.*

**Primjer 4.1** *Primjeri kao što su*

$$\begin{aligned}
\binom{26}{13} &= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \\
\binom{28}{14} &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \\
\binom{30}{15} &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29
\end{aligned}$$

*ilustriraju da se "vrlo mali" prosti faktori $p < \sqrt{2n}$ mogu pojaviti kao potencije u rastavu $\binom{2n}{n}$. "Mali" prosti faktori takvi da je $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$ pojavljuju se najviše jednom, dok se prosti faktori takvi da je $\frac{2}{3}n < p \leq n$ uopće ne pojavljuju.*

**Definicija 4.5** *Niz $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ nazivamo unimodalan ukoliko postoji $t$ takav da je*

$$s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_t$$

*te*

$$s_t \geq s_{t+1} \geq ... \geq s_n.$$

**Teorem 4.2** *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ niz $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$ je unimodalan. Ako je $n$ paran, onda je*

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{n/2}, \qquad \binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

*Ako je $n$ neparan, onda je*

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

*U svakom slučaju, među brojevima $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$ najveći je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.*

U dokazu Bertrandova postulata trebat ćemo procjenu binomnih koeficijenata stoga u nastavku navodimo neka korisna svojstva binomnih koeficijenata te procjene donje i gornje ograde binomnih koeficijenata.
Iz same definicije binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ kao broja $k$ podskupova od $n$ skupova znamo da za niz binomnih koeficijenata $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$ vrijedi:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Iz jednakosti $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ lako se nalazi da za svaki $n$ binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ tvore simetričan i unimodalan niz: povećava se prema sredini, tako da su srednji binomni koeficijenti najveći u nizu:

$$1 = \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

U dokazu Bertrandova postulata koristit ćemo ocjenu

$$\binom{n}{k} \leq 2^n \quad \text{za svaki } k,$$

dok za $n \geq 2$ imamo

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^n}{n},$$

gdje jednakost vrijedi za $n = 2$. Posebno, za $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}.$$

Ovo vrijedi budući da je srednji binomni koeficijent, $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, najveći u nizu $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n-1}$ čija je suma $2^n$, a čiji je prosjek prema tome $\frac{2^n}{n}$.
S druge stane, napomenimo da je gornja granica za binomne koeficijente

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}},$$

što je dobra ocjena za "male" binomne koeficijente na krajevima niza kada je $n$ velik (u usporedbi s $k$).

**Definicija 4.6** *Za familiju skupova kažemo da je presijecajuća familija skupova ako vrijedi da bilo koja dva skupa iz te familije imaju neprazni presjek.*

**Primjer 4.2** *Neka je* $N = \{1, ..., n\}$. *Koliko najviše članova može imati familija* $\mathcal{F}$ *podskupova za koju vrijedi da bilo koja dva podskupa iz te familije imaju neprazan presjek?*
**Rješenje**: *Najveći mogući broj članova presijecajuće familije je* $2^{n-1}$. *Možemo ih dobiti uzimanjem svih podskupova od* $N$ *koji sadrže element 1. Više od* $2^{n-1}$ *ih ne možemo naći jer za bilo koji podskup i njegov komplement vrijedi da ne mogu oba istovremeno biti u presijecajućoj familiji.*

## 4.1. Beskonačnost skupa prostih brojeva

Ovaj dokaz za razliku od ostalih dokaza beskonačnosti skupa prostih brojeva ide značajan korak dalje i pokazuje ne samo da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva nego i da red $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergira, gdje $\mathbb{P}$ označava skup prostih brojeva. Prvi dokaz beskonačnosti skupa prostih brojeva, zanimljiv sam po sebi, dao je Euler, no dokaz koji navodimo daje uvid u matematičku ljepotu koju je Paul Erdős zastupao.

**Teorem 4.3** *Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.*

**Dokaz**:
Neka je $p_1, p_2, p_3, ...$ niz prostih brojeva u rastućem redoslijedu i pretpostavimo da $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konvergira. Tada se može naći $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2},$$

odnosno takav da ostatak niza nakon $k$ članova bude manji od $\frac{1}{2}$.

