

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Kristina Cvetković

POMICANJE MERKUROVA PERIHELIA (PERIASTRONA) U  
EINSTEINOVOJ TEORIJI GRAVITACIJE

Diplomski rad

2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Kristina Cvetković

POMICANJE MERKUROVA PERIHELIA (PERIASTRONA) U  
EINSTEINOVJOJ TEORIJI GRAVITACIJE

Diplomski rad

**Voditelj:** doc. dr. sc. Igor Lukačević

Osijek, 2015.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Planet Merkur</b>	<b>2</b>
1.1 Povijest planeta Merkura . . . . .	2
1.2 Karakteristike planeta . . . . .	4
1.3 Promatranje . . . . .	5
1.4 Gledanje golim okom . . . . .	8
<b>2 Jednadžbe gravitacijskog polja u Einsteinovoj teoriji - Schwarzschildovo rješenje</b>	<b>10</b>
2.1 OTR - Opća teorija relativnosti . . . . .	10
2.2 Schwarzschildovo rješenje Einsteinovih jednadžbi . . . . .	12
2.3 Geodetske krivulje . . . . .	13
2.4 Staze masivnih čestica u Schwarzschildovoj metrici . . . . .	15
2.5 Kepplerova zadaća . . . . .	15
2.6 Rješavanje jednadžbe računom smetnje . . . . .	16
<b>3 Pomicanja Merkurova perihela</b>	<b>19</b>
3.1 Merkurov perihel . . . . .	19
3.2 Svemirske letjelice . . . . .	21
3.2.1 MARINER 10 . . . . .	21
3.2.2 MESSENGER . . . . .	22
3.2.3 BepiColombo . . . . .	23
<b>4 Hulse i Taylorov pokus</b>	<b>25</b>
4.1 Istraživačka tehnologija . . . . .	27
<b>Zaključak</b>	<b>29</b>
<b>Literatura</b>	<b>30</b>
<b>Sažetak</b>	<b>31</b>
<b>Summary</b>	<b>32</b>
<b>Životopis</b>	<b>33</b>
<b>Zahvala</b>	<b>34</b>

# Uvod

Od svih planeta, Merkur ima najizraženiju eliptičnost orbite, kao i njen nagib u odnosu na ekliptiku (ravninu po kojoj Zemlja kruži oko Sunca). U 19. stoljeću znanstvenici su primijetili još nešto zanimljivo. Položaj kada se Merkur nalazi najbliže Suncu (perihel), svakim prolaskom orbite se pomalo pomicao, i time je zakretao cijelu orbitu planeta. Iako se znalo da na Merkur, osim Sunca, svojom gravitacijom utječu i planeti, njihov utjecaj i dalje nije bio dovoljan da objasni tu zagonetku zakretanja orbite. Jedno od predloženih rješenja bio je izmišljeni planet Vulkan, koji bi se nalazio unutar orbite Merkura te svojom gravitacijom riješio zagonetku. Međutim, planet Vulkan nikada nije pronađen.

Merkurov zakret perihela je prvi zabilježio Urbain Le Verrier sredinom 19. stoljeća, a prvi ju je matematički izrazio Albert Einstein <sup>1</sup> u Općoj teoriji relativnosti 1916. godine. Einstein je pokazao da je za planet, kojemu je velika poluos elipse  $\alpha$  (planetarna putanja), i ekscentricitet putanje  $e$ , a ophodno vrijeme  $T$ , onda je zakret perihela zbog tog relativističkog učinka  $\varepsilon$ , za vrijeme jednog ophoda oko Sunca; u radijanima

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{\alpha^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$$

gdje je  $c$  brzina svjetlosti. Razvitak fizike u drugoj polovini dvadesetog stoljeća omogućio je mnoštvo pokusa kojima je opća teorija relativnosti stalno potvrđivana.

Sukladnost eksperimenata kao što su Hulse i Taylorov pokus i Einsteinove teorije usporediva je s najtočnijim mjerenjima u fizici.

---

<sup>1</sup>(1879.-1955.)njemački fizičar, u Berlinu radi na svojoj teoriji gravitacije koja je sadržana u Općoj teoriji relativnosti objavljenjoj u dopunjenom obliku 1916. godine.

# 1 Planet Merkur

## 1.1 Povijest planeta Merkura

Najranija poznata istraživanja Merkura nalaze se u zbirci Babilonskih zapažanja planeta. Ta promatranja su najvjerojatnije nastala u 14. stoljeću prije Krista od strane Asiraca. Babilonci su Merkur prozvali Nabu po božjem glasniku iz njihove mitologije. Drevni Grci u Heziodovo vrijeme poznavali su planet kao kao  $\Sigma\tau\acute{\iota}\lambda\beta\omega\nu$  (Stilbon), što znači "svijetleći" i  $E\rho\mu\acute{\alpha}\omega\nu$  (Hermaon). Kasnije su Grci nazivali planet Apollo kad je bio vidljiv ujutro, i Hermes kad je bio vidljiv uvečer. Oko 4. stoljeća prije Krista grčki astronomi zaključili su da imaju dva naziva za isti objekt, Hermes ( $E\rho\mu\acute{\eta}\varsigma$ : Hermēs). Romani su mu dali ime po brzonogom romanskom božjem glasniku (Latin Mercurius), kojeg su izjednačili sa grčkim Hermesom, jer se kretao nebom brže od bilo kojeg drugog planeta. Astronomski simbol za Merkur je stilizirana verzija Hermesova štapa oko kojeg su namotane dvije zmijske glave i ima krila na sebi. Romansko-egipatski astronom Ptolomej pisao je o mogućnosti o planetarnim tranzicijama preko lica Sunca u svom radu "Planetary Hypotheses". On je sugerirao da se nisu mogli promatrati prijelazi zbog toga što su planeti poput Merkura bili premali ili su se kretali sporo. U drevnoj Kini, Merkur je bio poznat kao Chen Xing, zvijezda sat. U modernoj Kineskoj, Vijetnamskoj, Korejskoj i Japanskoj kulturi zvali su planet "vodena zvijezda". Hinduistička mitologija koristila je ime Budha za Merkur. Odin (ili Woden) bog germanskih pogana poznat iz razdoblja željeznog doba bio je povezivan s planetom Merkurom i srijedom. Maje su Merkur prikazivale znakom sove (ili četiri sove, dvije za jutro a dvije za večer) koje su služile kao glasnici podzemlja. Drevna poveznica Merkura sa srijedom je još uvijek vidljiva u raznim modernim jezicima latinskog dijalekta. Imena dana u tjednu u kasnije vrijeme su bila sva povezana sa sedam poznatih planeta. U indijskoj astronomiji Surya Siddhanta, indijski astronomski tekst iz 5. stoljeća procjenjuje promjer Merkura na 4,841 km, s greškom manjom od 1% prihvaćenog promjera od 4,880 km. Ta procjena je bazirana na netočnom nagađanju kutnog promjera planeta od 3.0 minuta luka (50 mili stupnjeva). U srednjovjekovnoj islamskoj astronomiji, Andaluzanin Abú Isháq Ibráhím al-Zarqálí u 11. stoljeću opisuje razlike geocentrične orbite Merkura kao ovalnu orbitu nalik jajetu. Iako to nije utjecalo na njegovu teoriju ili njegove astronomske izračune. U 12. stoljeću, Ibn Bajjah primjetio je dva planeta kao crne točke tj. Sunčeve pjege, koje je kasnije tumačio astronom Qotb al-Din Shirazi u 13. stoljeću kao prijelazi Merkura i Venere. U Indiji, astronom škole Kerala Nilakantha Somayaji u 15. stoljeću razvio je djelomični heliocentrični planetarni model u kojem Merkur

kruži oko Sunca koji se izmjenjuje sa orbitom Zemlje, slično kao u Tychovom sustavu koji je predložio Tycho Brahe u kasnom 16. stoljeću (slika 1.).



Slika 1. Tychov heliocentrični model, 1708 g. [11].

