Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Petra Corn

Cuisenaire štapići

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Petra Corn

Cuisenaire štapići

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Osijek, 2015.

Sadržaj

Uvod

Niti jedan predmet u školi ne potiče toliko negativnih emocija kao što je matematika. Matematika se nalazi na dnu popisa predmeta koje ljudi vole ili u kojima se osjećaju zainteresirani ili uspješni. Ipak, sve je jasnije da je izgradnja obrazovnog sustava koji omogućuje studentima jak temelj u matematici važna za pojedinca i društvo. Od učenika se traži da zapamte procedure koje im je nastavnik predstavio, bez ikakvog objašnjavanja i povezivanja te učenici dobivaju dojam da je ono što su učili prošle godine potpuno nevažno za usvajanje novog gradiva. Učenici koji ne uspjevaju zapamtiti puno izoliranih činjenica postaju manje uspješni, osjećaju se nedovoljno sposobnim za rješavanje matematičkih zadataka i gube volju za učenjem matematike. Sposobnost pamćenje matematičkih činjenica ne ukazuje na količinu djetetovog matematičkog potencijala, one su samo pomoćna sredstva u praktičnom radu, a pravi djetetov potencijal očituje se u razumijevanju matematičkog koncepta.

Svaki se matematički koncept sastoji od tri komponente: jezične, konceptualne i proceduralne. Jezična komponenta sastoji se matematičkog vokabulara, sintakse i pravila prevođenja matematičkog jezika na materinski. Konceptualne komponente su same matematičke ideje i njihova reprezentacija (pomoću konkretnih i/ili simboličkih modela). Proceduralna komponenta sastoji se od algoritama i računskih postupaka koji se primjenjuju s obzirom na koncept. Kako bi dijete uistinu razumjelo i primijenilo matematiku ono mora usvojiti sve tri komponente nekog matematičkog koncepta. Mnogi učenici mogu primijeniti odgovarajući postupak u aritmetici no njihovo razumijevanje onoga što stoji iza tog postupka je slabo ili uopće ne postoji. Tako naprimjer ukoliko upitamo dijete u 5. razredu osnovne škole može li podijeliti decimalni broj decimalnim brojem, dijete će uspješno provesti proceduru, no ukoliko ga upitamo zašto je smjelo pomaknuti decimalnu točku kod djelitelja i djeljenika ono neće znati koji je razlog tome.

Problem je u tome što djeca često zaboravljaju postupke koje trebaju izvršavati, no jednom kad usvoje konceptualni model matematičke ideje teško da će taj koncept zaboraviti. Konceptualni modeli pridonose trajnosti znanja i vrlo su važni u učenju matematike. Pri usvajanju koncepta važna su konkretna iskustva i manipulativni materijali. Učenici nižih razreda osnovne škole mnogo lakše rješavaju problemske zadatke uz pomoć manipulativnih i slikovnih materijala. Dokazano je da upotreba takvih materijala motivira djecu za rješavanje problemskih zadataka.

U prvom djelu rada predstavljeni su konkretni manipulativni materijali, prikazana je njihova važnost u podučavanju matematike i dan je kratki metodički opis vođenja

djeteta pri usvajanju matematičkog koncepta od konkretnog doživljaja do apstraktne spoznaje.

Djeca s poteškoćama u učenju su skupina kod koje se posebno korisnim pokazuje korištenje manipulativnih materijala te je potrebno odrediti spefična područja gdje se javljaju teškoće. Zbog toga je u drugom djelu rada obrađena jedna od specifičnih teškoća u učenju - diskalkulija, dana su potencijalna područja u kojima se teškoća može javiti i dani su konkretni postupci u pomoći.

U trećem djelu rada dani su prijedlozi aktivnosti koje se mogu izvoditi s djecom pomoću jednog od didaktičkih materijala - Cuisenaire štapića. Aktivnosti su predstavljene po temama, dan je sažetak najčešćih problema koje djeca imaju s tom temom i dane su ideje kako im pomoći pri svladavanju problema.

Poglavlje 1

Konkretni materijali u podučavanju matematike

U ovom poglavlju govorit ćemo o važnosti konkretnog materijala u podučavanju matematike, dat ćemo opis vođenja djece od konkretnog doživljaja prema apstraktnoj spoznaji te ćemo opisati nekoliko primjera didaktičkog materijala.

1. Važnost konkretnog materijala u podučavanju matematike

Za usvajanje apstraktnih matematičkih koncepata važna su fizička, konkretna i vizualna iskustva. Prema švicarskom psihologu Piagetu i njegovoj teoriji kognitivnog razvoja, djeca se između 7. i 11. godine nalaze u fazi konkretnih operacija. U toj fazi dijete može vršiti pojedine mentalne operacije, no da bi to moglo potreban mu je konkretan manipulativan materijal. Konkretan materijal je svaki materijal koji djeca mogu fizički dodirivati, pomicati i preslagivati.

Sljedeći primjer koji donosi profesor M. Sharma u [10] prikazat će nužnost korištenja manipulativnih materijala pri vođenom razgovoru s djetetom ukoliko ono ima problema s konceptualizacijom i razumijevanjem. Od učenika četvrtog razreda osnovne škole zatraženo je da pomnože brojeve 72 i 6. Svi su učenici bili u mogućnosti izračunati taj produkt što nam pokazuje da su djeca shvatila proceduralnu komponentu množenja. Nakon toga postavljeno im je jednostavno pitanje: "Što moram dodati ukoliko u ruci imam $43 \cdot 3$ i želim imati $43 \cdot 4$?" Nekoliko učenika odgovorilo je 1 dok ih je nekoliko odgovorilo da se treba dodati 4 jer 3 treba postati 4. Ovi odgovori pokazuju da djeca nisu usvojila konceptualnu komponentu množenja. Tada je profesor izvadio plavi Cuisenaire štapić i rekao djeci da će plavi štapić predstavljati broj 43. Zatim ih je pitao koliko puta po 43 ima u ruci. Zatim je dodao još jedan plavi štapić i ponovio pitanje

te još jedan štapić i ponovio pitanje. Konačno ih je upitao: "Ukoliko u ruci imam $43 \cdot 3$ što moram dodati?" Svi učenici su odgovorili da moramo dodati jedan plavi štapić. Kad ih je upitao koji broj trebaju dodati umnošku $43 \cdot 3$ kako bi postao $43 \cdot 4$ odgovorili su 43.

Kada se kod ranog učenja računanja djecu uči na apstraktan način, koristeći samo matematičke simbole, bez korištenja konkretnih materijala, mnoga djeca neće uspjeti shvatiti ključnu vezu između stvarnih objekata i apstraktnih simbola. Područje računanja u matematici treba temeljiti na stvarnim objektima i vidljivim odnosima između objekata. Djeci treba dati dovoljno vremena da iskuse te odnose i veze. Nekoj djeci će biti potrebno puno više vremena od druge djece. Na primjer, djeci će pitanje koliko je 4+3 biti manje apstraktno ukoliko stavimo brojeve u kontekst: "Koliko ćeš bombona imati ako imaš 4 bombona i dobiješ još 3 bombona?" Postavljeni problem možemo prikazati slikom, no i slika je samo dvodimenzionalni objekt. Nekoj djeci će biti potrebni stvarni objekti koje mogu dotaknuti, premještati i prebrojavati, osobito kod učenja novih koncepata. Djeca koja imaju specifične teškoće kao što su slaba koncentracija, diskalkulija, disleksija morat će aktivnosti ponavljati više puta kako bi dobili konstantna iskustva i kako bi razvili osjećaj za količinu i osjećaj za broj. U drugom poglavlju nešto više bit će rečeno o diskalkuliji.

2. Od konkretnog prema apstraktnom

Djeca samostalno trebaju istraživati didaktički materijal i dolaziti do samostalnog zaključka. U slučaju da djeca ne mogu samostalno stvoriti zaključak, kompetentni učitelj treba voditi djecu kroz postupak istraživanja heurističkim razgovorom ili im ponuditi dodatna konkretna iskustva.

Nije predviđeno da konkretan materijal bude obična zamjena za kalkulator i nikad se ne smije koristiti mehanički, samo kako bi se došlo do odgovora. Konkretne materijale ne smije se koristiti isključivo za demonstraciju niti samo za poučavanje osnova matematike. Djeca s njima trebaju raditi, rukovati i istraživati, a najkorisniji su kad se isti materijal koristi na različitim stupnjevima, za različite teme i razine složenosti. Djecu treba stalno podsjećati da stvarna matematika nije ono što se događa sa znamenkama na papiru.

Prije prezentiranja novog koncepta putem manipulativnih materijala i konkretnih iskustava trebalo bi stvoriti situaciju slobodne igre i istraživanja koja bi omogućila djetetu da se upozna s materijalom i zadovolji potrebu za senzomotoričkim istraživanjem i taktilnim doživljajem. Preporuča se da se igra ne svede na potpuno samostalno istraživanje nego da učitelj bude taj koji koristi "vođeno istraživanje".

Nakon toga djecu treba pripremiti za usvajanje novog koncepta tako što će se nekoliko minuta posvetiti primarnim konceptima. Ovaj korak nije važan samo za prisjećanje ranije naučenog gradiva, već i za stvaranje veza među konceptima. Naprimjer ako ćemo djecu podučavati koncept množenja prije toga ćemo ponoviti koncept zbrajanja.

Dijete nakon toga putem manipulativnih aktivnosti upoznaje novi koncept. Učitelj koji koristi samo jednu vrstu materijala može navesti dijete da pomisli da je koncept ovisan o određenom materijalu te stoga materijale treba mijenjati. Tijekom aktivnosti učitelj treba postavljati mnoštvo pitanja. Ona ne pomažu samo u usvajanju koncepta već daju mogućnost učeniku da razmišlja i zaključuje te razvija matematički način razmišljanja.

Kada dijete shvati matematički koncept učitelj treba prenijeti konkretnu aktivnost na apstraktni stupanj te prikazati putem matematičkih simbola koncept koji je dijete usvajalo. Zapisivanje može započeti s tim da učenik samostalno izmisli simbole i notaciju te zatim učitelj pokaže koja je dogovorena notacija zapisivanja.

Slika 1.1: Metodika vođenja od konkretnog prema apstraktnom

Dijete treba poticati da verbalno komentira i objašnjava svaki postupak. Vrlo je važno da dijete objašnjava kako je do nekog odgovora došlo.