Nadalje, nazovimo $p_1, ..., p_k$ *malim* prostim brojevima te $p_{k+1}, p_{k+2}, ...$ *velikim* prostim brojevima. Za proizvoljan $N \in \mathbb{N}$ nalazimo

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \tag{4.1}$$

Neka sada $N_b$ predstavlja broj prirodnih brojeva $n \leq N$ koji su djeljivi s barem jednim *velikim* prostim brojem te neka $N_s$ predstavlja broj prirodnih brojeva $n \leq N$ koji imaju samo *male* proste djelitelje. Pokazat ćemo da za odgovarajući $N$ vrijedi

$$N_b + N_s < N,$$

što će biti željena kontradikcija, budući da prema definiciji $N_b + N_s$ treba biti jednako $N$. Kako bi procijenili $N_b$ primijetimo da $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ broji prirodne brojeve takve da je $n \leq N$ koji su višekratnici od $p_i$. Stoga prema (4.1) dobivamo

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}. \tag{4.2}$$

Promotrimo sada $N_s$. Svaki $n \leq N$ koji ima samo *male* proste djelitelje zapisujemo u obliku

$$n = a_n b_n^2, \tag{4.3}$$

gdje je $a_n$ kvadratno slobodan faktor, odnosno nije djeljiv s kvadratom niti jednog prostog broja. Stoga je svaki $a_n$ produkt različitih *malih* prostih brojeva, tj.

$$a_n = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \cdots p_k^{c_k}$$

gdje je $c_i \in \{0, 1\}$, za $i = 1, ..., k$. Zaključujemo da u (4.3) imamo točno $2^k$ različitih kvadratno slobodnih brojeva, odnosno $2^k$ mogućih vrijednosti za $a_n$. Kako je $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, to je

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Budući da (4.2) vrijedi za svaki $N$, preostaje naći broj $N$ takav da je $2^k \sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$ ili $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$, a $N = 2^{2k+2}$ zadovoljava tražena svojstva. ■

## 4.2. Bertrandov postulat

U prethodnom dijelu pokazali smo da prostih brojeva $2, 3, ...$ ima beskonačno mnogo. Kako bi vidjeli da praznine u nizu prostih brojeva, tj. udaljenosti među uzastopnim prostim brojevima, nisu ograničene, označimo s $N := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ produkt svih prostih brojeva koji su manji od $k + 2$ te primijetimo da niti jedan od $k$ brojeva

$$N + 2, N + 3, N + 4, ..., N + k, N + (k + 1)$$

nije prost, budući da za $2 \leq i \leq k+1$ znamo da $i$ ima prost faktor koji je manji od $k+2$, ovaj faktor dijeli $N$ pa time i $N+i$. Na ovaj način nalazimo da na primjer za $k = 10$ niti jedan od deset uzastopnih brojeva

$$2312, 2313, 2314, 2315, ..., 2321$$

nije prost.
No, postoje i gornje granice na duljinu praznina koje se pojavljuju u nizu prostih brojeva, tj. gornje ograde na udaljenosti među uzastopnim prostim brojevima. Tvrdnja poznata pod nazivom Bertrandov postulat glasi: "Praznina do slijedećeg prostog broja nije veća od broja od kojega smo započeli našu potragu.". Joseph Bertrand je iskazao ovu tvrdnju i empirijski je potvrdio za $n < 3\ 000\ 000$. Prvi ju je dokazao Pafnuty Chebyshev 1850. godine, a mnogo jednostavniji dokaz je dao Indijac Ramanujan. Dokaz iz Knjige je dao Paul Erdős, a preuzet je iz Erdősova rada objavljenog 1932.

**Teorem 4.4** ***(Bertrandov postulat.)*** *Za svaki $n \geq 1$, postoji prost broj $p$ takav da je $n < p \leq 2n$.*

**Dokaz**:
Pažljivo ćemo procijeniti veličinu binomnog koeficijenta $\binom{2n}{n}$ kako bi uočili da ukoliko nema prostih faktora takvih da vrijedi $n < p \leq 2n$ tada je on "premalen" . Tvrdnju dokazujemo u pet koraka.