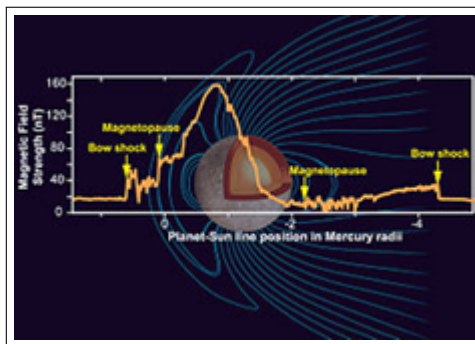
Prva teleskopska promatranja Merkura u ranom 17. stoljeću izveo je Galileo. Iako je promatrao faze Venere njegov teleskop nije bio dovoljno jak da prati faze Merkura. 1631. godine Pierre Gassendi napravio je prva teleskopska promatranja prijelaza planeta preko Sunca kada je vidio prijelaz Merkura kako je predvidio Johannes Keppler. Godine 1639. Giovanni Zupi koristio je teleskop da bi otkrio da planet ima orbitalne faze slične Veneri i Mjesecu. Promatranja su dokazala da je Merkur u Sunčevoj orbiti. Rijedak događaj u astronomiji je kad se putanje preklope. Gledano sa Zemlje Merkur i Venera se preklapaju svakih nekoliko stoljeća, a takav događaj se promatrao samo jednom u povijesti: 28. svibnja 1737. godine Johna Brevisa iz Royal Greenwich zvjezdarnice. Slijedeće preklapanje ta dva planeta će se dogoditi 3. prosinca 2133. godine. 1800. godine, Giovanni Schiaparelli mapirao je planet još točnije, i predložio da je Merkurov rotacijski period 88 dana. Ovaj fenomen je poznat kao sinkrona rotacija. Sinkrona rotacija predstavlja pojavu kada period ophoda planeta oko matične zvijezde ili satelita oko matičnog planeta traje jednako kao i period rotacije tog planeta ili satelita. U tom je slučaju uvijek ista strana planeta tj. satelita okrenuta matičnoj zvijezdi tj. planetu. Napore u mapiranju Merkurove površine nastavio je Eugenios Antoniadi, koji je objavio knjigu 1934. godine mapiranja Merkura i njegova vlastita promatranja. U lipnju 1962. godine sovjetski znanstvenici Instituta Radio-inžinjerinaga i Elektronike USSR-ove Akademije Znanosti predvođeni Vladimirom Kotelnikovim postali su prvi koji su poslali radio signal na Merkur i koji se odbio nazad, i tako započeli eru radio istraživanja planeta. Tri godine kasnije radarska opažanja amerikanaca Gordona Pettengilla i R. Dyce koristeći 300-metarski radio teleskop Arebico zvjezdarnice u Puerto Ricu pokazala su nepobitno da je rotacijski period planeta 59 dana. Teorija da je Merkurova rotacija sinkronična bila je

naširoko prihvaćena, i bilo je iznenađenje za astronome kad su ta istraživanja bila objavljena. Ako bi Merkur bio čvrsto vezan njegova tamna polutka bila bi ekstremno hladna, ali mjerenja putem radio emisija su otkrila da je temperatura bila puno veća nego što su očekivali. Astronomi su bili odlučni da napuste ovu teoriju i predložili su alternativne mehanizme kao što su snažni toplinski vjetrovi da bi objasnili promatranja. Talijanski astronom Giuseppe Colombo primijetio je vrijednost rotacije od tri polovine Merkurova orbitalnog perioda, i predložio je da orbitalni i rotacijski periodi planeta budu u omjeru 3 : 2 nego kako je do tada bilo omjer rezonancije 1 : 1. Podaci Mariner 10 su potvrdili takve pretpostavke. To je značilo da su karte Giovannia Schiaparella i Antoniadia bile točne.

## 1.2 Karakteristike planeta

Kod Merkura, velika poluos elipse je oko 57.9 milijuna kilometara ili  $57,9 \cdot 10^9$  m, ekscentricitet putanje (odstupanje nekog tijela koje kruži po svojoj putanji od središta) je 0.206 i ophodno vrijeme je 87.97 dana. Merkurov zakret perihela za vrijeme jednog ophoda oko Sunca je  $5.028 \cdot 10^{-7}$  radijana, ili 0.104". U 100 godina, Merkur napravi oko 415 ophoda ili obilazaka oko Sunca, pa Merkurov zakret perihela u 100 godina iznosi oko 43" lučnih sekundi, što je gotovo točno izmjerenim podacima kod mjerenja. Maksimalna kutna udaljenost od Sunca iznosi 28° i Merkur nema pratioca. Kutna udaljenost je udaljenost između nebeskih objekata je duljina luka velike kružnice nebeske sfere koji povezuje promatrane objekte. U prosjeku je od Sunca udaljen 0.387 astronomskih jedinica ili 57.91 milijuna km, a približava se na 0.31 AJ (46 001 200 km) ili udaljuje na 0.47 AJ (69 816 900 km). Astronomska jedinica je jedinica za duljinu, jednaka prosječnoj udaljenosti Zemlje od Sunca. Merkur se oko Sunca okrene za jednu zvjezdanu godinu (sideričku godinu) koja traje 88 dana. Njegov promjer je 4879.4 km, masa 0.055 Zemljine mase, a srednja gustoća  $5.43 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Os vrtnje je okomita na stazu. Okreće se vrlo sporo i njegov siderički dan traje 58.65 dana, što iznosi  $\frac{2}{3}$  sideričke godine, dok mu sinodički (Sunčev) dan traje 176 dana. Siderički dan ili zvjezdani dan je period rotacije planeta u odnosu na udaljene zvijezde, a Sunčev dan (sinodički dan) je vrijeme koje proteče između Sunčeve dvije uzastopne istovjetne kulminacije (gornje u podne ili donje u ponoć). Zbog njegova svojstvena gibanja promatrač bi na Merкуру doživio dvostruk izlazak Sunca ili dvostruko podne. Merkur je gotovo tri puta manji od Zemlje, s gravitacijom od 0.38 Zemljine gravitacije. Nema atmosferu u uobičajenom smislu, a zapaženi su plinovi kisik, vodik, helij i argon. Temperatura površine mijenja se od 100 K (-173 °C) do 700 K (+427 °C). Dio Merkurove površine snimila je svemirska letjelica Mariner 10 1974. i 1975., a od 2008. oko Merkura obilazi letjelica Messenger. Površina mu je prekrivena kraterima i malim morima", te jako nalikuje Mjesečevoj površini: zbog jače privlačne sile, krateri su mu zbijeniji. Najveća je zaravan Ravnica vrućine (lat. *Caloris Planitia*). Na kori se vide

ostatci velikih pomaka i stezanja planetnoga tijela uzrokovanoga hlađenjem. Središte mu se sastoji pretežno od metala (omjer željeza i stijena 70 : 30). U naizmjeničnim vremenskim razmacima od 7 i 13 godina, vidljivo je kako prividno prelazi preko Sunčeva kruga. Merkur u projekciji prelazi preko Sunčeva kruga češće nego Venera. Zadnja tri prijelaza su se dogodila 1999., 2003. i 2006.; a slijedeći se predviđa da će se pojaviti 2016. Na disku Sunca planet se zapaža kao tamna pokretna točka. Prijelazi se prate s najvećom pažnjom jer pomažu da se točnije odrede staze planeta. Trenuci u kojima planet redom dira rub Sunca s vanjske strane, s unutrašnje strane, opet s unutrašnje strane, pa s vanjske strane, zovu se dodirima ili kontaktima: prvi, drugi, treći i četvrti dodir ili kontakt. Magnetsko polje Merkura je slabo, jačine je 0.7% Zemljinog, što je relativno jaka magnetosfera s obzirom na brzinu rotacije planeta te sastav jezgre i plašta. Ono je dio prostora u kojem se zapaža interakcija i izmjena energije s električnim nabojem koji se u tom prostoru kreće.



Slika 2. Relativna snaga Merkurvog magnetskog polja [11].

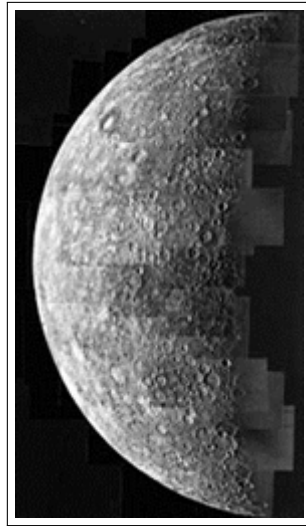
Izvor ovako jakog magnetskog polja mogla bi biti cirkulacija tekućih rastaljenih tvari oko jezgre planeta, no kako Merkur nije toliko vruć u unutrašnjosti da bi se otopili cink ili željezo, moguće je da oko jezgre struje tvari koji imaju nižu temperaturu taljena kao što je sumpor. Os magnetskog polja nagnuta je  $12^\circ$  prema osi vrtnje. U središtu Merkur mora imati mnogo teških elemenata, kao što je željezo, zbog velike prosječne gustoće (5.4 puta veće od gustoće vode), metalna jezgra zauzima tri četvrtine dubine. Jakost nađenog magnetskog polja teško je opravdati, jer se planet sporo okreće, a brza vrtnja, električki vodljiva unutrašnjost, smatraju se nužnim preduvjetima za pojavu planetaskog magnetskog polja (slika 2.).