Može se dogoditi da dijete predugo koristi prste ili druga manipulativna pomagala pri računanju. Korištenje prstiju ili stavljanje pomoćnih oznaka na papir pokazuje da dijete nema odgovarajućih modela za matematičke koncepte. U tom slučaju djetetu treba dopustiti da si pomaže putem kompenzatornih mehanizama, ali istodobno poticati razvijanje boljih i efikasnijih modela koji bolje organiziraju informaciju. Na umu treba imati da u aritmetici možemo doći do ispravnog odgovora na više načina te da standardni, brži način nije nužno odgovarajući za svako dijete.

3. Manipulativni didaktički materijali

Na tržištu postoje razni didaktički materijali koji mogu pomoći pri učenju matematike. Neki od njih su Stern blokovi, Cuisenaire štapići, Unifiks kocke, računaljka, Dienes blokovi. Didaktičke materijale možemo podijeliti u 3 skupine: kvalitativni ("nepodijeljeni"), kvantitavni ("zasebni") i kombinirani didaktički materijal. Nepodijeljeni didaktički materijal je skup predmeta u kojem je svaki predmet dio jedne cjeline koja ima edukativno značenje kao cjelina, ali pri tome svaki dio cjeline nosi vlastite vizualno-prostorne osobine (npr. Cuisenaire štapići, Dienes blokovi i dr.). Zasebni didaktički materijal je skup predmeta u kojem svaki predmet predstavlja cjelinu, neovisno o drugim objektima (npr. mali predmeti, kocke i dr.). Zasebni materijali obično su svi jednakog izgleda, jednake boje i veličine te su prvenstveno namijenjeni brojanju po jedan.

U ovom radu aktivnosti će se izvoditi ponajprije pomoću Cuisenaire štapića, ali ćemo u nastavku, osim ovih štapića, opisati i neke druge didaktičke materijale koji se također mogu koristiti.

3.1. Mali predmeti

Kao materijal koji može koristiti u radu s djecom mogu poslužiti razni oblici kao što su novčići, igraće kockice, gumbići, štapići i slično. Neki autori predlažu kuglice od obojenog stakla koji inače služe kao ukras. Pri tome upozoravaju da se izbjegava previše mijenjanje boja i veličina jer se jednobojne predmete lakše prebrojava od onih koji su različitih boja i ukrašeni različitim uzorcima. Ovaj jednostavan materijal je koristan za rad s malim brojevima no nije prikladan za rad s brojevima većim od 20. Ovaj materijal ne uči djecu korisnim strategijama jer potiče brojanje po jedan.

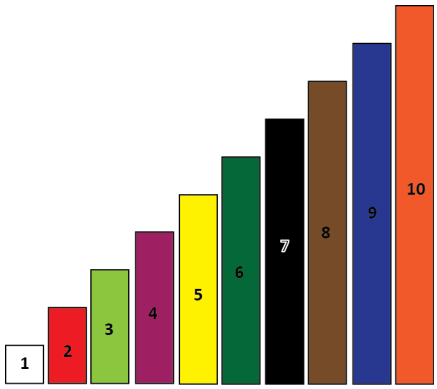
3.2. Cuisenaire štapići

Štapići nose ime svojega izumitelja, belgijskog učitelja Georgesa Cuisenairea (1891. - 1976.) koji je shvatio kako boje pomažu djeci s teškoćama u učenju. 1947. on je počeo podučavati elementarnu aritmetiku pomoću raznobojnih drvenih štapića (stupića), što je djeci omogućilo i taktilni doživljaj. Djeca, s kojom je radio, postala su mnogo uspješnija i motiviranija u učenju. Cuisenaire je izumio više načina primjene svojega kompleta štapića ne samo u matematici, već i u drugim područjima, npr. podučavanje jezika. Danas je komplet Cuisenaire štapića jedno od najpopularnijih didaktičkih pomagala u osnovnim školama diljem svijeta pomoću kojega se modeliraju praktički svi aritmetički koncepti.

Cuisenaire štapići su didaktički komplet koji se sastoji od drvenih štapića raznih visina i boja. Boja i veličina su obilježja koja se u ovom materijalu sustavno povezuju s pojmom broja. Svaka veličina Cuisenaire štapića ima svoju određenu i nepromjenjivu boju, što njegovu dužinu čini lako prepoznatljivom, bez potrebe za mjerenjem pomoću kocke koja predstavlja jedinicu i bez prebrojavanja jedinica. Budući da na štapićima nema nikakvih oznaka ili podjela na jedinice, oni omogućuju djeci da svaku količinu sagledavaju kao cjelinu, a ne kao skupinu zasebnih jedinica. To ujedno razvija i učinkovite metode računanja koje ne ovise o brojenju u jedinicama.

Boja i veličina štapića:

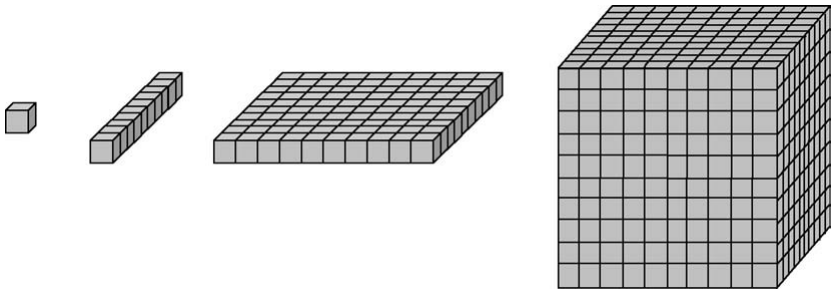
- Bijeli štapić - 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Crveni štapić - 2 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Svijetlozeleni štapić - 3 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Ljubičasti štapić - 4 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Žuti štapić - 5 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Tamnozeleni štapić - 6 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Crni štapić - 7 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Smeđi štapić - 8 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Plavi štapić - 9 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm
- Narančasti štapić - 10 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm



Slika 1.2: Cuisenaire štapići

3.3. Dienes blokovi ("Baza deset")

Dienes blokovi ili "baza deset" didaktički komplet sastoji se od trodimenzionalnih blokova. Blokovi su podijeljeni na segmente, a svaki segment označava jedinicu. Set se sastoji od kockica, štapića, pločica i blokova. Jedna kockica predstavlja jedinicu, štapić se sastoji od deset kockica i predstavlja deseticu, pločica se sastoji od deset štapića i predstavlja stoticu i blok se sastoji od deset pločica i označava tisućicu. Ovaj didaktički komplet pogodan je za razvijanje koncepta mjesne vrijednosti, konstruiranje brojeva, razvijanje algabarskih koncepata te poučavanje decimalnih brojeva. Komplet je sličan Cuisenaire štapićima, a osmislio ih je mađar Zoltan Dienes nedugo nakon što su osmišljeni Cuisenaire štapići. Za razliku od Cuisenaire štapića, ovaj materijal temeljen na broju 10 ima iscrtanu površinu, čime se naglašava kockica sa stranicom od 1 cm te ovdje nema blokova koji predstavljaju brojeve između 1 i 10, što znači da se brojevi manji od 10 moraju predstaviti pojedinačnim kockicama i odbrojavati se jedan po jedan.



Slika 1.3: Dienes blokovi

3.4. Unifiks kocke

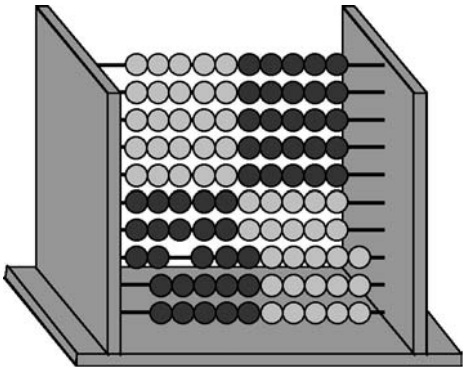
Slika 1.4: Unifiks kocke

Unifiks kocke se sastoje od razno obojenih kocaka koje se mogu međusobno spojiti. Sve kocke iz unifiks kompleta su iste dimenzije 2.5 cm × 2.5 cm × 2.5 cm. Kocke se također mogu koristiti za učenje aritmetičkih činjenica, usvajanje pojma mjesne vrijednosti s cijelim i decimalnim brojevima te mnogih drugih predmatematičkih vještina kao što su nizanje ili prepoznavanje obrazaca.

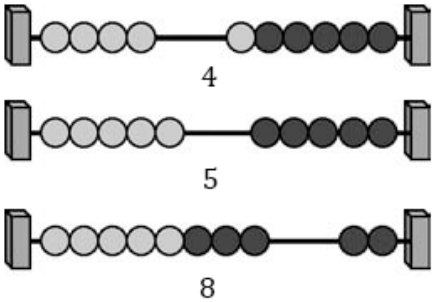
3.5. Abak (računaljka)

Abak ili računaljka se sastoji od okvira unutar kojega su na jednakoj udaljenosti paralelno nategnute žice. Na svakoj žici nalazi se 10 kuglica jednake veličine. Postoje razne vrste abaka. Kod nekih abaka kuglice u svakom redu imaju različitu vrijednost pa tako kuglice u prvom redu imaju vrijednost jedinica, u drugom redu - desetica, u trećem - stotica itd. S druge strane, kuglice na abaku se mogu promatrati i tako da svaka kuglica ima vrijednost jedinica.

Jedna vrsta abaka je tzv. slavenski abak koji je napravljen kao polje od 100 kuglica s promjenom boje nakon svakih 5 kuglica i nakon 5 redova kuglica (*Slika 1.5*). S tako obojenim kuglicama dijete na prvi pogled može vidjeti koji broj je prikazan pomoću abaka.



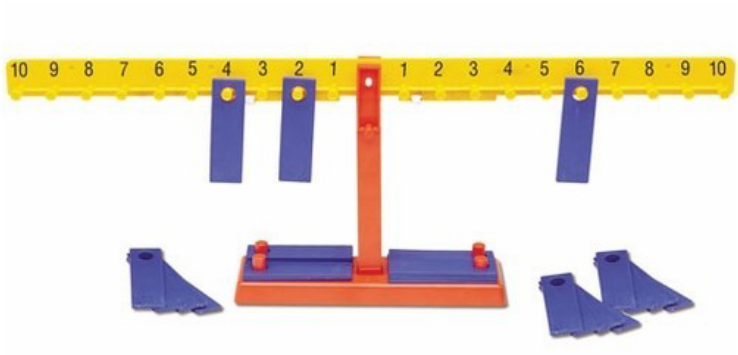
Slika 1.5: Slavenski abak



Slika 1.6: Pomoću abaka bez brojanja možemo "vidjeti" koji broj je prikazan

3.6. Invicta matematička vaga

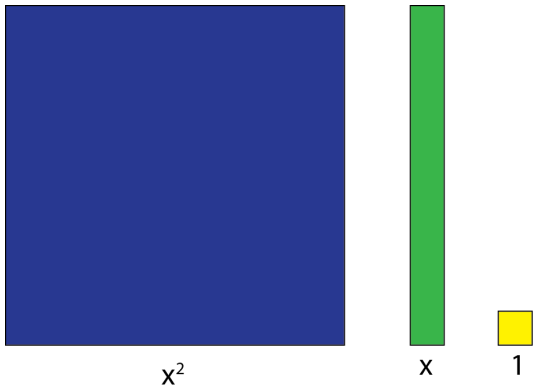
Matematička vaga je izvrstan didaktički materijal za vizualizaciju matematičkih jednadžbi i prikaz odnosa među brojevima. Kada je uteg obješen na klin nekog broja (npr. broja 6) na vagi, vaga više nije u ravnoteži. Kako bi vagu vratili u ravnotežu potrebno je s druge strane vage staviti staviti uteg na klin broja 6 ili kombinirati dva ili više utega koji u zbroju daju 6 (npr. 4+2).