**1. korak**
Prvo dokazujemo Bertrandov postulat za $n < 4\ 000$. Ovdje nema potrebe provjeravati 4 000 slučajeva, dovoljno je provjeriti da je

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

niz prostih brojeva, u kojem je svaki broj manji od dvostrukog prethodnika. Stoga, svaki interval $\{y : n < y \leq 2n\}$, za $n \leq 4\ 000$, sadrži jedan od ovih 14 prostih brojeva.

**2. korak**
U ovom koraku dokazat ćemo da nejednakost

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \tag{4.4}$$

vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$.

Dokaz[4] provodimo indukcijom po broju prostih brojeva manjih ili jednakih $x$. Primijetimo da ako je $q$ najveći prost broj takav da je $q \leq x$, tada vrijedi

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p$$

te da je

$$4^{q-1} \leq 4^{x-1}.$$

Prema tome, dovoljno je provjeriti (4.4) u slučaju kada je $x = q$ prost broj. Za $q = 2$ dobivamo $2 \leq 4$ te nastavljamo provjeru za sve neparne proste brojeve takve da je $q = 2m+1$. (Ovdje induktivno možemo pretpostaviti da (4.4) vrijedi za sve cijele brojeve iz skupa $\{2, 3, ..., 2m\}$.) Za $q = 2m+1$ dobivamo:

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

Induktivno se lako pokaže da je

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m,$$

a nejednakost

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

proizlazi iz toga što je $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ prirodan broj, gdje su prosti brojevi koje promatramo svi faktori brojnika $(2m+1)!$, ali ne i nazivnika $m!(m+1)!$. Konačno dobivamo,

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$$

budući da su

$$\binom{2m+1}{m} \quad \text{i} \quad \binom{2m+1}{m+1}$$

dva jednaka pribrojnika koja se pojavljuju u

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}.$$

[4]Dokaz nije iz Edrősova rada objavljenog 1932., ali je Erdős imao svoj doprinos u njemu, štoviše, dokaz koji navodimo je "dokaz iz Knjige".

**3. korak**

Iz Legendrova teorema (Teorem 4.1) slijedi da $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ sadrži prost faktor $p$ točno

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

puta. Ovdje svaki pribrojnik iznosi najviše 1 budući da zadovoljava

$$\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\Big(\frac{n}{p^k} - 1\Big) = 2,$$

i da je cijeli broj. Štoviše, pribrojnici iščezavaju kad god je $p^k > 2n$.

Prema tome, $\binom{2n}{n}$ sadrži $p$ točno

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq max\{r : p^r \leq 2n\}$$

puta. Dakle, najveća potencija od $p$ koja dijeli $\binom{2n}{n}$ nije veća od $2n$. Posebno, prosti brojevi takvi da je $p > \sqrt{2n}$ pojavljuju se najviše jednom u $\binom{2n}{n}$.

Prema Erdősu, ključna činjenica njegova dokaza je: prosti brojevi $p$ koji zadovoljavaju

$$\frac{2}{3}n < p \leq n$$

ne dijele $\binom{2n}{n}$! Zaista, $3p > 2n$ podrazumijeva (za $n \geq 3$ pa stoga i $p \geq 3$) da su $p$ i $2p$ jedini višekratnici od $p$ koji se pojavljuju kao faktori u brojniku $\frac{(2n)!}{n!n!}$, a u nazivniku dobivamo dva faktora jednaka $p$.

**4. korak**

Sada možemo ocijeniti $\binom{2n}{n}$. Za $n \geq 3$, koristeći procjenu iz uvodnog dijela ovog poglavlja za donju granicu (str. 23), dobivamo

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

stoga, budući da ne postoji više od $\sqrt{2n}$ prostih brojeva takvih da je $p \leq \sqrt{2n}$, za $n \geq 3$ vrijedi

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p. \tag{4.5}$$

**5. korak**

Pretpostavimo sada da ne postoji prost broj $p$ takav da je $n < p \leq 2n$. Iz toga proizlazi da je produkt $\prod_{n<p\leq 2n} p$ iz (4.5) jednak 1. Uvrstimo li (4.4) u (4.5) dobivamo

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}$$

ili

$$4^{\frac{1}{3}n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}, \tag{4.6}$$