### 1.3 Promatranje

Merkurova prividna magnituda varira između -2.6 (sjajnije od najsjajnije zvijezde Siriusa) i oko +5,7 (teoretska granica vidljivosti golim okom). Krajnosti se javljaju kada je Merkur u blizini Sunca na nebu. Promatranje Merkura komplicira blizina Suncu, jer je većinu vremena

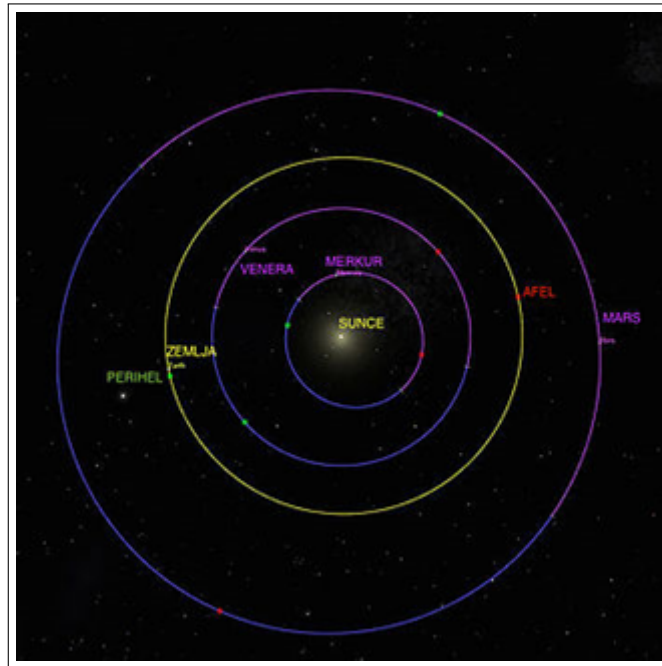


zaklonjen Sunčevim odrazom. Promatranje Merkura moguće je samo u kratkom razdoblju za vrijeme jutarnjeg ili večernjeg sumraka. Merkur se, kao i nekoliko drugih planeta i najsjajnijih zvijezda, može vidjeti tijekom ukupne pomrčine Sunca (slika 3.).



Slika 3. Mozaik slike po Marineru, 1974. [7].

Gledano sa Zemlje, poput Mjeseca i Venere, Merkur pokazuje faze. U jednoj fazi Merkur je inferioran (nalazi se između Zemlje i Sunca), a u drugoj fazi je superioran tj. nalazi se iza Sunca. Planet je ipak nevidljiv sa Zemlje u oba navrata jer je zaklonjen Sunčevim diskom. Merkur je u biti najsjajniji planet gledano sa Zemlje kada je u svojoj punoj fazi te je također i najudaljeniji planet od Zemlje. Merkura je nemoguće promatrati za vrijeme pune faze (tada najviše sjaji), zbog ekstremne blizine Sunca. Merkur je najbolje promatrati u prvom i posljednjem dijelu faze, iako postoje dijelovi manjeg sjaja. Pri najvećem istezanju istoka i zapada (respektivno) događaju se prva i zadnja faza tromjesečja. Merkurovo odvajanje od Sunca varira između  $17,9^\circ$  na perihel i  $27,8^\circ$  na afel. Perihel je najmanja udaljenost planete od Sunca, a afel je točka u kojoj je planet na svojoj putanji najudaljeniji od Sunca (slika 4.). Pri nalaženju na krajnjoj točki na zapadu Merkur se pojavljuje prije Sunca, a na najudaljenijoj točki na istoku nakon Sunca.



Slika 4: Afel (crvena točka) i perihel (zelena točka) donjih ili unutarnjih planeta Sunčevog sustava) [11].

Merkur je lakše vidjeti u tropima i subtropima nego na višim nadmorskim visinama. U pravo doba godine i na niskim nadmorskim visinama ekliptika presijeca horizont kada je u vrlo strmom kutu. Kada je Merkur okomito iznad Sunca na nebu i na maksimalnom izduljenju od Sunca (28 stupnjeva), i kad je Sunce 18 stupnjeva ispod horizonta, pa je nebo potpuno tamno Merkur je 10 stupnjeva iznad horizonta.

To je najveći kut na kojoj se Merkur može vidjeti na potpuno tamnom nebu. Merkur je češće lakše vidljiv iz Zemljine južne hemisfere nego iz njene sjeverne, u umjerenim geografskim širinama. To se događa stoga jer se Merkur nalazi na najudaljenijoj točki zapadno od Sunca početkom jeseni na južnoj hemisferi, a tijekom kasne zime na južnoj polutci kada se nalazi u najudaljenijoj točki na istoku. U oba ova slučaja kut s kojim Merkurova ekliptika pada na Sunce je maksimalan, omogućavajući mu da se pojavi nekoliko sati prije Sunca, te nekoliko sati nakon zalaska sunca, gledano iz zemalja poput Argentine i Južne Afrike. Nad sjevernim glavnim gradovima umjerenih geografskih širina, Merkur se nikada ne može vidjeti iznad horizonta na tamnom noćnom nebu. Druga mogućnost je gledanje planeta tijekom dnevnog svjetla na lijepom plavom nebu, te kada je blizu najvećeg produljenja, planet je lako pronaći čak i s teleskopom malog otvora od 8 cm. Promatrač mora znati točne koordinate i izbjeći uperiti teleskop prema Suncu. No moderni pushto/goto teleskopi mogu olakšati njegovo promatranje. Takvi teleskopi nadilaze ograničenja sumraka kada ekliptika ima mali kut na horizont (primjerice, u jesenskim večerima).

## 1.4 Gledanje golim okom

U pravo vrijeme, te na pravim zemljopisnim širinama, Merkur je lako vidjeti, iako ga mnogi amateri promatrači traže bezuspješno. Merkur se vidi najlakše kada je blizu svojeg najvećeg istežanja (elongacije) što znači da je kutno odvajanje od Sunca najveće. Merkur može biti blizu najvećeg zapadnog istežanja, što znači da je zapadno od Sunca na nebu, tako da je vidljiv prije izlaska sunca, ili najvećeg istočnog produljenja, što znači da je vidljiv odmah nakon zalaska sunca. Međutim točni datumi najvećih istežanja nisu garancija da će se vidjeti Merkur. Faza planeta uvelike utječe na njegov prividni sjaj. Na najvećem istežanju on je otprilike na pola faze. Svjetliji je kada je grbav, mnoga hrapava (grbava) tijela reflektiraju većinu upadnog zračenja neposredno u suprotnom smjeru od upadnog zračenja, što znači da je to najbolje vrijeme da se vidi Merkur, nekoliko dana prije najveće istočne elongacije, u večernjim satima, odnosno nekoliko dana nakon što je najveća zapadna elongacija, u jutarnjim satima. Nagib ekliptike prema horizontu također je važan. Kada je nagib velik, kao što se događa kod proljetnog ekvinocija u večernjim satima, te u blizini jesenje ravnodnevne u jutarnjim satima (to vrijedi za promatrače na obje hemisfere), Merkur je višlje na nebu kad je Sunce ispod horizonta, što ga čini lakše vidljivim. Nagib ekliptike je veći za promatrače na nižim geografskim širinama nego za one na višim.

Nagib ekliptike je veći za promatrače na nižim geografskim širinama nego za one na višim. To je korisno ako je Merkur u blizini afela u vrijeme promatranja, jer ga to čini udaljenijim od Sunca nego u drugim periodima promatranja. On također čini planet slabije osvijetljen, tako da vidljivost nije velika. Merkur je prilično blizu afela kada se gleda u najvećem zapadnom produljenju u ekvinociju u ožujku, ili u najvećem istočnom produljenju u ekvinociju u rujnu (tijekom dugog vremenskog razdoblja, to se mijenja kao Merkurove orbitalne smjene). Stavljajući sve faktore zajedno, najbolje vrijeme za promatrača u južnoj hemisferi kada se vidi Merkur je u jutarnjim satima, u blizini ekvinocija ožujka, nekoliko dana nakon što je Merkur u najvećem zapadnom istežanju, ili u večernjim satima, u blizini ekvinocija u rujnu nekoliko dana prije najvećeg istočnog istežanja. Najbolje šanse za vidjeti planet su u večernjim satima, u blizini ekvinocija u ožujku, nekoliko dana prije najvećeg istočnog istežanja, ili u jutarnjim satima, u blizini ekvinocija u rujnu, nekoliko dana nakon što je najveća zapadna elongacija. Nagib ekliptike je onda velik, ali Merkur nije blizu afela. Merkurovo rotacijski period oko Sunca je 88 dana. Stoga ima oko 4,15 rotacijskih perioda oko Sunca u jednoj Zemaljskoj godini. U sljedećim godinama položaj Merkura na svojoj orbiti se mijenjao za 0,15 okretaja. Stoga, ako se najveće istočno istežanje događa u ekvinociju u ožujku neke godine, tri godine kasnije najveća zapadna elongacija će se dogoditi u blizini ekvinocija ožujka, jer se položaj Merkura na svojoj orbiti u ekvinociju promijenio za oko pola rotacijskih perioda, točnije za 0,45 rotacijskih perioda. Sedam godina čini pomak 0,15 rotacijskog perioda u godini ciklus

$(0.15 \cdot 7 \approx 1, 0)$ , u sedmoj godini Merkur će se pokazati gotovo točno (7 dana ranije) kao sedam godina ranije. Nagib ekliptike je veći za promatrače na nižim geografskim širinama nego za one na višim.