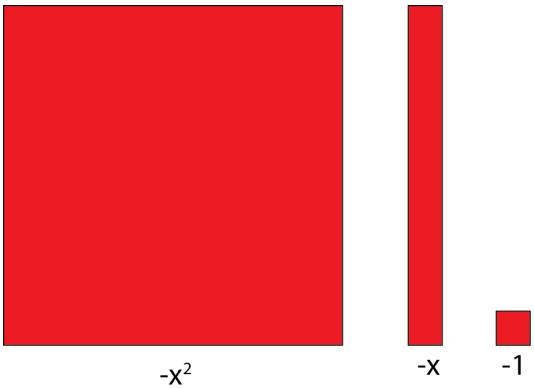
Slika 1.7: Invicta matematička vaga

3.7. Pločice za algebru

Pločice za algebru su didaktički materijal koji se koristi za reprezentiranje algebarskih odnosa i rješavanje jednadžbi. Kada se pločice koriste za modeliranje polinoma, operacije s polinomima su prikazane tako da su djetetu intuitivne. Pločice su konstruirane tako da jedna strana pločice predstavlja pozitivne vrijednosti dok je druga strana pločice crvene boje i predstavlja negativne vrijednosti.



Slika 1.8: Pločice koje reprezentiraju $x^2, x, 1$



Slika 1.9: Druga strana pločica reprezentira $-x^2, -x, -1$

Poglavlje 2

Teškoće u učenju matematike

Mnoga djeca imaju opće teškoće u učenju, dok neka djeca imaju poteškoće samo u području matematike. Uzroci teškoća su mnogobrojni i ispoljavaju se na razne načine. Uzroci mogu biti unutar djeteta, no mogu se pojaviti i izvan djeteta (neadekvatno podučavanje). Vrlo je važno poznavati teškoće u učenju matematike i pristupiti im na pravi način. Upravo su djeca s teškoćama u učenju ona kod kojih se nužnim pokazuje korištenje manipulativnih materijala pri usvajanju novih matematičkih koncepata stoga ćemo u ovom poglavlju proučiti diskalkuliju - jednu vrstu teškoće u učenju matematike.

1. Što je diskalkulija?

Pod pojmom diskalkulija podrazumijevamo skup specifičnih teškoća u učenju matematike/aritmetike i u obavljanju matematičkih/aritmetičkih zadataka. Te teškoće zadaju pojedincu velike probleme, bez obzira na njegov normalan intelektualan razvoj te adekvatno podučavanje.

Diskalkulija je djelomičan poremećaj u procesu usvajanja matematike, koji se može pojavljivati u svim ili samo u određenim matematičkim područjima. Dijete pri tome napreduje u usvajanju matematičkih koncepata, ali mnogo sporije od svojih vršnjaka i neadekvatno svojoj mentalnoj dobi. Za razliku od toga akalkulija (a – "bez", "potpuno nedostajanje") je pojam koji označuje potpunu nesposobnost usvajanja gradiva iz matematike, tj. potpunu odsutnost matematičkog mišljenja.

Najčešći oblik diskalkulije koji se kod djece pojavljuje je razvojna diskalkulija. U razvojnoj diskalkuliji poteškoće se formiraju najčešće prije rođenja i pokazuju se čim je dijete počelo upoznavati pojam broja.

Britanski Zavod za obrazovanje i razvoj vještina prvi je puta prepoznao i definirao ([8], str.2) razvojnu diskalkuliju kao: *stanje koje utječe na sposobnost usvajanja aritmetičkih vještina. Djeca s diskalkulijom mogu imati teškoće u razumijevanju jed-*

nostavnih brojevnih pojmova, mogu patiti od pomanjkanja intuitivnog shvaćanja brojeva i mogu imati teškoće u učenju činjenica i postupaka u računanju. Čak i ako ponude točan odgovor ili primjene točan postupak rješavanja, moguće je da to čine mehanički i bez razumijevanja.

Specifične teškoće u čitanju - disleksija te pisanju - disgrafija, također utječu na usvajanje matematike, no međutim te se teškoće bitno razlikuju od diskalkulije. U mnogim slučajevima djeca s disleksijom imaju razvijeno matematičko mišljenje no teško manipuliraju matematičkim simbolima.

2. Oblici razvojne diskalkulije

Dr. Ladislav Košč 1970. je prema simptomima koje je uočavao kod djece naveo sustav klasifikacije razvojne diskalkulije na 6 oblika: verbalna, praktognostička, leksička, grafička, ideognostička i operacijska diskalkulija. Svaki individualan slučaj može imati razne kombinacije simptoma i oblike diskalkulije. Što više poteškoća dijete ima to je teže napraviti pravu dijagnozu i primijeniti pravu terapiju.

1. **Verbalna diskalkulija**
   Dijete s verbalnom diskalkulijom ima poteškoće u usvajanju verbalnih matematičkih izraza tj. matematičkog rječnika. To se može pokazivati na nekoliko načina: dijete ima poteškoće pri prepoznavanju usmeno izgovorenog broja, ne može samostalno imenovati količine ili pak može imati teškoće u automatiziranom brojanju naglas.

2. **Praktognostična diskalkulija** (dispraktička diskalkulija)
   S ovom vrstom diskalkulije dijete ima poteškoće pri manipuliranju stvarnim i nacrtanim objektima. Dijete s praktognostičkom diskalkulijom ima teškoće pri zbrajanju predmeta, uspoređivanju prema količini i prepoznavanju prostornih odnosa (veće, manje, kraće, dulje).

3. **Leksička diskalkulija** (numerička disleksija)
   To je teškoća u čitanju matematičkih simbola (znamenki, brojeva, računskih znakova i zapisanih matematičkih postupaka). U većini slučajeva pojavljuje se u kombinaciji s disleksijom.

4. **Grafička diskalkulija** (numerička disgrafija)
   To je teškoća u pisanju matematičkih simbola tj. dijete ne može povezati pisani simbol s odgovarajućom količinom. Dijete s tom teškoćom ima problema pri

prepisivanju znamenki ili matematičkom diktatu. Kao i leksička diskalkulija najčešće se pojavljuje zajedno s disleksijom i disgrafijom.

5. **Ideognostička diskalkulija**
   Ideognostička diskalkulija je teškoća u shvaćanju matematičkih pojmova i kocepata. Dijete s tom poteškoćom nije u stanju računati u sebi, ne shvaća smisao onoga što je pročitalo ili nije u stanju nastaviti niz brojeva.

6. **Operacijska diskalkulija** (anaritmetija)
   Kod ove vrste diskalkulije dijete ima poteškoće pri učenju i primjeni pravila računanja. Dijete kod ove diskalkulije zamjenjuje jednu računsku operaciju drugom, dugo koristi prste pri računanju ili računa na papiru čak i onda kada je moguće da to izračuna u sebi.

3. Prepoznavanje djeteta s diskalkulijom

Djeca s diskalkulijom se od djece kojima je matematika težak predmet te ju uče sporije razlikuju po tome što čine mnogo neuobičajenih tj. specifičnih grešaka. Najčešće su to:

- Dijete zamjenjuje jedan broj s drugim. Naprimjer broj 4 dijete čita kao "osam", a neki drugi put ga koristi kao da je to 3.
- Dijete ponavlja isti broj ili radnju više puta. Naprimjer ako je u prvom zadatku na stranici bio zadatak sa zbrajanjem, dijete će zbrajati u svim zadacima do kraja stranice bez obzira što ima zadatke s oduzimanjem.
- Dijete zrcalno okreće znamenke, u višeznamenkastim brojevima mijenja poredak znamenki.
- Dijete slabo pamti i prepoznaje niz brojeva.
- Dijete ima velike teškoće u brojanju unatrag.
- Dijete ima problem u percipiranju količine tj. ne može bez brojanja procijeniti ni male količine.
- Djetetu je pri računanju potrebno puno više vremena nego njegovim vršnjacima te se pri računanju oslanja na prste.
- Dijete se ne može automatski prisjetiti aritmetičkih činjenica, ne može zapamtiti tablicu množenja ili primijeniti postupak koji sadrži više od dva koraka.

4. Potencijalna područja u kojima se može javiti teškoća u učenju matematike

Dijete može imati teškoće u matematici zbog raznih razloga: zbog nedostataka kognitivnih sposobnosti, odsutnosti predmatematičkih i pomoćnih vještina, nedovoljne razvijenosti matematičkog jezika i nedovoljne uvježbanosti temeljnih aritmetičkih vještina. Iako su razlozi zbog kojih se teškoća pojavljuje i problemi u kojima se teškoća ispoljava raznovrsni u sljedećim tablicama dat ćemo neka potencijalna područja i konkretne prijedloge kako pomoći djetetu.

Kratkotrajna memorija

Problem	**Prijedlog**
Slaba kratkotrajna memorija može utjecati na sposobnost učenika da prati nastavne cjeline.	Nemojte davati niz dugačkih uputa. Zamislite da vam netko daje da zapamtite deseteroznamenkasti broj telefona izgovarajući ga jednom, govoreći brzo i bez stanke.
Kod mentalne aritmetike izazovno može biti pamćenje pitanja.	Ponovite pitanja ili ključne podatke zapišite na ploču.
Postupak koji učenici pokušavaju koristiti kako bi riješili zadatak može imati previše koraka za učenikovu kratkotrajnu memoriju.	Pitajte dijete koju metodu koristi. Ako je potrebno predložite alternativnu metodu. Omogućite djetetu da koristi bilješke koje je napravilo.
Prilikom rješavanja aritmetičkih zadataka sporo se prisjećaju osnovnih činjenica.	Osigurajte tablicu množenja, tablicu kvadrata, tablicu zbrajanja i oduzimanja do 20. Motivirajte ga pitanjima koja koriste činjenice koje dijete zna (obično je to operacija s 2,5,10).
Kod prepisivanja zadataka iz udžbenika ili s ploče pomiješaju dijelove pitanja i stvore novo pitanje.	Omogućite djetetu radni listić na koji može pisati. Potaknite dijete da koristi markere ili boje kako bi pratilo gdje se zadatak s ploče nalazi na njegovom listiću.