što nije točno za dovoljno velike prirodne brojeve $n$! Zapravo, koristeći $a + 1 < 2^a$ (što induktivno vrijedi za sve $a \geq 2$) dobivamo

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor + 1)^6 < 2^{6\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}, \tag{4.7}$$

a time i za $n \geq 50$ (odnosno i za $18 < 2\sqrt{2n}$) iz (4.4) i (4.5) dobivamo

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}.$$

Iz čega proizlazi $(2n)^{1/3} < 20$, za $n < 4\ 000$. ■

Može se naći i više iz ovog tipa ocjena: iz (4.2) proizlazi istim metodama da za $n \geq 4\ 000$ vrijedi slijedeće

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \geq 2^{\frac{1}{30}n}$$

i da postoji barem

$$\log_{2n}(2^{\frac{1}{30}n}) = \frac{1}{30} \frac{n}{\log_2 n + 1}$$

prostih brojeva između $n$ i $2n$.

To nije tako loša procjena: "stvaran" broj prostih brojeva u ovom rasponu je približno $n/\log n$ što slijedi iz ranije spomenutog "teorema o prostim brojevima".

## 4.3. Binomni koeficijenti gotovo nikad nisu potencije

Ovo je epilog Bertrandovu postulatu koji daje lijepe rezultate o binomnim koeficijentima. Godine 1892. Sylvester je ojačao Bertrandov postulat na slijedeći način:

*"Ako je $n \geq 2k$, tada barem jedan od brojeva $n, n-1, ..., n-k+1$ ima prost djelitelj $p$ veći od $k$."*

Primjetimo da se za $n = 2k$ dobiva upravo Bertrandov postulat. Godine 1934. Erdős je dao kratak i elementaran "dokaz iz Knjige" Sylvesterova rezultata. Postoji ekvivalentan način iskazivanja Sylvesterova teorema:

*"Binomni koeficijent*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad (n \geq 2k)$$

*uvijek sadrži prost faktor $p > k$."*

S ovim zapažanjem na umu okrećemo se drugom Erdősovom dragulju. Kada je $\binom{n}{k}$ jednako potenciji $m^l$? Lako se vidi da postoji beskonačno mnogo rješenja jednadžbe $\binom{n}{2} = m^2$ za $k = l = 2$. Zaista, ako je $\binom{n}{2}$ kvadrat, tada je i $\binom{(2n-1)^2}{2}$. Kako bi to vidjeli, uzimamo da je $n(n-1) = 2m^2$. Slijedi da je

$$(2n-1)^2((2n-1)^2-1) = (2n-1)^2 4n(n-1) = 2(2m(2n-1))^2,$$

stoga i

$$\binom{(2n-1)^2}{2} = (2m(2n-1))^2.$$

Počevši sa $\binom{9}{2} = 6^2$ dobivamo beskonačno mnogo rješenja - slijedeće je $\binom{289}{2} = 204^2$. Međutim ovo ne daje sva rješenja. Na primjer, $\binom{50}{2} = 35^2$ započinje novi niz, isto kao i $\binom{1682}{2} = 1189^2$. Za $k = 3$ zna se da $\binom{n}{3} = m^2$ ima jedinstveno rješenje $n = 50$, $m = 140$. Ovime smo došli do kraja. Za $k \geq 4$ i neki $l \geq 2$ ne postoje rješenja i to je tvrdnja koju je Erdős dokazao svojim genijalnim argumentom.

**Teorem 4.5** *Jednadžba $\binom{n}{k} = m^l$ nema cjelobrojnih rješenja takvih da je $l \geq 2$ i $4 \leq k \leq n-4$.*

**Dokaz**:
Prije svega primijetimo da možemo pretpostaviti da je $n \geq 2k$ zato što je $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije točna, odnosno da je $\binom{n}{k} = m^l$. Dokaz kontradikcijom provodimo u četiri koraka.