## 2 Jednadžbe gravitacijskog polja u Einsteinovoj teoriji - Schwarzschildovo rješenje

### 2.1 OTR - Opća teorija relativnosti

Opću teoriju relativnosti Einstein je objavio 1916. godine (kao seriju predavanja koja je imao na Pruskoj akademiji znanosti 25.11.1915 g.). Opća teorija relativnosti je geometrijska teorija koja postulira da prisutnost mase i energije zakrivljuje prostorvrijeme, te zakrivljenost utječe na kretanje slobodnih čestica (i općenito svjetlosti). Opća teorija relativnosti koristi se matematikom diferencijalne geometrije i tenzora da bi opisala gravitiranje bez korištenja gravitacijske sile. Ova teorija govori da svi promatrači ekvivalentni, a ne samo oni koji su jednolikom gibanju. Galileo je prvi prepoznao relativnost u mehanici, a Einstein je to proširio na sve fizikalne fenomene. To je rezultiralo da kod mjerenja ni vrijeme ni dužina nisu apsolutni, nego ovise o stanju gibanja laboratorija. Dužina u smjeru gibanja je kraća, a vrijeme sporije za promatrača u stanju mirovanja. Gibanje je relativno a ne apsolutno kao što se to do tad smatralo. Newton je vrijeme i dužinu smatrao apsolutnima, bez obzira prema sustavu tzv. etera, koji je u apsolutnom miru. Eter se tada smatralo hipotetičkom tvari koja bi trebala ispunjavati svemir i služiti kao medij prostiranja svjetlosti. Hipotetički eter Einstein je odbacio kao metafizičku, a ne fizikalnu tvorevinu. Realni svijet je četverodimenzionalan, a ne trodimenzionalan, kako to sugeriraju naša neposredna iskustva. Četvrta dimenzija, vrijeme, dolazi do izražaja samo kod brzina koje su blizu brzini svjetlosti, koja je ujedno najveća moguća brzina za prijenos signala, energije ili mase. Nama je sve to kontraintuitivno, kao što je u doba Galilea bilo gibanje zemlje. Dosad su sva predviđanja specijalne teorije relativnosti milijunima činjenica potvrđene u svakodnevnom životu. Kao primjer imamo ekvivalentnost mase i energije. Kad bi svjetlost imala beskonačnu brzinu onda bi Einsteinova teorija bila ekvivalentna Newtonovoj teoriji, ali nije tako. Mjerenja brzine svjetlosti poslije Newtona pokazala su da svjetlost ima konačnu, a ne beskonačnu brzinu. Relativnost vremena od velike je važnosti ne samo za fiziku nego i za teoriju spoznaje, jer je time srušen Kantov apriorizam o vremenu i prostoru. Ipak, u jednom aspektu STR je ograničena, jer se odnosi na objekte koji se jednoliko gibaju po pravcu bez utjecaja sila. Budući da je sila gravitacije svagdje prisutna, Einstein je STR proširio na opću teoriju relativnosti (OTR). Iz činjenice koju je već Galileo opazio u svojim legendarnim eksperimentima s kosog tornja u Pisi, da kugle od olova i drva imaju istu brzinu u padu i istodobno stižu do podnožja tornja, Einstein zaključuje da je gravitacija prividna sila, slično kao inercijalna sila. Gravitacija je rezultat zakrivljenosti četverodimenzionalnog prostora. Na dvodimenzionalnoj površini jedne kugle, bez ikakve sile, jedan objekt se nužno giba po krivulji, a ne po pravcu. Objekt mora slijediti zakrivljenost

kugle, jer je ograničen dvodimenzionalnošću. Slično se događa u četverodimenzionalnom prostoru. Mi to sebi ne možemo predočiti ali matematički je lako opisati. Einstein je jednom ustvrdio da se njegova najsretnija ideja rodila onda kad je iz patentnog ureda u kojemu je radio ugledao radnika na krovu i promislio kako radnik, kad bio pao s krova, kod padanja ne bi osjetio nikakove težine, jer bi ubrzanje nadolje kompenziralo gravitaciju. Bila je to ideja o ekvivalentnosti mehaničke i gravitacijske akceleracije. Primjer za to nalazimo u situaciji kad se spuštamo liftom, osjećamo da smo lakši, a kad se dižemo, onda smo teži. Sama ideja OTR-a nije toliko komplicirana, ali matematička realizacija ekstremno je teška. Ona je bila teška i za Einsteina. On sam je priznao da bez pomoći matematičara Marcela Grossmanna ne bi došao do opće poznatih formula. Zapravo rješenje tih formula i danas je svojevrsan problem, ali one kriju u sebi jedno bogatstvo koje ni sam Einstein nije previdio. Čitava moderna kozmologija sadržana je u tim formulama. To je po svoj prilici najoriginalnija ideja koju je jedan čovjek ikad izmislio. Danas najveći znanstvenici rade na problemima koje je Einstein započeo a nije dovršio. Nema dosad ni jednog predviđanja OTR-a koje bi bilo u sukobu s bilo kojom eksperimentalnom činjenicom. Zanimljiva je pretpostavka da vrijeme u jakom gravitacijskom polju (velikoj zakrivljenosti prostora) teče sporije negoli u slabom gravitacijskom polju. Taj efekt je trebalo uzeti u obzir pri izradi navigacijskog satelitskog sustava, jer je gravitacijsko polje kod satelita slabije nego što je na zemlji. Dosad svaki automobil ili brod je nepobitno testirao OTR. Specifična je također i pretpostavka da putanja svjetla u Sunčevoj blizini mora biti zakrivljena, budući da mora slijediti veliku prostornovremensku zakrivljenost u blizini Sunca. Kut zakrivljenosti zraka zvijezda koje pokriva Sunce u Einsteinovoj teoriji dva puta je veći negoli u Newtonovoj. Godine 1919., proveden je eksperiment gdje su dvije radne skupine otišle u Brazil i Afriku kako bi tijekom pomrčine Sunca izmjerile kut otklona. Ta vijest je u znanstvenim krugovima toliko bila važna da su ju svi svjetski mediji željno iščekivali. Prozvan je *experimentum crucis* za OTR (kritični eksperiment za OTR). Za obični, a i za profesionalni svijet eksperiment je bio neka vrsta boksačkog meča između Einsteina i Newtona. Izmjereni kut odgovarao je predviđanju OTR-a. Einstein je slavio nad Newtonom. Rezultat je donesen na naslovnoj stranici *Times of London*, u petak 7. studenog 1919 g. Revolucija u znanosti; Nova teorija svemira; Odbačena Newtonova teorija! Sve novine svijeta prenijeli su tu vijest u bombastičnom stilu te Einsteina znanstvenika pretvaraju u hollywoodsku zvijezdu. Einsteinova Opća teorija relativnosti ove godine zaokružuje svoju stogodišnjicu i za sada je najprihvatljivija teorija gravitacije i temelj je moderne fizike. Potvrđena je u mnogo pokusa kao i kod Hulse i Taylorovog pokusa. Objašnjenje zakretanja Merkurova perihela te opažanje savijanja zraka svjetlosti u blizini Sunca bili su početci potvrde te teorije.

## 2.2 Schwarzschildovo rješenje Einsteinovih jednadžbi

U ovom poglavlju razmatrat ću gibanja masa i svjetlosti u gravitacijskom polju određenom Schwarzschildovim rješenjem Einsteinovih jednadžbi. Karl Schwarzschild je već 1916.g. egzaktno riješio Einsteinove jednadžbe teorijom gravitacije zaokruženom za sfernosimetrični statički slučaj. Schwarzschildovo rješenje Einsteinovih jednadžbi:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

gdje je  $r_g$  gravitacijski polumjer:  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ . Zadržat ćemo se na slučaju gibanja nerelativističkim brzinama ( $v \ll c$ ) u slabim poljima ( $r_g \ll r$ ), tj. tipičnoj Keplerovoj zadaći o gibanju planeta u polju Sunca ( $r_g = 3$  km za Sunce).

Element luka koji odgovara ovom metričkom tenzoru je:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi). \quad (2)$$

Iz ovog rješenja se vidi da je u ovoj metrici opseg kružnice u ravnini  $\pi$  sa zadanim  $r$  jednak  $2r\pi$ , a udaljenost između dviju točaka  $r_1$  i  $r_2$  duž  $r$ :

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \geq r_2 - r_1. \quad (3)$$

Vrijeme koje protječe u nekoj prostornoj točki - vlastito vrijeme  $d\tau$  je:

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt \leq dt. \quad (4)$$

Vlastito se vrijeme usporava u blizini masa, satovi kucaju sporije nego daleko od masa. Ovi učinci, iako su u blizini zemlje mali, moraju se uzimati u obzir u GPS-u pri mjerenju udaljenosti pomoću elektromagnetskih valovi. U točki  $r = r_g$  metrički tenzor ima singularitet.

## 2.3 Geodetske krivulje

U Einsteinovu programu gibanje masa (probnih čestica) u gravitacijskom polju određeno je geodetskim krivuljama:

$$\ddot{x}^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad \text{gdje je } \dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (5)$$

Za metrički tenzor (1) Cristoffelovi simboli različiti od nula su:

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{\frac{r_g}{r^2}}{2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, \Gamma_{00}^1 = \frac{r_g}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \Gamma_{11}^1 = \frac{-\frac{r_g}{r^2}}{2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \Gamma_{33}^1 = -r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \text{ctg } \vartheta, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdje je  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  gravitacijski polumjer, a  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  su simetrični.