Dugoročna memorija

Problem	Prijedlog
Učenik se automatski povlači kad se treba prisjetiti osnovnih činjenica u zbrajanju pri rješavanju problema, osobito na ispitu.	Dopustite djetetu da koristi prste prilikom računanja (ali imajte na umu da to neće razviti vještine brojanja). Naučite dijete da rješava zadatke pomoću ključnih činjenica (npr. parovi brojeva koji u zbroju daju 10). Podučite dijete kako može napraviti tablicu zbrajanja.
Za neke učenike prisjećanje činjenica iz tablice množenja predstavlja konstantan problem.	Dozvolite djetetu da koristi tablicu množenja. Naučite ga kako može napraviti tablicu množenja i podučite ga strategijama koje može koristiti. (npr. množenje brojem devet preko množenja brojem 10, korištenje strategije duplo pri množenju s brojem 4 pomoću množenja s brojem 2).

Nizanje i održavanje redoslijeda

Postoje razni nizovi u matematici. Brojanje od 1 do 10 je prvo iskustvo niza za većinu djece. Mogućnost prepoznavanja i pamćenje nizova je korisna vještina za usvajanje koncepta broja.

Problem	Prijedlog
Brojanje po 2 iznad 10.	Počnite s bazom koju dijete zna tj. brojanjem 2, 4, 6, 8 te koristeći tu bazu navedite dijete da prepozna obrazac kod 12, 14, 16, 18, . . . , 22, 24,. . .
Brojanje po 10 kada znamenka jedinice nije 0. Učenici znaju niz 10, 20, 30,. . . , no niz kao što je 13, 23, 33,. . . im stvara problem.	Ovo je dobra prilika za poboljšanje razumijevanja koncepta mjesnih vrijednosti. Koristite novčiće, štapiće ili neki drugi manipulativan materijal kako bi prikazali uzorak. Koristite tablicu brojeva od 1 do 100 kako bi djeca lakše uočila „plus 10“ obrazac.

Smjer izvođenja

Dijete može biti nesigurno pri izvođenju računske operacije jer nije sigurno u smjer postupka. Algoritam zbrajanja u odnosu na algoritam dijeljenja počinje od desne strane i ide prema lijevoj te se odgovor pojavljuje na dnu. Za razliku od toga pri dijeljenju se kreće od lijeve prema desnoj strani, a odgovor se nalazi na vrhu. Nedosljednost u smjeru izvođenja operacija može prouzročiti zbunjenost kod djeteta.

Problem	Prijedlog
Neka djeca mogu imati problem s brojanjem unazad i to više nego što učitelj može predvidjeti.	Ovaj problem će zahtijevati više vježbe. Počnite s vježbom „jedan manje od x“. Počnite od različitih brojeva, a zatim počnite brojati unazad po 2, 5, 10 (također i 76, 66, 56,... jednako kao i sa 70, 60, 50,...)
Djeca čuju broj „devetnaest“, no zapisuju 91. (To je slučaj sa svim brojevima koji završavaju na –naest.)	Upozorite dijete da su to jedini brojevi koji čine iznimku kod dvoznamenkastih brojeva te da kod njih znamenka jedinice u izgovoru dolazi prije znamenke desetica. Tim brojevima posvetite više pažnje.

Problemi sa samopouzdanjem i motivacijom

Uzrokom neuspjeha može biti i djetetov strah od matematike. Dijete se unaprijed osjeća bespomoćno i neuspješno i unaprijed misli kako ne može riješiti zadatak. Uzrok djetetove nemotiviranosti i manjka samopouzdanja može biti u stavu roditelja prema matematici kao izrazito teškom predmetu. Dijete koje često od roditelja i nastavnika čuje izjavu: ”nema veze što nisi uspio, bitno da si dao sve od sebe” može postati frustrirano jer ne može postići uspjeh bez obzira na svoj trud te može koristiti strategiju izbjegavanja neuspjeha i ne rješavanja zadataka kako bi pokušalo ostaviti dojam da je problem u tome što se nije dovoljno trudilo.

Problem	Prijedlog
Učenik ostavlja puno neodgovorenih pitanja. Učenik koji misli da ne može riješiti zadatak može odlučiti ne pokušavati riješiti ga kako ne bi napisao netočan rezultat.	Taj problem se javlja ukoliko dijete ima matematičku anksioznosti i negativan stav o matematici. Upitajte dijete razumije li pitanje te što mu nije jasno kod pitanja. Ne prihvaćajte odgovor 'matematika'. Tražite od njega da bude precizniji. Uočite postoji li povezanost između neodgovorenih pitanja.
Učeniku je potrebno puno vremena kako bi počeo s rješavanjem.	Može biti da je učenik loše organiziran, ne može pronaći olovku, gumicu, knjigu... No može biti da učenik izbjegava neuspjeh. Pitajte učenika da riješi samo jedno ili dva pitanja. (To ima još jednu važnu korist. Ako učenik radi greške pri prvom vježbanju u novoj cjelini, te greške će se javljati i kasnije, te je potrebno što prije ispraviti primijećenu pogrešku.)

Problem	Prijedlog
Učenik nema ideju kako započeti zadatak.	Ponudite učeniku nekoliko uputa ili započnite zadatak.
Učenik započinje s rješavanjem zadataka, ali odustaje nakon nekoliko pitanja.	Problem bi mogao biti u prevelikom skoku u težini pitanja. Neki radni listići su napravljeni tako da počinju s nekoliko jednostavnih pitanja i onda „bam“, sljedeće pitanje je puno teže i učenici se prepuste strategiji „ne pokušavaj“. Provjerite težinu listića tako da ih zapravo rješavate i stavljate se u poziciju učenika.

5. Opći principi pomoći

Promatrajući čimbenike koji mogu dovesti do problema u učenju matematike dolazimo do zaključka o važnosti poznavanja specifičnosti teškoće djeteta. Velik broj kombinacija područja u kojem djeca imaju poteškoća ne omogućava kreiranje metode koja će biti efikasna za sve, no moguće je izvesti neke opće principe pomoći.

Opći principi bazirani su na sljedećem:

- Koristiti ono što dijete zna kako bi ga doveli do onoga što treba znati. To je suprotnost stavljanju pred dijete zahtjevnih činjenica i postupaka koje ono ne zna i dovodeći ga u stanje da gubi želju za učenjem.
- Upoznati djetetov stil razmišljanja te ga učiti na način koji uzima u obzir taj stil dok se ne pokušava razviti prikladniji stil.
- Konstantno nadograđivati nove koncepte na ranije naučene koncepte.
- Koristiti jezik kojim komunicira dijete te kad god je moguće vizualno potkrijepljivati izrečeno kao suprotnost tome da djetetu govorimo ”to tako treba pa napravi tako.”
- Posvijestiti si da čak i najbolja metoda i strategija neće uspješno učiti svako dijete.
- Koristiti iste primjere tj. iste brojeve kod objašnjavanja različitih koncepata.
- Učiti djecu ”zašto”, a ne ”kako”.

Poglavlje 3

Aktivnosti pri podučavanju matematike i Cuisenaire štapići

U ovom poglavlju predstavit ćemo zbir aktivnosti koje se mogu provoditi tijekom nastavnog i izvannastavnog rada, u radu s jednim djetetom ili skupinom djece. Sve aktivnosti osmišljene su kako bi djeci olakšale razumijevanje i pomogle im u povezivanju matematičkih koncepata. Ideja ovih aktivnosti je ponuditi djeci konkretna iskustva koja će im pomoći u stvaranju čvrstih kognitivnih modela. Aktivnosti su prikladne za poučavanje osnovnih matematičkih načela u redovnoj nastavi, ali i za podučavanje djece s teškoćama u učenju te se stoga u opisu aktivnosti često daje naglasak na probleme koje dijete ima prilikom savladavanja određenog koncepta. Iako je ovdje naglasak na izvođenju aktivnosti pomoću Cuisenaire štapića, napominjemo da je važno kombinirati didaktičke materijale. Istraživanja su pokazala da djeca mnogo lakše usvajaju koncept koji je prikazan na više raznih načina, putem različitih materijala ([11]). Nijedan didaktički materijal ne može biti dobar za sve koncepte niti za svu djecu. Ukoliko se koristi samo jedna vrsta materijala, dijete može zaključiti da je koncept ovisan o određenom materijalu, te stoga materijale treba mijenjati i kombinirati u skladu s osobnošću djeteta.

1. Upoznavanje s Cuisenaire štapićima

Kao što smo rekli u prvom poglavlju (*str. 6*) Cuisenaire štapići su didaktički komplet koji se sastoji od drvenih ili plastičnih štapića raznih visina i boja (*Slika 3.1*). Štapići su u deset različitih dužina, počevši od 1 cm, a svaki sljedeći je za 1 cm duži.

Prije nego što dijete počne koristiti štapiće potrebno je osigurati neko vrijeme za upoznavanje.

Neke aktivnosti za upoznavanje sa štapićima su:

Slika 3.1: Komplet Cuisenaire štapića

- Osigurajmo djetetu dovoljno vremena za slobodnu igru i istraživanje. Tijekom slobodne igre dijete će spontano konstruirati, izgrađivati, sastavljati, rastavljati, premještati objekte koje je izgradilo. Pomoću štapića izgrađivat će trodimenzionalne objekte kao što su kuće, vozila, kule, vlakovi itd. Tijekom slobodne igre postavljajte djetetu neka od sljedećih pitanja: "Što si izgradio?", "Ima li to što si izgradio ime?", "Koliko štapića si iskoristio kako bi to izgradio?", "Koliko crvenih štapića si koristio?" "Možeš li opisati što si izgradio svom prijatelju u klupi?"

  Tijekom slobodne igre dijete će spontano odlučivati, rješavati problem reprezentacije zamišljenog objekta, koristiti simetriju, obrasce te razvijati prostornu orijentaciju.

Slika 3.2: Slobodna igra

- Počnimo razdvajati štapiće prema boji. Držimo jedan od štapića u ruci te zatražimo od djeteta da nam pokaže štapić koji je manji/veći od štapića kojeg držimo u ruci. Navodimo dijete da shvati da postoji više odgovara na postavljeno pitanje. Zatim uzmimo u ruke dva štapića različite veličine (jedan neka se

od drugoga razlikuje za barem dvije veličine) te zatražimo od djeteta da pokaže štapić koji je između dva zadana. Većina djece predškolske dobi moći će pronaći štapiće koji su duži/kraći od zadanog no imat će problema kada zatražimo od njih da pronađu štapić koji je između dva štapića koja držimo u ruci.