**1. korak**
Po Sylvesterovu teoremu, postoji prost faktor $p$ iz binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ veći od $k$, stoga $p^l$ dijeli $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Dakako, samo jedan od faktora $n-i$ može biti višekratnik od $p$ (zato što je $p > k$) i zaključujemo $p^l | n-i$ te stoga vrijedi

$$n \geq p^l > k^l \geq k^2.$$

**2. korak**
Uzmimo u obzir neki faktor $n-j$ brojnika i zapišimo ga u obliku $n-j = a_j m_j^l$, gdje

$a_j$ nije djeljivo niti s jednom netrivijalnom $l-$ tom potencijom. Prema 1. koraku dokaza primijetimo da $a_j$ ima samo proste djelitelje koji su manji ili jednaki $k$. Želimo pokazati da $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $a_i = a_j$ za neki $i < j$. Tada je $m_i \geq m_j + 1$ i

$$\begin{aligned} k &> (n-i)-(n-j) = a_j(m_i^l - m_j^l) \geq a_j((m_j+1)^l - m_j^l) \\ &> a_j l m_j^{l-1} \geq l(a_j m_j^l)^{1/2} \geq l(n-k+1)^{1/2} \\ &\geq l(\frac{n}{2}+1)^{1/2} > n^{1/2}, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji s $n > k^2$.

**3. korak**

Slijedeće što dokazujemo je da su brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ upravo jednaki $1, 2, \ldots, k$ u nekom redoslijedu. (Prema Erdősu, ovo je srž dokaza.) Budući da već znamo da su svi različiti, dovoljno je dokazati da

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} \quad \text{dijeli} \quad k!.$$

Zamjenom $n - j = a_j m_j^l$ u jednadžbi $\binom{n}{k} = m^l$, dobivamo

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1}(m_0 m_1 \cdots m_{k-1})^l = k! m^l.$$

Poništimo li zajedničke faktore od $m_0 m_1 \cdots m_{k-1}$ i $m$ dobivamo

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} u^l = k! v^l$$

gdje je $nzd(u, v) = 1$. Preostaje nam pokazati da je $v = 1$. Ako nije, onda $v$ sadrži prost djelitelj $p$. Budući da je $nzd(u, v) = 1$, $p$ mora biti prost djelitelj od $a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ i pritom je manji ili jednak $k$. Prema Legendrovom teoremu (Teorem 4.1) znamo da $k!$ sadrži $p$ $\sum_{i\geq 1} \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor$ puta. Sada procjenjujemo eksponent od $p$ u $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Neka je $i$ pozitivan cijeli broj te naka su $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ višekratnici od $p^i$ među $n, n-1, ..., n-k+1$. Tada je $b_s = b_1 + (s-1)p^i$ pa stoga

$$(s-1)p^i = b_s - b_1 \leq n - (n-k+1) = k-1,$$

iz čega slijedi

$$s \leq \left\lfloor \frac{k-1}{p^i} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1.$$

Dakle, za svaki $i$, broj višekratnika od $p^i$ među $n, ..., n-k+1$ pa stoga i među $a_j-$ovima je ograničen s $\lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor + 1$. Iz toga slijedi da je eksponent od $p$ u $a_0, a_1 \cdots a_{k-1}$ najviše

$$\sum_{i=1}^{l-1} (\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1)$$

Ovdje suma ide do $i = l-1$, budući da brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ne sadrže $l-$te potencije. Uzimajući u obzir obje ocjene, nalazimo da je eksponent od $p$ u $v^l$ najviše

$$\sum_{i=1}^{l-1} (\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1) - \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor \leq l-1,$$

i dobivamo željenu kontradikciju, budući da je $v^l$ $l-$ta potencija.
Ovo je dovoljno za slučaj kada je $l = 2$. Zaista, budući da za $k \geq 4$ jedan od brojeva $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ mora biti jednak 4, međutim kako oni ne sadrže kvadrate možemo pretpostaviti da je $l \geq 3$.