Jednadžbe geodetskih krivulja tada su za  $x^0 = ct$ :

$$\frac{d}{ds} \left[ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (7a)$$

Jednadžba za:  $x^1 = r$ :

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_g}{2r^2} \dot{r}^2 c^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} \frac{r_g}{2r^2} \dot{r}^2 - r(\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) = 0. \quad (7b)$$

Za:  $x^2 = \vartheta$ :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{\vartheta} \dot{r} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (7c)$$

Za:  $x^3 = \varphi$ :

$$\ddot{\varphi} + 2 \text{ctg } \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (7d)$$

Rješenje jednadžbe (7c) isto je kao u klasičnoj Kepplerovoj zadaći (tj. gibanje je u ravnini):

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad (8a)$$

Tada sam uočila da je iz jednadžbi moguće dobiti prve integrale:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t} = l = \text{const}, \quad (8b)$$



$$r^2 \dot{\vartheta} = h = \text{const.} \quad (8c)$$

A da jednačnja (7b) ima oblik:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{r_g}{2r^2} \dot{r}^2 c^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} \frac{r_g}{2r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (8b)$$

Formula  $p^\mu = mu^\mu$  u slučaju jedinične mase prelazi u  $p^\mu = \dot{x}^\mu$ , ali kako je  $p_\nu = q_{\mu\nu} p^\mu$ , dobivamo za cikličke koordinate

$$\begin{aligned} x^0 &= ct, x^3 = \varphi, \\ p_0 &= q_{00} p^0 = q_{00} \dot{x}^0 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) ct, \\ p_3 &= q_{33} p^3 = q_{33} \dot{x}^3 = -r^2 \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

No, prema (8b) i (8c) imamo:  $p_0 = ck$ ,  $p_3 = -h$ , ali prema  $p_\mu = \left(\frac{E}{c} - \vec{p}\right)$ ,  $p^\mu = \left(\frac{E}{c} \cdot \vec{p}\right)$  je  $p_0 = \frac{E}{c}$  dok je  $p_3$  negativni moment impulsa jedinične mase. Tako da je konačno  $k = \frac{E}{c^2}$  a  $h$  je  $L_z$  (moment impulsa jedinične mase duž Oz).

U slučaju bilo koje mase  $k = \frac{E}{mc^2}$ , a

$$h = \frac{L_z}{m}. \quad (9)$$

Umjesto jednačnje drugog reda (1.8d) moguće je iskoristiti prvi integral, tj. "energijsku" jednačnju  $p^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = p_\mu p^\mu$ ,  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2$ , koja je u slučaju čestice jedinične mase:

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2. \quad (9a)$$

A za nul geodetske krivulje (kada je  $m = 0$ ):

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (9b)$$

U slučaju jedinične mase deriviranje se u (8a) obavlja po vlastitom vremenu  $\tau$ , a u slučaju nul geodetskih krivulja po nekom afinom parametru duž geodetskih krivulja.

## 2.4 Staze masivnih čestica u Schwarzschildovoj metrici

Za Schwarzschildovu metriku jednađbe geodetskih krivulja (8b),(8c) i energijska jednađba (9a) su:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\dot{t} = k, \quad (10a)$$

$$c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 = c^2, \quad (10b)$$

$$r^2\dot{\varphi} = h. \quad (10c)$$

Deriviranje se obavlja po vlastitom vremenu.

Ukoliko zamjenimo (10a) i (10c) u (10b) dobivamo energijsku jednađbu u obliku:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - c^2\frac{r_g}{r} = c^2(k^2 - 1). \quad (11)$$

## 2.5 Kepplerova zadaća

Ako kao i u klasičnoj Kepplerovoj zadaći razmatramo ovisnost  $r(\varphi)$ , tada je:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}},$$

te iskoristivši (10c) dobivamo vezu između  $r'$  i  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{h}{r^2}r'.$$

Uvrštavanjem (11) dobivamo:

$$c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = c^2k^2 - \frac{h^2}{r^4}r'^2 - \frac{h^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Nakon uvođenja nove zavisne varijable  $u$ :

$$r = \frac{1}{u} \quad i \quad r' = -\frac{u'}{u^2}, \quad (12)$$

jednađba prelazi u:

$$(1 - r_g u)c^2 = c^2k^2 - h^2u'^2 - h^2u^2(1 - r_g u). \quad (13)$$

Ovo je jednađba prvog reda i postoji njeno točno rješenje u obliku integrala:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^u \frac{du}{\left(\frac{l^2 - 1}{h^2}c^2 + c^2\frac{r_g}{h^2}u - u^2 + r_g u^3\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (14)$$

Rješenje (14) u obliku je eliptičkog integrala i vrlo je neprikladno za usporedbu s rješenjem klasične Keplerove zadaće. U tu svrhu bolje je poći s deriviranjem jednađbe (13):

$$-c^2 r_g u' = -h^2 2u'u'' - h^2 2uu' + h^2 r_g 3u'u^2. \quad (15)$$

Odmah je vidljivo da je jedno rješenje te jednađbe:  $u' = 0$ , tj.  $r = \text{const}$  dakle kružno gibanje probnih masa oko centra gravitacije, kao u Newtonovoj mehanici.

Međutim, daleko su zanimljivija druga rješenja koja zadovoljavaju jednađbu:

$$u'' + u = \frac{r_g c^2}{2h^2} + \frac{3r_g}{2}u^2. \quad (16)$$

Jednađba (16) razlikuje se u biti od klasične jednađbe ( $u'' + u - \frac{GM}{4S_\varphi^2} = 0$ ) (Klasična Keplerova zadaća) samo zadnjim članom uz  $u^2$ .

Član  $\frac{r_g c^2}{2h^2}$  također valja razmotriti. Naime, iz definicije gravitacijskog polumjera  $r_g$  je:

$\frac{r_g c^2}{2h^2} = \frac{GM}{c^2 h^2}$  odakle je vidljivo da će konstanta  $h$  biti povezana s  $2S_\varphi$ . Pogledajmo konstantu  $h$  ukoliko se radi o malim brzinama i slabim gravitacijskim poljima:

$$h = r^2 \dot{\varphi} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{\sqrt{g_{00} - g_{ii} \frac{v^i v^i}{c^2}}}, \quad (17)$$

te je

$$\frac{r_g c^2}{2h^2} = \frac{GM}{h^2} \approx \frac{GM}{4S_\varphi^2}. \quad (18)$$

## 2.6 Rješavanje jednađbe računom smetnje

Rješavanje jednađbe  $u'' + u = \frac{r_g c^2}{2h^2} + \frac{3r_g}{2}u^2$  računom smetnje.

Pokažimo da je zadnji član jednađbe (16) malen spram predzadnjeg. U tu svrhu potražimo njihov omjer

$$\left(\frac{3r_g}{2}u^2\right) : \left(\frac{r_g c^2}{2h^2}\right) = 3\frac{h^2}{c^2}u^2. \quad (19)$$

No, prema (17) je:

$$3\frac{h^2}{c^2}u^2 = 3r^4\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{r^2} = 3\frac{1}{c^2}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 3\frac{v_\varphi^2}{c^2}, \quad (20)$$

tj., lateralna brzina planeta  $v_\varphi$  (brzina okomita na  $r$ ) puno je manja od brzine svjetlosti. Uzimajući gornju činjenicu u obzir riješimo jednadžbu (16) približno računom smetnje. Pretpostavimo rješenje u obliku:

$$u = u_0 + w, \quad (21)$$

gdje je  $w$  spram  $u$  u istom omjeru kao zadnji član jednadžbe (16) spram predzadnjeg.

Uvrstimo (21) u jednadžbu (16), izjednačimo članove istog reda veličine i zadržimo se samo do članova linearnih u  $w$ :

$$u''_0 + u_0 = \frac{r_g c^2}{2h^2} \approx \frac{GM}{4S_\varphi^2}, \quad (22)$$

$$w'' + w = \frac{3r_g}{2}u_0^2. \quad (23)$$

Rješenje jednadžbe (22) je rješenje klasične Keplerove zadaće:

$$u(\varphi) = a + b \cos \varphi \quad \text{gdje je } a = \frac{GM}{4S_\varphi^2}. \quad (24)$$

Uvrstimo (24) u (23) i uvedimo novu funkciju:  $w = \frac{3r_g}{2}v$ . Tada jednadžba (23) prelazi u:

$$v'' + v = (a + b \cos \varphi)^2 = (a^2 + \frac{b^2}{2}) + 2ab \cos \varphi + \frac{b^2}{2} \cos 2\varphi. \quad (25)$$

Rješenje ove linearne nehomogene jednadžbe je:

$$v = v_1 + v_2 + v_3, \quad (26a)$$

$$v_1 = (a^2 + \frac{b^2}{2}), \quad (26b)$$

$$v_2 = ab\varphi \sin \varphi, \quad (26c)$$

$$v_3 = -\frac{b^2}{6} \cos 2\varphi. \quad (26d)$$

Ukupno rješenje  $v$  je:

$$v = (a^2 + \frac{b^2}{2}) + ab\varphi \sin \varphi - \frac{b^2}{6} \cos 2\varphi. \quad (27)$$

Ukupno rješenje  $u$  (21) je:

$$u = a + b \cos \varphi + \frac{3r_g}{2}ab\varphi \sin \varphi + \frac{3r_g}{2} \left[ (a^2 + \frac{b^2}{2}) - \frac{b^2}{6} \cos 2\varphi \right], \quad (28a)$$

što se može napisati i kao:

$$u = a + b \left[ \cos \varphi + \frac{3ar_g}{2} \varphi \sin \varphi \right] + \frac{3r_g}{2} \left[ \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) - \frac{b^2}{6} \cos 2\varphi \right]. \quad (28b)$$

No, kako je iz (24)  $\frac{3ar_g}{2} \equiv \varepsilon \ll 1$ , izraz uz  $b$  moguće je napisati kao:

$$\cos(\varphi - \delta\varphi) \approx \cos \varphi + \delta \cdot \varphi \sin \varphi, \quad (29)$$

pa je cijelo rješenje:

$$u = a + b \cos(\varphi - \varepsilon\varphi) + \frac{\varepsilon}{a} \left[ \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) - \frac{b^2}{6} \cos 2\varphi \right]. \quad (30)$$

Posljednji član predstavlja male periodične promjene udaljenosti, koje dolaze od OTR, a koje je teško mjeriti. No, drugi član u (28) oblika (27) očito ima kumulativni učinak povećavanjem kuta, tako da bez obzira na malost  $\varepsilon$ , u konačnici se može dobiti mjerivi učinak u pomaku perihela.