- Tražimo od djeteta da izgradi stepenice koristeći jedan štapić od svake boje. Tražimo od djeteta da krene od najmanjeg prema najvećem te od najvećeg prema najmanjem. Počnimo od prepoznavanja bijelog štapića kao broja jedan. Zatim pitajmo koliko vrijedi svaki od preostalih štapića u odnosu na bijeli. Konačno dijete bi trebalo zaključiti da je bijeli štapić jedan, crveni - broj dva itd. Nakon što dijete više puta ponovi aktivnost možemo mu postaviti izazov da zatvori oči i pokuša po redu reći kako idu boje u stepenicama koje je izgradilo.

- Povežimo brojevne vrijednosti štapića prema njegovoj boji. Dijete treba ispitivati pitanja kao što su: "Pokaži mi štapić koji vrijedi kao broj 5?" te "Koliko vrijedi ovaj štapić?"

- Zatražimo od djeteta da sastavlja veće brojeve od Cuisenaire štapića (npr. broj 14). Uvježbajmo i suprotnu radnju: pokazujmo broj sastavljen od štapića te tražimo dijete da ga napiše.

- Od djeteta zatražimo da u ruke uzme nekoliko različitih štapića i zatim ruke stavi iza leđa. Zatim tražimo od djeteta da bez gledanja pokaže npr. crveni štapić.

2. Predmatematičke vještine

2.1. Nizanje

Nizanje je jedna od komponenata neophodna za usvajanje koncepta broja. Nizanje je sposobnost sastavljanja elemenata u niz prema kriteriju povećavanja ili smanjivanja njihove veličine, visine, boje. Dijete koje ima poteškoća u učenju uspoređuju objekte u paru te pri tome ne obuhvaća cjelinu. Nizove zato treba podučavati počevši s dva ili tri predmeta a zatim postupno proširiti zadatak do pet ili šest veličina postupno povećavajući složenost zadatka. Pri tome su korisni zadaci kao što su: "Nastavi niz!" ili "Što je sljedeće?". Nizanje možemo uvježbavati prvo s djetetu poznatim predmetima kao što su igračke, zatim manipulativnim materijalom kao što su Cuisenaire štapići, zatim slikovnim simbolima i geometrijskim likovima te u konačnici s brojevima.

Slika 3.3: Primjeri nizova s Cuisenaire štapićima

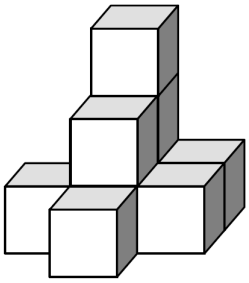
2.2. Prostorni zor

Pod pojmom prostorni zor (eng. spatial ability, spatial sense) podrazumijevamo intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. On uključuje koncepte tradicionalne geometrije, a osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika.

Gledajući u fizički predložak a kasnije njegovim misaonim zamišljanjem (vizualiziranjem), učenici mogu crtati i različite poglede na geometrijska tijela sastavljena od jednakih kocaka, kao i graditi ta tijela na temelju danih pogleda na njih. Kao vježba, mogu poslužiti sljedeće aktivnosti.

Aktivnost:

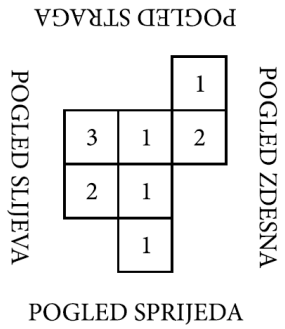
Promatrajući donju sliku, učenici od kocaka (npr. od bijelih Cuisenaire štapića) trebaju sastaviti takvo tijelo. Potom u kvadratnoj mreži trebaju nacrtati pogled sprijeda (nacrt), pogled odozgo (tlocrt) i pogled zdesna (bokocrt) na to tijelo. Učenike možemo upitati koliko je kocaka utrošeno pri gradnji.



Slika 3.4: Kocke

Aktivnost:

Na *Slici 3.5* je prikazan plan gradnje tijela sastavljenog kocaka (bijelih Cuisenaire štapića). Brojevi na tlocrtu označavaju broj kocaka u pojedinom "stupcu", tj. njegovu "visinu". Radeći u timovima, učenici trebaju sagraditi tijelo prema zadanom planu, a potom u kvadratnoj mreži nacrtati poglede na njega s raznih strana.



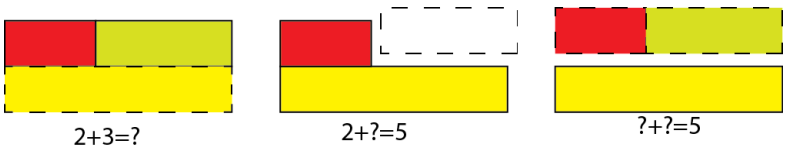
Slika 3.5: Plan gradnje

3. Zbrajanje i oduzimanje

U prvoj aktivnosti djecu trebamo upoznati s konceptom zbrajanja. To možemo napraviti tako da spojimo dva kraja štapića i pročitamo tu akciju kao zbroj dva broja koja su reprezentirana štapićima. Npr. ukoliko uzmemo svijetlozeleni štapić (3) i stavimo ga do žutog štapića (5) pročitat ćemo to djetetu kao 3 plus 5 (3 i 5, 3 dodamo broju 5).

Pomoću Cuisenaire štapića mogu se uvježbavati aritmetičke činjenice u svim oblicima:

- $2 + 3 = \_\_$
- $3 + \_\_ = 5$
- $\_\_ + 3 = 5$
- $\_\_ + \_\_ = 5$



Slika 3.6: Zbrajanje pomoću Cuisenaire štapića

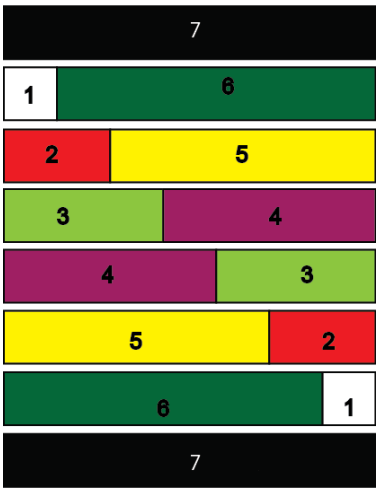
Dok djeca uvježbavaju aritmetičke činjenice korisno ih je poticati da na temelju računske radnje sami osmisle zadatak riječima prema zadanim brojevima i tako stave zadatak u neki kontekst.

Aktivnost: Sastavnice brojeva do 10

Uzmimo dva štapića iste boje i između njih stavimo manji štapić, s time da ih nekad poravnamo s desne, a nekad s lijeve strane. Neka učenici prvo pogađaju, a zatim

izmjere koji štapić točno pristaje u prazninu.

Svaki broj istražimo pojedinačno tako da otkrijemo sve mogućnosti njegova sastavljanja te koristimo mnogo pitanja i puno matematičkih izraza. Potičimo dijete da pronađe sve moguće kombinacije koje u zbroju daju neki broj te sve jednakosti zapisuje matematičkim simbolima.



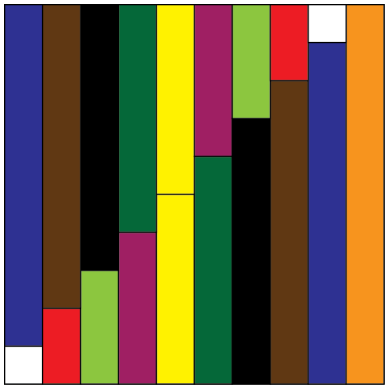
Slika 3.7: Sastavnice broja sedam

Neka učenici slože sve moguće načine dobivanja broja od dva dijela. Na *Slici 3.7* je prikazano kako to izgleda za broj 7. Heurističkim razgovorom dovedimo dijete do toga da zaključi kako se obrazac mijenja iz reda u red tj. da zaključe da čim jedna sastavnica postane veća za jedan, druga mora postati manja za jedan i obrnuto.

Tijekom svih aktivnosti koje izvršavamo treba čitati i pisati jednakosti koje su napravljene. Tijekom čitanja treba koristiti različite izraze. Mogući izrazi koje možemo koristiti umjesto "plus" su "dodati", "više" te "i", umjesto "jednako" možemo govoriti "su" ili "daju" i slično.

Posebno je važno da djeca nauče komplemente do 10 pa se sastavnicama broja 10 treba posebno posvetiti. Neka djeca slože stube od štapića, od 10 do 1. Zatim neka od stuba slože zid dodajući na vrh svakog štapića broj koji "stubu" dopunjava do 10, tako da u svakom stupcu bude 10 (*Slika 3.8*).

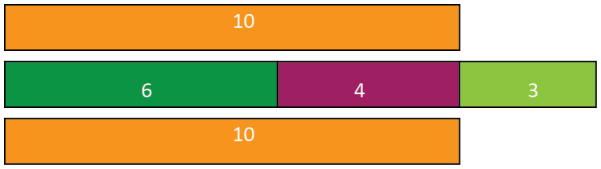
Djetetu postavljajmo pitanja kao što su: koji broj uz broj 3 daje 10? Deset je 6 plus koliko? Koliko moram dodati broju 4 da dobijem 10? Deset minus 8 je...? itd.



Slika 3.8: "Zid od štapića"

Aktivnost: Upoznavanje prijelaza desetice

Prijelaz desetice najkorisnija je mentalna strategija koju djeca trebaju naučiti. U ovoj aktivnosti će se pokazati važnost poznavanja svih sastavnica broja 10. Prijelaz desetice potrebno je vježbati na sve načine dok je djeca ne nauče koristiti bez korištenja konkretnog materijala, papira i olovke.



Slika 3.9: Prijelaz preko desetice

Prvo između dva narančasta štapića (10) stavimo tamnozeleni štapić (6). Razgovorom navodimo dijete da shvati da dodavanjem broja 1, 2, 3, 4 nećemo preći preko 10 dok dodavanjem većeg broja hoćemo. Ukoliko želimo zbrojiti $6 + 7$ između dva štapića od 10 stavimo štapić od 6 te dijete mora naći broj koji s 6 daje 10 (traženje komplementa). To znači da broj 7 moramo rastaviti na 4 i na ono što je ostalo tj. 3 (*Slika 3.9*).