**4. korak**
Budući da je $k \geq 4$, moramo imati $a_{i_1} = 1,\ a_{i_2} = 2,\ a_{i_3} = 4$ za neke $i_1,\ i_2,\ i_3$, takve da je

$$n - i_1 = m_1^l,\ n - i_2 = 2m_2^l,\ n - i_3 = 4m_3^l.$$

Tvrdimo da $(n-i_2)^2 \neq (n-i_1)(n-i_3)$. U suprotnom, neka je $b = n - i_2$ i $n - i_1 = b - x$, $n - i_3 = b + y$, gdje je $0 < |x|, |y| < k$. Budući da je

$$b^2 = (b-x)(b+y) \quad \text{ili} \quad (y-x)b = xy,$$

gdje je $x = y$ očigledno nemoguće. Sada prema 1. koraku dokaza imamo

$$|xy| = b|y-x| \geq b > n-k > (k-1)^2 \geq |xy|,$$

što nema smisla.
Imamo, dakle, $m_2^2 \neq m_1 m_3$, gdje pretpostavljamo $m_2^2 > m_1 m_3$ (u drugom slučaju je analogno) te nastavljamo s posljednjim nejednakostima. Dobivamo

$$\begin{aligned} 2(k-1)n &> n^2 - (n-k+1)^2 > (n-i_2)^2 - (n-i_1)(n-i_3) \\ &= 4[m_2^{2l} - (m_1 m_3)^l] \geq 4[(m_1 m_3 + 1)^l - (m_1 m_3)^l] \\ &\geq 4l m_1^{l-1} m_3^{l-1}. \end{aligned}$$

Budući da je $l \geq 3$ i $n > k^l \geq k^3 > 6k$, ovo vodi ka

$$\begin{aligned} 2(k-1)nm_1m_3 &> 4lm_1^l m_3^l = l(n-i_1)(n-i_3) \\ &> l(n-k+1)^2 > 3(n-\frac{n}{6})^2 > 2n^2. \end{aligned}$$

Budući da je sada $m_i \leq n^{1/l} \leq n^{1/3}$ dobivamo

$$kn^{2/3} \geq km_1m_3 > (k-1)m_1m_3 > n,$$

ili $k^3 > n$. Ovom kontradikcijom teorem je dokazan. ■

## 4.4. Teorem Erdős - Ko - Rado

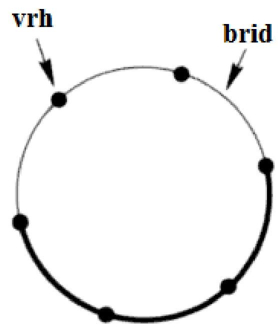
U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnom temom kombinatorike: svojstvima i veličinama specijalne familije $\mathcal{F}$ podskupova konačnog skupa $N = \{1, ..., n\}$. Osnovni odnos među skupovima određen je njihovim presjekom. Vrstu "zavisnosti" među skupovima opisuju veličina ili neke druge karakteristike njihovog međusobnog presjeka.

Promotrimo sada skup $N = \{1, ..., n\}$. Kažemo da je familija $\mathcal{F}$ podskupova od $N$ presijecajuća familija ako bilo koja dva skupa iz $\mathcal{F}$ imaju barem jedan zajednički element. Gotovo odmah možemo vidjeti da je veličina najveće presijecajuće familije $2^{n-1}$. Ako je $A \in \mathcal{F}$ tada komplement $A^c = N \setminus A$ ne može biti u presijecajućoj familiji budući da je njihov presjek prazan skup. Stoga možemo zaključiti da presijecajuća familija sadrži najviše polovinu broja $2^n$ od svih podskupova pa stoga vrijedi $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. S druge strane, ako promotrimo familiju svih skupova koji sadrže fiksirani element, nazovimo ju familijom $\mathcal{F}_1$ svih skupova koji sadrže 1, tada je očito $|\mathcal{F}_1| = 2^{n-1}$.