Naime, pomak perihela (najmanja udaljenost planeta od Sunca) pri jednoj revoluciji planeta izračunava se kada je  $u$  najveće tj. za:

$$\varphi - \delta\varphi = 2\pi, \quad (31)$$

odakle je:  $\varphi \approx 2\pi(1 + \delta) = 2\pi + 2\pi\delta$ .

Dakle, pomak perihela nakon jedne revolucije je:

$$\Delta\varphi = 2\pi\delta = 3\pi ar_g = 3\pi \frac{GM}{4S_\varphi^2} \frac{2GM}{c^2} = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{GM}{cS_\varphi} \right)^2, \quad (32)$$

Sektorska brzina može se izračunati kao površina elipse koju opiše planet i vremena obilaska:

$$S_\varphi = \frac{\pi AB}{T} = \frac{\pi A^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T}. \quad (33)$$

Gdje su  $A$  i  $B$  velika i mala poluos elipse, a  $\varepsilon$  njezin ekscentricitet. U slučaju Merkura je:

$$A = 5.8 \cdot 10^{10} \text{ m}, \quad \varepsilon = 0.2, \quad T = 88 \text{ dana}.$$

U slučaju Merkura iz (32) dobije se ukupan pomak perihela tijekom jednog stoljeća 43.03'' (lučna sekunda za 100 god), što je u odličnom slaganju s eksperimentalno dobivenim vrijednostima, a koje se klasično ne mogu objasniti.

## 3 Pomicanja Merkurova perihela

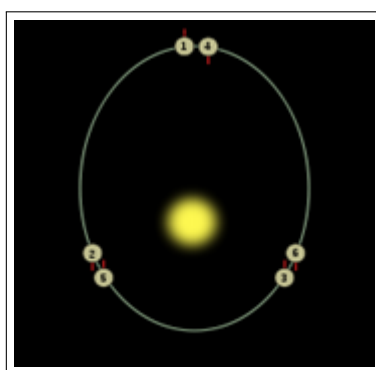
### 3.1 Merkurov perihel

1859. g. Urbain Le Verrier francuski matematičar i astronom izvijestio je da je spora precesija Merkurove orbite oko Sunca i da se ne može u potpunosti objasniti Newtonovom mehanikom i perturbacijom poznatih planeta. Precesija je pravilna promjena smjera osi rotirajućega tijela koja nastaje kada na tijelo djeluje vanjski moment sile. Promjena kutne količine gibanja ima smjer momenta sile i vektorski se zbraja s trenutačnom kutnom količinom gibanja. Perturbacija je narušavanje pravilnoga kretanja nebeskoga tijela pod utjecajem sile teže drugih nebeskih tijela. On je predložio, među mogućim objašnjenjima, da postoji još jedan planet (ili možda serija manjih čestica) koji je bliži Suncu nego Merkuru, na račun perturbacije. Uspjeh potrage za Neptunom baziran na perturbaciji orbite Urana astronome je doveo do toga da vjeruju u ovo moguće objašnjenje, a hipotetski planet nazvan je Vulkan, ali taj planet nije nikada pronađen. U odnosu na Zemlju, perihelova precesija Merkura je 5600 kutnih sec ( $1,5556^\circ$ ) po stoljeću odnosno  $574,10 \pm 0,65$  kutnih sec po stoljeću u odnosu na inercijalni ICFR. Uzimajući u obzir sve učinke drugih planeta, po Newtonovoj mehanici, predviđa se precesija 5557 kutnih sec ( $1,5436^\circ$ ) po stoljeću. Albert Einstein je početkom 20. stoljeća općom teorijom relativnosti dao objašnjenja za promatranu precesiju. Učinak je vrlo malen: uznapredovalo prekoračenje Merkurova relativističkog perihela je samo 42.98 kutnih sec po stoljeću; stoga zahtijeva malo više od dvanaest milijuna orbitalnih kretnji za potpuni zaokret. Slični, ali puno manji, učinci djeluju na druge planete: 8,62 kutnih sec po stoljeću za Veneru, 3,84 za Zemlju, 1,35 za Mars i 10,05 za 1566 Ikar. Merkurova orbita je ekscentrična i varira 46 do 70 milijuna km u polumjeru. U 19. stoljeću opažene su promjene u Merkurovoj orbiti: točka u kojoj se Merkur najviše približava Suncu (perihel) zakretala se pomalo nakon svakog obilaska. Velika izduženost staze, s apsolutno najvećom brzinom putovanja od svih planeta, uzrok je jednom malom, relativističkom učinku prozvanom zakret perihela. Kada bi u okolini Sunca postojao samo Merkur, položaj velike osi njegove eliptične staze zakrenuo bi se u vlastitoj ravnini za kut  $43,03''$  u 100 godina. Učinak je predvidio Albert Einstein razrađujući relativističku teoriju gravitacije. Očit razlog učinka je u promjeni mase planeta pri promjeni brzine. Kako se u perihelu planet giba mnogo brže nego u afelu, a brzina gibanja je jako velika, javlja se relativistička promjena mase. Osnovna pretpostavka klasične fizike planeta bila je u stabilnosti njihovih masa. Ako se masa mijenja, tijelo se neće oko Sunca gibati u stalnoj elipsi, već će se elipsa zakretati, i tijelo će opisivati rozetu (slika 5.).



Slika 5: Kruženje planeta po rozeti (pomaci su silno naglašeni) [11].

Osim relativističkog zakreta, staza Merkura zakreće se i zbog poremećaja ostalih planeta, pa se smjer velike osi elipse zakrene još za oko  $500''$  u 100 godina. Stvaran je zakret perihela jednak zbroju perturbacija i relativističkog učinka. Točnost astronomskih promatranja porasla je toliko da je utvrđeno kako je teorija relativističkog učinka točna bar na 1%, ako ne i bolja. Merkur vrlo sporo rotira oko vlastite osi. Nekada se smatralo da je zbog plimnih sila sinkroniziran sa Suncem (uvijek okrenut Suncu istom stranom). To bi značilo da se okrene oko sebe točno u istom vremenu u kojem napravi jedan okret oko Sunca - rezonancija 1 : 1. Međutim, radarska promatranja 1965 g. pokazala su da je u rezonanciji 3:2. Okrene se tri puta oko vlastite osi za vrijeme dva obilaska oko Sunca. Ova rezonancija je stabilna zahvaljujući velikoj ekscentričnosti Merkurove putanje. Do prvobitnog, pogrešnog, zaključka astronomi su došli promatrajući ga uvijek u najpovoljnijoj točki putanje, gdje je uvijek pokazivao istu stranu. Razlog tome je što se uvijek u istoj točki svoje 3:2 rezonancije nalazi u najpovoljnijem položaju za promatranje (slika 6.).



Slika 6: Spin-orbita rezonance [11].

Ovako spora rotacija Merkura ima za posljedicu neke zanimljive efekte. Promatrač na površini može u određenim uvjetima vidjeti Sunce kako izlazi, vraća se nazad ispod obzora (retrogradno gibanje) i ponovo izlazi. To se događa zbog promjena orbitalne brzine, prema

2. Keplerovom zakonu. Četiri dana prije perihela orbitalna brzina prestiže brzinu rotacije i Sunce se počinje prividno gibati unazad. Četiri dana nakon perihela orbitalna brzina se dovoljno smanji, tako da se Sunce nastavlja normalno gibati.

## 3.2 Svemirske letjelice

MARINER 10 je bio prva od dvije letjelice koja je posjetila planet Merkur od 1974. g. do 1975. g. koji je mapiran oko 45% svoje površine. Druga je letjelica MESSENGER, koja je za proučavanje i mapiranje ostatka planeta nakon tri preleta Merkura između 2008. g. i 2009. g., dosegla orbitu oko Merkura 17. ožujka, 2011. godine.