Aktivnost: Zadaci s nedostajućim pribrojnikom

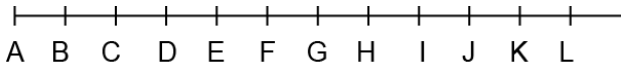
Većina sedmogodišnjaka i osmogodišnjaka bez problema može riješiti zadatke kao što su $5 + 4 =$ __, no imat će problema ukoliko dobiju zadatak kao što je $3 +$ __ $= 8$. Sa stajališta odrasle osobe problem se lako može prevesti na problem ukoliko netko

ima 3 bombona, a 8 bombona je potrebno koliko još bombona trebamo dodati? No djeci je potrebno puno više mašte kako bi povukli analogiju između simboličkog jezika i konkretnog iskustva. Koncept zbrajanja je primarni koncept (koncept koji ne ovisi o nijednom drugom konceptu), dok je koncept pribrojnika koji nedostaje sekundarni koncept koji ovisi o tri primarna koncepta: konceptu zbrajanja, konceptu broja koji nedostaje i konceptu jednakosti.

Razlog ove poteškoće može biti u tome da djeca simbol '+' shvaćaju kao simbol sa značenjem da gdjegod vide taj simbol moraju izvršiti operaciju zbrajanja.

Problem s nedostajućim pribrojnikom predstavljen na apstraktnoj razini nije prilagođen kognitivnoj razini mnoge djece do 9. godine. Kako bi se razumjelo koncept jednakosti dijete bi se trebalo naći u fazi konkretnih operacija te biti sposobno za reverzibilno mišljenje (sposobnost ljudskog uma da u mislima djelujemo u jednom smjeru, ali i da se možemo vratiti na početak). Mnoga djeca znak jednakosti "=" shvaćaju kao znak koji im govori da trebaju izvršiti operaciju s lijeve strane znaka jednakosti.

Pri podučavanju učitelj treba pronaći odgovarajuće modele i strategije koji bi pomogli djetetu u učenju. Naprimjer brojevna crta nije odgovarajući model za podučavanje problema nedostajućeg pribrojnika i otežava djeci učenje, posebno onoj izrazitih vizualnih sposobnosti i slabih kvantitivnih sposobnosti. Kako bi brojevni pravac prikazao neodgovarajućim modelom taj problem odraslima je prikazao profesor M. Sharma. On u svom članku [10] zadaje problem E+__=K te traži da se pokuša riješiti pomoću brojevnog pravca na *Slici 3.10*.



Slika 3.10: Brojevni pravac

Prilikom rješavanja ovog problema, odrasli će prvo problem prevesti na onaj poznati: $4 + \_\_ = 10$. Kako je broj 6 rješenje ovog problema, a broju 6 odgovara slovo G to daje rješenje E+G=K. Djeca nažalost nemaju odgovarajući model na koji bi mogli prevesti svoj problem.

Pri podučavanju ovog koncepta započnimo sa zadacima ovog tipa: $\_\_ + \_\_ = 10$. Tražimo od djeteta da pronađe sve kombinacije koje u zbroju daju 10, te tražimo da zapiše svaku kombinaciju.

Zatim pređimo na zadatke u kojima nedostaje jedan od pribrojnika. Taj pribrojnik možemo sakriti u kutiju, složiti zadatak kao što je na *Slici 3.11* i tražiti od djeteta da kaže koji štapić se nalazi u kutiji. Zadatak zatim možemo napisati na papir te tražiti od djeteta da zadatak pročita. Treba vježbati sve kombinacije: $10 = 7 + \_\_$, $10 = \_\_ + 7$, $\_\_ + 7 = 10$, $7 + \_\_ = 10$.

Slika 3.11: Problem nedostajućeg pribrojnika

4. Množenje i dijeljenje

Postoje dva popularna načina podučavanja množenja. Prvi pristup je proširivanje koncepta zbrajanja, odnosno zamjena za ponavljano zbrajanje jednakih pribrojnika. Tako se $3 \cdot 3$ tumači kao $3+3+3$. Kada djeca shvaćaju množenje isključivo kao skraćeno zbrajanje jednakih pribrojnika kod njih se stvara dojam da je jedina potrebna vještina u množenju brojanje. Takvo razumijevanje funkcionira samo kod cijelih brojeva, ali ne priprema djecu za konceptualizaciju množenja razlomaka ili drugih vrsta brojeva.

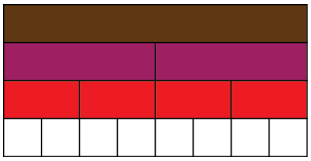
Prema drugom pristupu koncept množenja se prezentira kao dvodimenzionalni koncept u kojem se faktori prikazuju kao dvije stranice pravokutnika. Na konkretnom stupnju djeca upoznaju kvadratnu jedinicu, a $2 \cdot 6$ se tumači putem prikazivanja pravokutnika sa stranicama 2 i 6 koji se sastoji od 12 kvadratića.

Pamćenje tablice množenja posebno je teško za djecu sa slabom vizualnom memorijom i za djecu s diskalkulijom može biti prava noćna mora. Nijedan aspekt podučavanja elementarne matematike nije toliko kontroverzan kao ideja učenja tablice množenja napamet te neki stručnjaci smatraju da to s njima ne treba niti pokušavati nego se bazirati na kreiranju tablice i razumijevanju koncepta. Dijete bi trebalo biti u stanju razumjeti kako nastaje tablica množenja, trebalo bi ju znati osmisliti, a zatim zapamtiti jer u suprotnom neće biti dovoljno brzo i spontano. Dijeljenje treba podučavati istodobno kad i množenje i to kao obrnuti postupak od množenja.

Moguće je da će se dijete zbog specifičnosti poremećaja vraćati na zbrajanje čak i ako smo prešli na novi koncept množenja i zadajemo mu zadatke s množenjem. Naprimjer ukoliko djetetu zadamo zadatak $2 \cdot 3$ dijete odgovara da je to 5. U tim situacijama dijete treba poticati da pomoću štapića složi $2 + 3$, a potom $2 \cdot 3$.

Prije samog uvođenja koncepta množenja može se izvesti sljedeća aktivnost. Uzmimo naprimjer štapić koji vrijedi osam i zamolimo dijete da ispod njega složi štapiće jednake boje u "vlak" na način da ti vlakići daju točno osam. Dijete može primijetiti da "dvije po četiri daju osam", "četiri po dva daju osam", "osam po jedan daju osam". S ovom

aktivnošću dijete osim koncepta množenja može učiti i o djeljenju te o pojmovima kao što su faktor ili višekratnik.

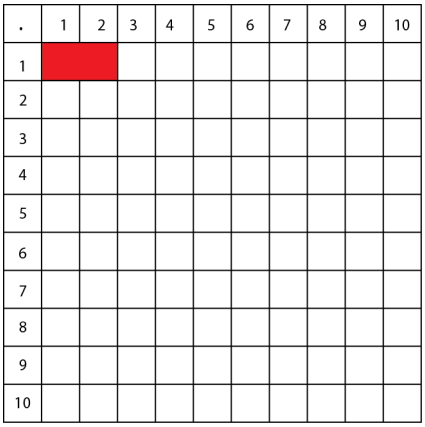


Slika 3.12: Aktivnost prije uvođenja koncepta množenja

Aktivnost: Stvaranje tablice množenja pomoću Cuisenaire štapića

Poznata je činjenica da mnogo bolje pamtimo ono što smo stvorili sami nego ono što smo dobili gotovo. Istraživanja su pokazala da djeca mogu bolje zapamtiti tablicu množenja kada je kreiraju samostalno pomoću konkretnih materijala. Stvaranje tablice množenja pomoću Cuisenaire štapića odgovara djeci koja matematičku informaciju obrađuju uglavnom vizualno, od cjeline prema djelovima.

Pripremimo za dijete praznu tablicu 10×10. Uzmimo bijeli štapić i podsjetimo djecu o njegovim dimenzijama (1 duljine i 1 širine). Stavimo bijeli štapić u gornji desni kvadratić i recimo djeci da je to $1 \cdot 1 = 1$, jer je štapić popunio jedan kvadratić. Slično, demonstrirajući $2 \cdot 1 = 2$, a zatim $1 \cdot 2 = 2$, uzmimo crveni štapić, naglasimo dimenzije i stavimo ga u odgovarajući dio tablice, pokazujući kako je štapić popunio dva kvadratića. Učinimo to s tablicama 1, 10, 5 i 2 okomito i vodoravno (točno u tom redoslijedu).



Slika 3.13: Tablica množenja

Sada pokažimo djeci kvadratić $6 \cdot 7$. Pomoću Cuisenaire štapića demonstrirajmo da $6 \cdot 7$ znači 6 crnih štapića. Zatim pokažite u tablici $7 \cdot 6$ i objasnimo da to možemo prikazati pomoću 7 tamnozelenih štapića.

Obratite djeci pozornost na to da se tamnozeleni i crni štapići preklapaju, a to znači da je $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$. S tim smo pokazali da je množenje komutativno. Djeca neka otkriju koji kvadratići u tablici imaju jednaku vrijednost. Oni će to otkriti iskustveno. Treba naglasiti da ukoliko znamo koliko je $6 \cdot 7$ znamo i koliko je $7 \cdot 6$.

Pružajući djeci ovaj model stvaranja tablice množenja, trebamo nastojati izbjegavati primjenu procesa brojanja skupina (npr. 6 skupina po 7), jer to ne razvija ništa osim vještine brojanja. Umjesto toga trebamo se usmjeriti na razvijanje vještine procjenjivanja i uočavanja odnosa među brojevima. To možemo napraviti na sljedeći način: ponovno uzmimo 6 crnih štapića i sastavimo ih u "vlakić" (u jednu liniju). Tražimo od djece da procjene koliko je narančastih štapića potrebno da se napravi jednako dugačak red. Nakon diskusije, sastavimo 4 narančasta štapića odmah ispod 6 crnih. Djeca će moći vidjeti da je 4 narančasta premalo, ali da bi 5 štapića bilo previše. Verbalizirajmo da to znači da je $6 \cdot 7$ više od 40, a manje od 50. Ako uz red narančastih dodamo jedan crveni (2), otkrit ćemo da je 6 crnih štapića jednako 4 narančasta plus 1 crveni tj. $6 \cdot 7 = 40 + 2 = 42$. Neka djeca upišu taj rezultat u tablicu.