Neka je sada $\mathcal{F}$ presijecajuća familija $k-$članih podskupova skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Postavlja se pitanje: Koliko najviše članova može imati presijecajuća familija $\mathcal{F}$ ako su svi skupovi iz $\mathcal{F}$ jednake veličine, u našemo slučaju uzmimo da je to $k$. Kako bi izbjegli trivijalan slučaj kad je $n < 2k$ pretpostavit ćemo da je $n \geq 2k$, budući da se u suprotnom bilo koja dva $k-$člana skupa presijecaju. Uzimajući u obzir ideju iz Primjera 4.2, presijecajuću familiju $k-$članih podskupova možemo dobiti tako da uzmemo sve $k-$člane podskupove koji sadrže fiksirani element 1. Očigledno, sve skupove iz $\mathcal{F}_1$ dobivamo dodavajući 1 svim $(k-1)-$članim podskupovima od $\{2, ..., n\}$, otuda je $|\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}$. Postoji li veća presijecajuća familija od ove? Broj svih podskupova je $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ pa ovo pitanje nije trivijalno te ne možemo primijeniti argument s komplementom kao u prethodnom primjeru, jer komplement $k-$članog skupa općenito nije $k-$člani skup. Slijedeći rezultat daje odgovor na ovo pitanje, riječ je o Erdős - Ko - Rado teoremu kojeg su Paul Erdős, Chao Ko i Richard Rado dali 1938. godine, a objavili tek 23 godine kasnije. Od tada je dano mnoštvo dokaza, ali slijedeći dokaz koji je dao Gyula Katona je posebno elegantan.

**Teorem 4.6** *Najveća presijecajuća familija $k-$članih skupova u $n-$članom skupu ima $\binom{n-1}{k-1}$ elemenata kada $n \geq 2k$.*

**Dokaz**:
Ključ dokaza ovog teorema je slijedeća lema koja se na prvi pogled čini totalno nevezana za naš problem. Promotrimo krug $C$ podijeljen s $n$ vrhova u $n$ bridova. Neka luk duljine $k$ sadrži $k+1$ uzastopnih vrhova i $k$ bridova među njima.



Slika 11: *Krug $C$ za $n = 6$. Tamni bridovi označavaju luk duljine 3.*

**Lema 4.1** *Neka je $n \geq 2k$ te pretpostavimo da imamo $t$ različitih lukova $A_1, ..., A_t$ duljine $k$ takvih da bilo koja dva luka imaju zajednički brid. Tada je $t \leq k$.*

Kako bi dokazali lemu prvo primijetimo da je bilo koji vrh iz $C$ krajnji vrh najviše jednog luka. Zaista, kad bi $A_i, A_j$ imali zajednički krajnji vrh $v$, tada bi morali krenuti u drugom smjeru (budući da su oni različiti). Ali onda oni ne mogu imati zajednički brid budući da je $n \geq 2k$. Odredimo sada $A_1$. Budući da bilo koji $A_i$ $(i \geq 2)$ ima zajednički brid sa $A_1$, jedan od krajnjih vrhova od $A_i$ je unutarnji vrh od $A_1$. Budući da ovi krajnji vrhovi moraju biti različiti i budući da $A_1$ sadrži $k-1$ unutarnjih vrhova, zaključujemo da pored toga može biti najviše $k-1$ lukova, a prema tome i najviše $k$ lukova ukupno.

Nastavimo sad s dokazom teorema Erdős-Ko-Rado. Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija $k-$članih skupova. Uzmimo u obzir krug $C$ sa $n$ vrhova i $n$ bridova te uzimamo bilo koju cikličku premutaciju $\pi(a_1, a_2, ..., a_n)$ i pišemo brojeve $a_i$ u smjeru kazaljke na satu uz bridove od $C$. Prebrojimo sada broj podskupova od $A$ od $\mathcal{F}$ koji se pojavljuju kao $k$ uzastopnih brojeva na $C$. Budući da je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija prema Lemi 4.1 vidimo da postoji najviše $k$ takvih skupova. Budući da ovo vrijedi za svaku cikličku permutaciju i budući da postoji $(n-1)!$ cikličkih permutacija na ovaj način dobivamo da je najviše

$$k(n-1)!$$

podskupova od $\mathcal{F}$ koji se pojavljuju kao elementi neke cikličke premutacije. Koliko često brojimo fiksirani skup $A \in \mathcal{F}$? $A$ se pojavljuje u $\pi$ ako se $k$ elemenata od $A$ uzastopno pojavljuje u nekom redoslijedu. Stoga imamo $k!$ mogućnosti da $A$ napišemo uzastopno te $(n-k)!$ načina da rasporedimo preostale elemente. Prema tome zaključujemo da se fiksirani skup $A$ pojavljuje u točno $k!(n-k)!$ cikličkih permutacija te stoga dobivamo

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

■

# Literatura

[1] A. Aglić Aljinović: *Ekstremalna kombinatorika*, FER, diplomski studij, 2011/2012.