### 3.2.1 MARINER 10

Prva letjelica koja je posjetila Merkur je NASA-in Mariner 10 (1974.-1975.)(slika 7.). Letjelica je koristila težinu Venere kako bi prilagodila svoju orbitalnu brzinu, tako da bi mogla pristupiti Merkuru. Mariner 10 prikazuje prve slike Merkurove površine, koje su odmah pokazale površinu prepunu kratera i otkrile mnoge druge vrste geoloških značajki, kao što su divovski otpatci koji su se kasnije pripisali utjecaju skupljanja planeta kako se njegova željezna jezgra hladila. Na žalost, zbog duljine orbitalnog perioda Mariner 10, uvijek je isto lice planeta osvijetljeno na svakom od njegovih bliskih prilazaka. To je učinilo nemogućim promatranja obje strane planeta i imalo za rezultat mapiranje manje od 45% površine planeta. Dana 27. ožujka 1974.g., dva dana prije prvog obilaska Merkura, instrumenti Mariner 10 su počeli registrirati velike količine neočekivanog ultraljubičastog zračenja u blizini Merkura. To je dovelo do uvjetne identifikacije Merkurova mjeseca. Ubrzo nakon toga otkriveno je da on ne postoji. Letjelica se tri puta približila Merkuru, od kojih se najbliže približila na 327 km od površine. U prvom bliskom pristupu, instrumenti su otkrili magnetsko polje, na veliko iznenađenje planetarnih geologa, Merkurova rotacija je bila puno sporija da bi generirala značajan dinamo učinak. Dinamo učinak je geofizička teorija koja objašnjava nastanak Zemljinog magnetskog polja. Drugi bliski pristup prvenstveno su koristili za slikanje, ali u trećem pristupu, dobiveni su opsežni podatci o magnetskom polju. Podaci otkrivaju da je magnetsko polje Merkura poput Zemljinog magnetskog polja, koje odbija solarne vjetrove oko planeta. Solarni vjetrovi je struja električki nabijenih čestica koje su izbačene iz gornje atmosfere Sunca. Podrijetlo Merkurovog magnetskog polja je još uvijek predmet više konkurentskih teorija. 24. ožujka 1975 g., samo osam dana nakon završnog bliskog prilaska, Marineru 10 je ponestalo goriva. Budući da se njegovo kretanje u orbiti više ne može točno kontrolirati, kontrolori misije su isključili sondu.



Mariner 10 je još uvijek u orbiti oko Sunca, prolazi u neposrednoj blizini Merkura svakih nekoliko mjeseci.

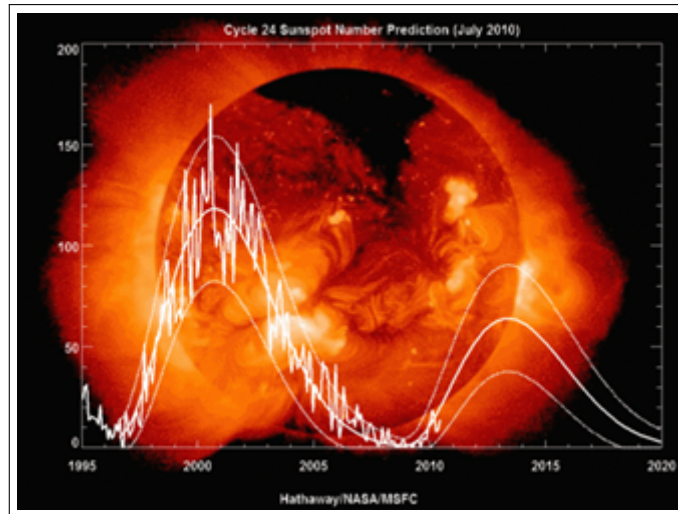


Slika 7: Mariner [7].

### 3.2.2 MESSENGER

Druga NASA-ina misija na Merkur, nazvana MESSENGER (MErcury Surface, Space ENvironment, GEOchemistry, and Ranging), pokrenuta je 3. kolovoza 2004. godine, iz Air Force Station Cape Canaverala pomoću Boeing Delta 2 rakete (slika 8.). Obišla je Zemlju u kolovozu 2005. godine, a Veneru u listopadu 2006. godine i lipnja 2007. godine da bi se namjestila na ispravnu putanju da bi dospjela do orbite Merkura. Prvi obilazak Merkura dogodio se 14. siječnja, 2008. godine, drugi 6. listopada 2008. g. a treći 29. rujna 2009. g. Većina hemisfere koja nije bila snimljena letjelicom Mariner 10 je mapirana tijekom tih prelijetanja. Sonda je uspješno ušla u eliptičnu orbitu oko planeta 18. ožujka 2011. g. Prva slika orbite Merkura dobivena je 29. ožujka 2011. g. Kao nastavak promatranja i mapiranja Merkura, MESSENGER je 2012. godine promatrao solarni maksimum. Točka najvećih aktivnosti Sunčevih pjega se naziva Sunčev maksimum, dok točka najmanjih Sunčevih aktivnosti Sunčevih pjega naziva se Sunčev minimum. Sunčeve pjege su privremena pojava u fotosferi, na Suncu, kada postaju vidljive tamne mrlje, u usporedbi sa okolnim područjem. Uzrok je u snažnim magnetskim aktivnostima, koje sputavaju konvekciju (prenošenje magnetskog polja) s vrtložnim strujama i tako se stvaraju područja s nižom temperaturom (slika 8.). Sonda je završila jednogodišnju misiju mapiranja, a zatim je produžena misija na 2013. godinu (slika 9.). Misija je osmišljena kako bi razjasnila šest ključnih pitanja: visoke gustoće, njegovu geološku povijest, prirodu njegovog magnetskog polja, strukturu jezgre, ima li leda na polovima, i od kud njegova slaba

atmosfera dolazi. U tu svrhu, sonda nosi rendgenske uređaje, koji će prikupiti mnogo više slika veće rezolucije planeta nego Mariner 10, nekoliko spektrometara koji će utvrditi brojnost elemenata u kori, i magnetometara te uređaja za mjerenje brzine nabijenih čestica.



Slika 8: Solarni maksimum [10].



Slika 9: Messenger [7].

### 3.2.3 BepiColombo

Europska svemirska agencija ESA planira zajedničku misiju s Japanom pod nazivom Bepi-Colombo, koja će ući u orbitu Merkura s dvije sonde: jedna za mapiranje planeta i druga za proučavanje njegove magnetosfere (slika 10.). Nakon što će biti pokrenuta 2015. godine, letjelica autobus se očekuje u orbiti Merkura 2019. godine. Letjelica će ispustiti magnetometarsku sondu u eliptičnu orbitu, a zatim će pomoću kemijskih raketa (raketa koja nosi tekući

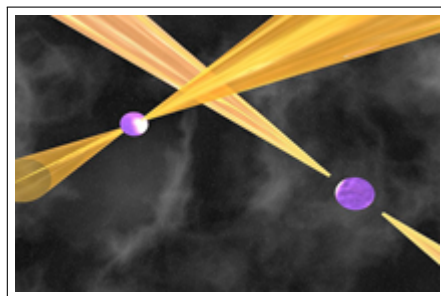
kisik, a sagorjeva kisik u obliku kemijskih spojeva) položiti sondu za mapiranje u kružnoj orbiti. Obje sonde će raditi za vrijeme Zemaljske godine. Sonda za mapiranje će nositi niz spektrometara sličnih onima na MESSENGER-u, te će proučavati planet na različitim valnim duljinama, uključujući infracrvene , ultraljubičaste, x-zrake i gama zrake.



Slika 10: Krstareći moduli BepiColomb-a [6].

## 4 Hulse i Taylorov pokus

Binarni pulsar je pulsar s binarnim pratiteljem često bijelog patuljka ili neutronske zvijezde (u najmanje jednom slučaju, dvostruki pulsar PSR J0737-3039, neutronska zvijezda pratitelj je također jedan pulsar)(slika 11.). Binarni pulsari su jedan od rijetkih objekata koji bi znanstvenicima omogućili, zbog jakih gravitacijskih polja u svojim okruženjima, da se testira Teorija opće relativnosti. Pulsar je imao period od 59 milisekundi. Tajming impulsa iz samog pulsara se može mjeriti s izuzetnom točnošću pomoću radio teleskopa, iako je binarnog pratitelja pulsara najčešće teško ili čak nemoguće promatrati. Radio teleskop je vrsta usmjerene radio antene, koja se koristi u radio astronomiji. Puls u razdoblju varira zbog Dopplerovog efekta: krećući se prema nama, impulsi Pulsara bi bili češći; i obratno, što se više udaljavao od nas manje se otkrivao u određenom vremenskom razdoblju, i time zaključujemo da je Pulsar u orbiti još jedna zvijezda velike brzine. Promatrajući navedene promjene pulsa, Hulse i Taylor su također utvrdili da su zvijezde bile približno jednako masivne sa masom od  $1.4 M_{sunca}$ , iz čega su zaključili da je drugi objekt također neutronska zvijezda.



Slika 11: Umjetnikov prikaz binarnog pulsara [11].