Aktivnost: Množenje brojem 9 pomoću množenja brojem 10

Djeca koja pate od diskalkulije i specifičnih teškoća u učenju vjerojatno nikad neće moći zapamtiti tablicu množenja, bez obzira na to koliko je mnogo vježbaju. Zato je cilj da zapamte nekoliko ključnih činjenica i sve ostalo računaju na temelju logičkih zaključaka. Jedna od takvih aktivnosti je i ova. Djeca koja se dobro snalaze s Cuisenaire štapićima lako nauče tablicu množenja brojem 9. Naprimjer, za $3 \cdot 9$ napravimo pravokutnik $3 \cdot 10$ i pokažimo kako zamišljena pila može odsjeći jednu jedinicu s kraja svakog štapića koji vrijedi 10. Jasno se vidi da je $30 - 3$ rješenje zadatka $3 \cdot 9$.

Slika 3.14: Množenje brojem 9 pomoću množenja brojem 10

Aktivnost: Dijeljenje s ostatkom

Koncept dijeljenja s ostatkom može biti zbunjujuć za većinu djece, posebno kad na red dođu veći brojevi. Na početku aktivnosti podsjetimo dijete na dijeljenje bez ostatka te mu zadajmo zadatak kao što je $24 : 6$. Nakon toga mu zadajmo da 24 podijeli s 5. Dijete će odmah uočiti da to ne može napraviti te će uočiti da postoji ostatak. Na kraju ove aktivnosti preostaje još samo verbalizirati da je $24 : 5 = 4$ i ostatak je 4 (*Slika 3.15*). Kod ovih aktivnosti obratimo djetetu pozornost na odnos između ostatka i djelitelja. Djeca bi nakon aktivnosti trebala shvaćati zašto ostatak mora biti manji od djelitelja.

Slika 3.15: Dijeljenje s ostatkom

Drugi pristup dijeljenju s ostatkom je prikazan na *Slici 3.16*. Npr. kod zadatka $18 : 5$ možemo tražiti od djeteta da napravi pravokutnik od štapića koji vrijede 5, ali tako da ne prijeđe 18. Na kraju neka doda još štapić koji nedostaje do broja 18.

Ovaj koncept će biti posebno koristan kod pretvaranja razlomka u mješovite razlomke jer će dijete stavljajući štapiće jedan ispod drugih moći zapisati broj u obliku razlomka. Naprimjer: $\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

Slika 3.16: Dijeljenje s ostatkom

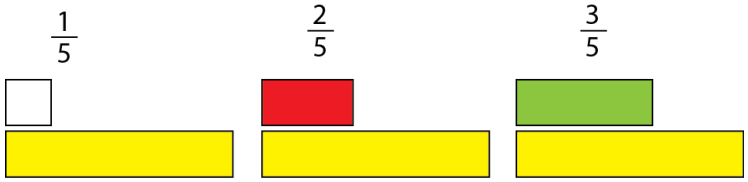
5. Razlomci

Za djecu sa specifičnim teškoćama u učenju razlomci su pogotovo složen koncept. Jedna od velikih konceptualnih teškoća je nesposobnost shvaćanja razlomka kao čistoga broja, odnosno prijelaz s konkretnog predmeta na apstraktno. Sva djeca prvo shvaćaju razlomak kao dio konkretnog predmeta, ali s vremenom djeca počinju vidjeti razlomke

kao apstraktne brojeve. Dijete s teškoćama u učenju vrlo dugo ne može ostvariti taj prijelaz.

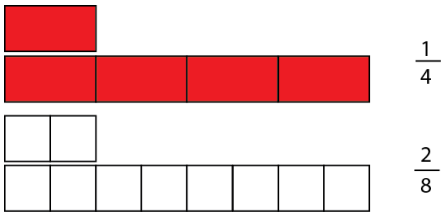
Dobro razumijevanje koncepta razlomka ovisi o tome je li dijete sposobno ostvariti prijelaz od konkretnog razumijevanja razlomka kao dijelova od cijelih predmeta do apstraktnog razumijevanja razlomka kao brojeva. Istraživanja su pokazala da osmogodišnja djeca prepoznaju razlomke kao dijelove predmeta i mogu ih uspoređivati no jednostavno prepoznavanje je daleko od sposobnosti operiranja apstraktnim simbolima.

Razlomke pomoću Cuisenaire štapića modeliramo tako da jedan štapić stavimo iznad drugog i uspoređujemo njihovu veličinu. Jedan štapić se uzima kao jedinica (odnosno jednak je 1). Naprimjer za jedinicu možemo uzeti žuti štapić, dug 5 cm. Tada je bijeli štapić njegova petina, crveni štapić $\frac{2}{5}$ itd.



Slika 3.17: Modeliranje razlomaka pomoću Cuisenaire štapića

Dijete treba poticati da od različitih štapića konstruira jednake razlomke. Pomoću Cuisenaire štapića možemo vizualno i konkretno prikazati nekoliko skupina jednakih razlomaka. Ako je smeđi štapić, dug 8 cm, cijeli broj, odnosno 1, njegova polovina je ljubičasti štapić, četvrtina crveni štapić, a osmina je bijeli. U donjem redu, po broju upotrebljenih štapića vidimo na koliko smo dijelova podijelili jedinicu, a u gornjem redu broj štapića pokazuje koliko dijelova smo uzeli. Jednakost je očigledna (*Slika 3.18*).



Slika 3.18: Razlomci

Kada dijete usvoji koncept proširivanja i skraćivanja razlomaka, bit će u stanju modelirati bilo koji razlomak sa zadanim štapićem kao nazivnikom. Naprimjer: "Modeliraj razlomke $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$ tako da ti tamnozeleni štapić posluži kao nazivnik."

Potičimo dijete da pomoću Cuisenaire štapića odgovara na pitanja kao što su: "Koji štapić iznosi $\frac{1}{2}$ narančastog? Kako znaš? Ako je svijetlozeleni štapić $\frac{1}{3}$, koji štapić je

jedno cijelo? Ako je tamnozeleni štapić $\frac{3}{4}$ koji štapić je jedno cijelo? Što je veće: $\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{3}$?"

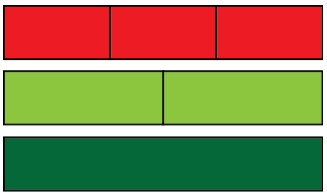
Aktivnost: Nalaženje najmanjeg zajedničkog nazivnika

Primjer: Nađi najmanji zajednički nazivnik razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$.

1. Odaberimo štapiće koji reprezentiraju nazivnike. U ovom primjeru uzimamo crveni štapić (2) i svijetlozeleni štapić (3).

2. Napravimo "vlakić" od crvenih i "vlakić" od svijetlozelenih štapića dok ne postanu iste duljine. "Vlakić" nastaje kada krajeve štapića prislonimo jedan na drugi.

3. Izbrojimo ukupan broj štapića koji smo koristili za svaki od vlakića. U ovom primjeru smo koristili 3 crvena štapića koji vrijede 2 jedinice tj. $3 \cdot 2 = 6$ odnosno 2 svijetlozelena štapića duljine 3 tj. $2 \cdot 3 = 6$. Zato je najmanji zajednički nazivnik 6.



Slika 3.19: Najmanji zajednički nazivnik razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$

Aktivnost: Zbrajanje razlomaka

Nakon što je dijete usvojilo koncepte proširivanja razlomaka i traženja najmanjeg zajedničkog nazivnika spremno je za usvajanje koncepta zbrajanja razlomaka. Djeca kod zbrajanja razlomaka često čine greške kao što su:

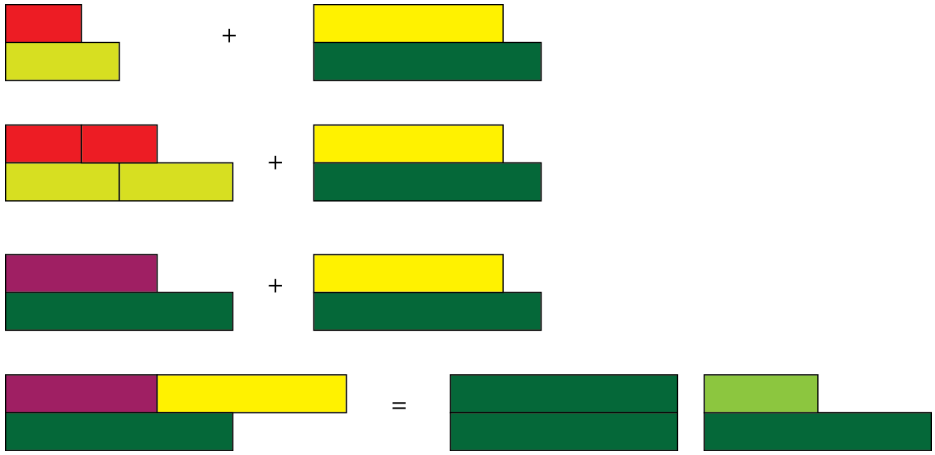
1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 7$

Sva tri primjera pokazuju da dijete ne razumije koncept razlomaka te nužnost pokazivanja koncepta zbrajanja razlomka na odgovarajućim modelima.

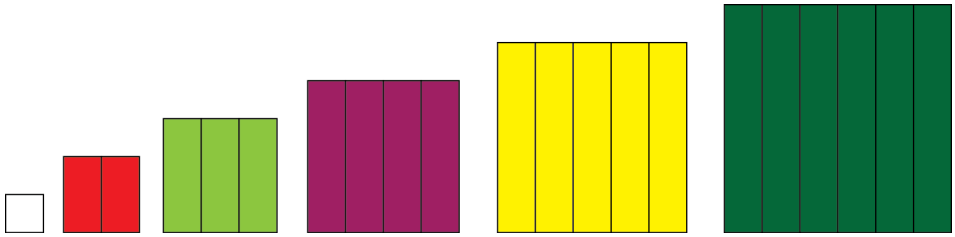
Primjer: Izračunaj $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$.



Slika 3.20: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

Slika 3.20 prikazuje postupak zbrajanja razlomaka koji treba proći s djetetom. Nastavnik treba voditi aktivnost i poticati dijete na što više zaključivanja i samostalnog rada.

6. Kvadrati prirodnih brojeva



Slika 3.21: Kvadrati brojeva prikazani pomoću Cuisenaire štapića

Pomoću Cuisenaire štapića s učenicima možemo proći i kvadrate prirodnih brojeva. Tražimo od djeteta da npr. samo pomoću žutih štapića napravi kvadrat. Prije toga dijete treba podsjetiti što je to kvadrat te ga podsjetiti na koncept množenja. Dijete bi nakon toga trebalo moći izračunati $5 \cdot 5 = 25$. Možemo napraviti kvadrate svih

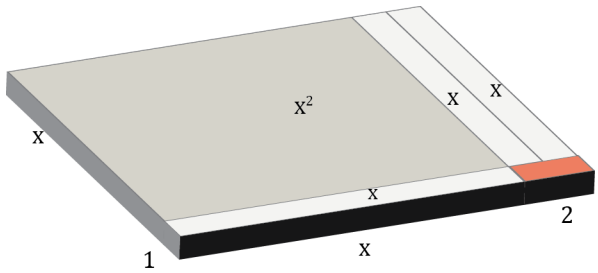
brojeva, zapisivati ispod svakog kvadrata jednakost kao što je ova: $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ te verbalizirati tako zapisan zadatak.