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Fourth Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010

[3] L. Babai, J. Spencer: *Paul Erdős (1913-1996)*, Notices of the AMS, Vol. 45, Number 1

[4] B. Bollobás: *Paul Erdős-Life and work*, Graham, Ronald L. (ed.) et al., The mathematics of Paul Erdös. Vol. I. Berlin: Springer, Algorithms Comb. 13, 1-41 (1997).

[5] F. R. K. Chung: *Open problems of Paul Erdős in graph theory*
Dostupno na: http://www2.gsu.edu/ matgtc/open problems of Paul Erdos.pdf

[6] P. Erdős: *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Litt. Sci. Szeged, pp. 194-198, 5(1932)

[7] P. Erdős: *On the fundamental problem of mathematics*, The American mathematical monthly, 79 (2) (1971)

[8] P. Erdős, C. Ko, R. Rado: *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. I. Math. Oxford(2), 12(1961), 313-20

[9] D. Galvin: *Erdős's proof of Bertrand's postulate*, Dept of Mathematics, University of Pennsylvania, 2006.

[10] C. Goffman: *And what is your Erdős number?*, The American mathematical monthly 76 (7) (1969)

[11] P. Hoffman: *The man who loved only numbers*, Fourth Estate Limited, London, 1998.

[12] I. Kuzmanović: *Neke primjene funkcija pod i strop*, Osječki matematički list 8(2008), 77-82

[13] I. Matić: *Uvod u teoriju brojeva*, predavanja održana na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek 2011.

[14] D. Sejdinović, I. Tanović: *O harmonijskom redu i njegovim dijelovima*, Osječki matematički list 9(2009), 31-39

[15] E. Winner: *Darovita djeca: mitovi i stvarnost*, Lekenik: Ostvarenje d.o.o., 2005.

[16] Erdős Number Project: http://www.oakland.edu/enp/pubinfo/

[17] http://www.renyi.hu

[18] http://www.math.purdue.edu/about/purview/fall96/paul-erdos.html

# Sažetak

Na prijedlog mentora Doc. dr. sc. Ivana Matića odabrala sam temu ovog diplomskog rada. Matematička genijalnost i duhovno bogatstvo najplodonosnijeg matematičara prošlog stoljeća, Paula Erdősa, vodili su nas dalje u istraživanju njegova života te nekoliko lijepih rezultata koje navodimo u radu. Osim toga, valja napomenuti da je ovaj osebujan matematičar ostavio brojne otvorene probleme budućim generacijama matematičara. U radu opisujemo život Paula Erdősa od samog rođenja pa sve do njegova "odlaska" - riječ koju je Paul Erdős koristio umjesto riječi umrijeti. Navodimo dokaze Teorema o beskonačnosti skupa prostih brojeva, Bertrandova postulata te epilog Bertrandovu postulatu koji daje lijepe rezultate o binomnim koeficijentima. Posljednji rezultat naveden u ovom radu je Teorem Erdős - Ko - Rado.

## Summary

The theme of this paper has been chosen on the recommendation of Prof. Ivan Matić. Mathematical ingenuity and spiritual wealth of mathematician with great contribution in past century, Paul Erdős, guided us into exploration of his life and of few his beautiful results that we quote in this paper. Except this, it is important to emphasize that this mathematician has left us numerous unsolved problems for future generations of mathematicians. In this paper we describe his life from the beginning, his birth, until he "left" us - as Paul Erdős used to say instead of dying. We quote proofs of infiniteness of the primes, Bertrand's Postulate and an epilogue to this result. At the end of this paper we quote Theorem Erdős - Ko - Rado.

# Životopis

Rođena sam 4. prosinca 1986. u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu i srednju školu pohađala sam u Slavonskom Brodu. Godine 2005. upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završavam 2008. godine s temom završnog rada "Svojstveni problem", pod mentorstvom Prof. dr. sc. R. Scitovskog. Iste godine upisujem Diplomski studij matematike, smjer Financijska i poslovna matematika.