7. Polinomi

Operacije s polinomima mogu se lagano prikazati pomoću manipulativnih materijala. Možemo koristiti Cuisenaire štapiće, no upotreba blokova s bazom deset ili pločica za algebru u kombinaciji s Cuisenaire štapićima olakšava demonstraciju. Ukoliko koristimo samo Cuisenaire štapiće možemo narančasti štapić obložiti papirom ili nekom tkaninom kako bi se razlikovao od broja 10 te nam on može reprezentarati nepoznanicu x. Dijete bi prije računanja s polinomima trebalo biti upoznato s kvadratima brojeva pa bi tako kvadrat od narančastih štapića (10) reprezentirao x^2 (taj kvadrat možemo uzeti iz didaktičkog seta baze 10 ili sami povezati štapiće kako bi olakšali korištenje). Pomoću štapića možemo zbrajati, oduzimati, množiti pa čak i dijeliti polinome.

Aktivnost: Faktorizacija polinoma

Prije izvođenja ove aktivnosti dijete bi trebalo podsjetiti kako bi pomnožilo npr. $5 \cdot 4$ pomoću Cuisenaire štapića. Ukoliko želimo faktorizirati x^2+3x+2 od djeteta zatražimo da stvori pravokutnik pomoću pločice x^2, pomoću 3 štapića koji prezentiraju x i štapića koji vrijedi 2. Navedimo dijete da to poveže s pravokutnikom $5 \cdot 4$ i dođe do zaključka da su strane pravokutnika zapravo faktori. Tada dijete može zapisati kako je $x^2+3x+2 = (x+2) \cdot (x+1)$. Upoznajmo dijete s zapisom: $(x+2) \cdot (x+1) = (x+2)(x+1)$.



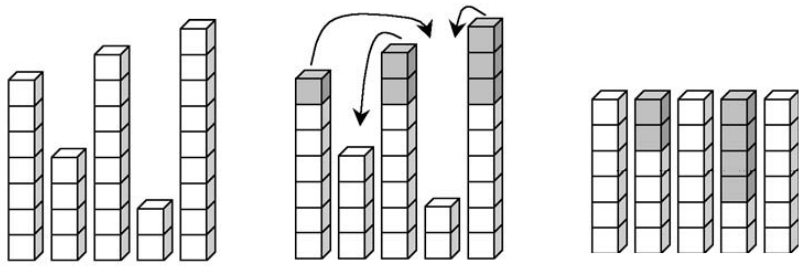
Slika 3.22: $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

8. Aritmetička sredina i medijan

U sedmom razredu osnovne škole, učenici se susreću s pojmovima kao što su aritmetička sredina i medijan (centralna vrijednost). Često su ovi pojmovi uvedeni pomoću simbola ili izraženi pomoću formule bez odgovarajućih popratnih slika i modela. Zbog toga, kao i u mnogim područjima matematike, postoji opasnost da se ta pravila i pojmovi usvoje bez razumijevanja i ubrzo zaborave.

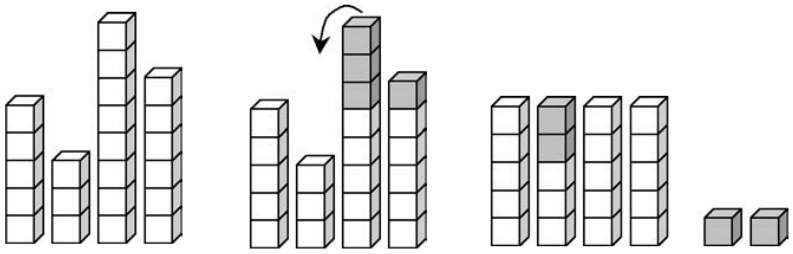
Aktivnost: Određivanje aritmetičke sredine

Aritmetička sredina skupa brojeva može se, kao što ćemo u nastavku vidjeti, vrlo jednostavno demonstrirati korištenjem unifiks kocaka. Naprimjer ukoliko tražimo aritmetičku sredinu brojeva 7, 4, 8, 2 i 9, brojeve možemo reprezentirati pomoću stupića. Zatim možemo preslagivati kocke sve do trenutka kad svaki od stupića ne bude jednako visok. U našem slučaju tada će se svaki stupić sastojati od 6 kockica što znači da je aritmetička sredina brojeva upravo šest.



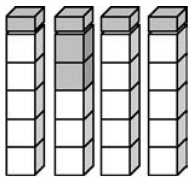
Slika 3.23: Određivanje aritmetičke sredine brojeva 7, 4, 8, 2 i 9

U prethodnom primjeru aritmetička sredina je cijeli broj, ali općenito to naravno ne mora biti. Naprimjer, nađimo aritmetičku sredinu brojeva 5, 3, 8 i 6. Većina kockica će se moći podjednako podijeliti te ćemo dobiti 4 štapića po 5 kockica, no dvije će kockice ostati nepodijeljene.



Slika 3.24:

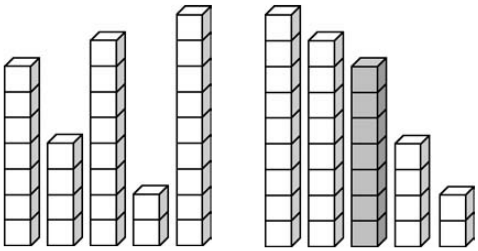
Te dvije kockice također moramo podijeliti te će to značiti da 2 kockice dijelimo na 4 štapića tj. na svaki štapić ćemo morati dodati još pola kockice što znači da je aritmetička sredina ovih brojeva $5\frac{1}{2}$.



Slika 3.25:

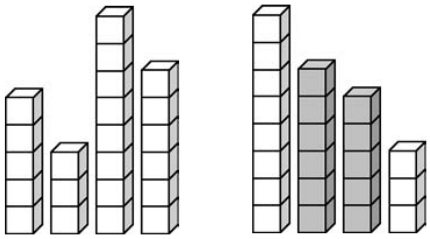
Aktivnost: Određivanje medijana

Premještanje kockica tako da dobijemo štapiće poredane po veličini pomoći će učenicima da si vizualiziraju medijan kao srednju vrijednost. Kada bismo štapiće presložili po veličini, štapić u sredini bio bi s vrijednošću sedam i to znači da je srednja vrijednost upravo sedam.



Slika 3.26: Određivanje medijana brojeva 7, 4, 8, 2, 9

Ukoliko imamo paran broj štapića ne možemo pronaći štapić u sredini pa je medijan broj između dva štapića koja su u sredini. U primjeru sa *Slike 3.27* vidimo da su štapići u sredini visine 5 i 6, pa je medijan ova 4 broja $5\frac{1}{2}$.



Slika 3.27:

Literatura

[1] R. Bird, *Diskalkulija : praktični priručnik*, Ostvarenje, Buševec, 2009.

[2] S. Chinn, *The Trouble with Maths. A practical guide to helping learners with numeracy difficulties*, Routledge, Abingdon, England, 2012.

[3] S. Chinn, R. Ashcroft, *Mathematics for Dyslexic: including dyscalculia*, John Wiley and Sons Ltd, West Sussex, England, 2007.

[4] T. Clausen-May, *Teaching maths to pupils with different learning styles*, Paul Chapman Publishing, London, 2005.

[5] A. Čižmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*

[6] J. Emerson, P. Babtie, *The Dyscalculia Assessment*, Continuum, New York, 2010.

[7] A. W. Hunt, K. L. Nipper, L. E. Nash, *Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective Than the Other?*, Current Issues in Middle Level Education **16**(2011), 1–6.

[8] *Guidance to support pupils with dyslexia and dyscalculia*, Department for Education and Skills, London, 2001.
URL: `http://www.secondarymathsite.co.uk/Inclusion/SEN/nns_dyslexia051201.pdf`

[9] M. C. Sharma, *Place value concept: How children learn it and how to teach it*, Math Notebook **10**(1993).

[10] M. C. Sharma, *Cuisenaire rods and mathematics teaching*, Math Notebook **10**(1993).

[11] M. C. Sharma, *Matematika bez suza*, Ostvarenje, Buševec, 2001.

[12] D. Yeo, *Dyslexia, dyspraxia and mathematics*, Whurr Publishers Ltd, London, 2003.

Sažetak

Pomoću manipulativnih materijala matematiku možemo učiniti vidljivom svim učenicima te stvarati čvrste kognitivne veze koje omogućuju trajnost znanja kod učenika. U ovom radu opisani su najčešće korišteni manipulativni materijali i dan je pregled aktivnosti koje se mogu izvoditi pomoću jednog od njih - Cuisenaire štapića. Aktivnosti su podijeljene po temama tj. konceptima koje učenici trebaju usvojiti: zbrajanje i oduzimanje, množenje i dijeljenje, razlomci, kvadrati prirodnih brojeva, polinomi te aritmetička sredina i medijan. U radu je opisana i jedna od specifičnih teškoća u učenju - diskalkulija jer upravo su djeca s teškoćama u učenju ona kod kojih se nužnim pokazuje korištenje manipulativnih materijala i podučavanje raznih strategija.

Summary

By using manipulative materials, mathematics can be made visible to all students and cognitive connections which provide a permanence of knowledge of students can be created. This paper describes the most commonly used manipulative materials and an overview of activities that can be performed with one of them - the Cuisenaire rods - is presented. The activities are divided by the topics, ie. by the concepts which students should acquire: addition and subtraction, multiplication and division, fractions, squares of natural numbers, polynomials and arithmetic mean and median. The paper also describes one of the specific learning difficulties - dyscalculia, because it is those children with learning difficulties who are in necessity of using manipulative materials and learning different strategies.

Životopis

Petra Corn rođena je 17. svibnja 1991. godine u Osijeku. Osnovnu školu Dobriše Cesarića završila je 2006. godine u Osijeku. Iste godine je upisala III. gimnaziju u Osijeku, a 2010. upisuje Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Odlukom Senata Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u akademskoj 2011./12. primila je Rektorovu nagradu za seminarski rad pod nazivom *Razni načini zadavanja ravnine u prostoru*. U Osječkom matematičkom listu (Vol.12 No.1 i Vol.14 No.2) ima objavljena dva stručna članka.