Do prvog preciznog određivanja mase neutronske zvijezde, pomoću relativističkih vremenskih učinaka dovelo je istraživanje PSR  $B1913+16$  binarnog pulsara. Kod jakog gravitacijskog polja, pri usporenom protoku vremena, vrijeme između impulsa (otkucaja) je produljeno ako su dva tijela u neposrednoj blizini. Tada puls putuje sporije kroz najslabiji dio gravitacijskog polja da bi vratio vrijeme. Na sličan način, djeluje oko orbite poseban relativistički učinak, dilatacija vremena. Vremenska dilatacija je jedna od ključnih tvrdnji specijalne teorije relativnosti. To je pojava koja se događa kada promatramo objekte koji se jako brzo kreću (blizu brzine svjetlosti) i teorija govori (specijalna teorija relativnosti) da vremenski period u kojem se promatra neka pojava nije neovisna o promatraču, već se mijenja ovisno o njegovoj brzini. Ako bi se Pulsar kretao na jednakoj udaljenosti i konstantnom brzinom oko svojeg pratitelja u kružnoj orbiti, ovo relativističko kašnjenje bila bi razlika između onoga što se moglo očekivati i što je zapravo primijećeno. Jedini trenutni poznati alati za otkrivanje gravitacijskih valova su binarni pulsari. Einsteinova teorija opće relativnosti predviđa da će

dvije neutronske zvijezde emitirati gravitacijske valove jer kruže oko zajedničkog središta mase, koja će izgubiti orbitalnu energiju i uzrokovati da se dvije zvijezde približe jedna drugoj i skrate svoj orbitalni period. 10-parametarski model koji uključuje podatke o Pulsar podešenju, Keplerovim orbitama i tri post-Keplerove korekcije (stopa periastrona unaprijed, čimbenik gravitacijskog crvenog pomaka i vremenske dilatacije i stope promjene u orbitalnom razdoblju emisije gravitacijskog zračenja), dostatan je da bi se u potpunosti modelirao binarni pulsar. Od orbitalnog propadanja PSR *B1913 + 16* sustava izrađena mjerenja su se približno podudarala sa rješenjima Einsteinovih jednadžbi. Relativnost predviđa da će se tijekom vremena orbitalni energetski binarni sustav pretvoriti u gravitacijsko zračenje. Podatci znanstvenika Taylora i Joel M. Weisberga i njihovih kolega o orbitalnom periodu sustava PSR *B1913 + 16* podržavaju ova relativističku predviđanja. Oni su objavili 1982. godine, da je postojala minimalna razlika odvajanja dvaju pulsara u usporedbi s onim što su očekivali ako bi orbitalna odvajanja ostala konstantna.

Masa Pulsara  $M_p = 1.4408 \pm 0.0003 M_{sunca}$

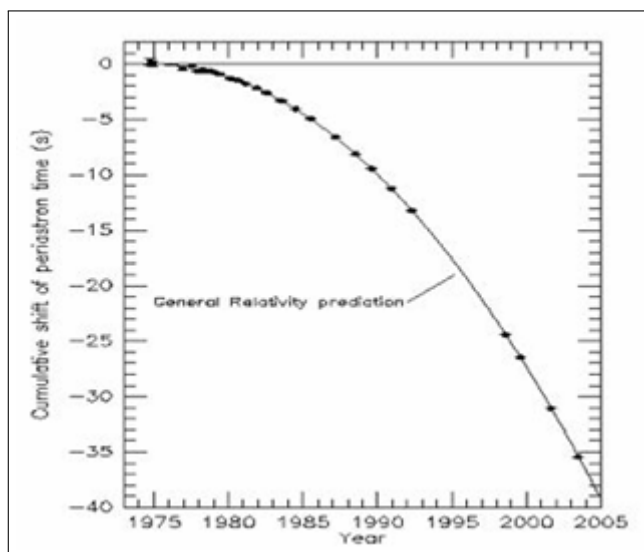
Masa pratitelja  $M_c = 1.3873 \pm 0.0003 M_{sunca}$

Ekscentricitet  $e = 0.6171338 \pm 0.0000004$

Orbitalni period binarnog sustava  $P_b = 0.322997462727 d$

Orbitalno kašnjenje  $\dot{P}_b = (-2.4211 \pm 0.0014) \cdot 10^{-12} s/s$

U sljedećem desetljeću orbitalni period sustava se smanjio za oko 76 milijuntom dijelu sekunde godišnje - to znači da se Pulsar približavao svom maksimalnom razmaku više od sekunde ranije nego što bi trebao. Daljnja promatranja nastavljaju pokazivati smanjenje. Zvijezda pratitelj binarnog pulsara ponekad nabubri do te mjere da odbacuje svoje vanjske slojeve prema pulsaru. Ova interakcija može ugrijati plin koji se razmjenjuje između tijela i stvaraju se X-zrake koje se mogu pojaviti u vidu pulsiranja. Protok materije od jednog zvjezdanog tijela do drugog dovodi do stvaranja strukture sastavljene od otpadnog materijala koji se orbitalno kreće oko zvijezde. Pulsari također stvaraju "vjetar" koji u slučaju binarnih pulsara može razoriti magnetosferu svojih zvijezda pratitelja te imati snažan učinak na pulsiranje zvijezda. Daljnja mjerenja pokazala su da je orbitalni period varirao tijekom vremena od 7,75 sati. To je značilo da pulsar mora biti u orbiti s nekom drugom zvijezdom. Tijekom godina, s velikom preciznošću konstantno je mjereno je period pulsara. Opća teorija relativnosti nam govori da će binarni sustav emitirati energiju kao gravitacijske valove i na kraju će se dva objekta spojiti. Kako će sustav napredovati prema spajanju vrijeme kretanja će se postupno smanjivati.



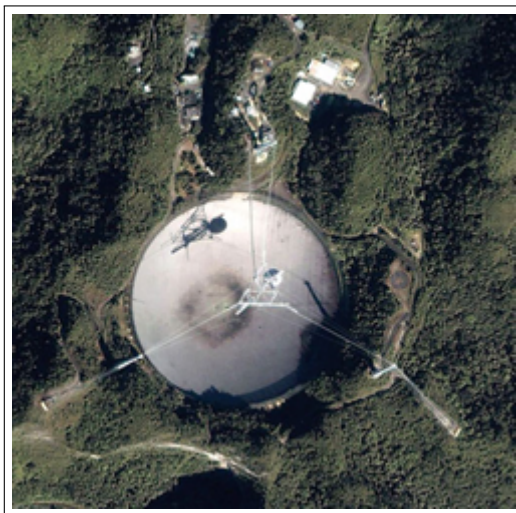
Slika 12: Kumulativni pomak perihela za PSR  $B1913 + 16$  [7].

Slika pokazuje smanjenje orbitalnog perioda. Mjereni pomak je samo 40 sekundi u 30 godina, to je vrlo točno izmjereno i slaže se s predviđanjima iz Einsteinove teorije opće relativnosti. Promatranje se smatra neizravnim dokazom o postojanju gravitacijskih valova. Znanstvenici Hulse i Taylor su za to otkriće dobili Nobelovu nagradu 1993. godine (slika 12.).

#### 4.1 Istraživačka tehnologija

Pomoću radio satelita na Arebico zvjezdarnici Russel Hulse i Joseph Taylor godine 1974. g. otkrili su signal pulsara. Službeni početak rada Arebico zvjezdarnice bio je 1. studenog 1963. godine, i danas nakon više od 50 godina rada je nezamjenjiv instrument radio astronoma. Ukupni troškovi izgradnje su bili oko 9 milijuna dolara, što bi danas iznosilo preko 100 milijuna dolara. Zvjezdarnicom Arecibo upravlja Cornell Sveučilište (slika 13.).

Zanimljivo je da je Arecibo teleskop sagrađen za nešto više od 3 godine, za razliku od GBT ili Effelsberga koji su građeni više od desetljeća. To je velikim djelom posljedica toga što je reflektor fiksiran, a ne pokretan kao kod prethodna dva. Arecibo od ranije opisanih teleskopa razdvaja i to što nema pokretan reflektor. Njegov reflektor je sferna aluminijska površina koja pokriva manju dolinu u blizini istoimenog grada Arecibo. Naravno, površina nije iz jednog komada, već se sastoji od velikog broja elemenata (oko 40000) pričvršćenih za betonske nosače na zemlji i dodatno je zategnuta sajlama, tako da je dobivena sferna površina, a ne parabolična, što bi bio slučaj kad bi aluminijska konstrukcija slobodno visila.



Slika 13: Arecibo reflektor snimljen sa visine od 1300 metara [7].

## Zaključak

Opća teorija relativnosti je geometrijska teorija koja postulira da prisutnost mase i energije zakrivljuje prostorvrijeme, te zakrivljenost utječe na kretanje slobodnih čestica (i općenito svjetlosti). OTR predstavlja učinkovit model gravitacije i kozmologije i dosad je prošla mnoge promatračke i eksperimentalne testove. Sama ideja OTR-a nije toliko komplicirana, ali matematička realizacija ekstremno je teška. Čitava moderna kozmologija sadržana je u tim formulama. To je po svoj prilici najoriginalnija ideja koju je jedan čovjek ikad izmislio. Danas najveći znanstvenici rade na problemima koje je Einstein započeo a nije dovršio. Nema dosad ni jednog predviđanja OTR-a koje bi bilo u sukobu s bilo kojom eksperimentalnom činjenicom. Einsteinova Opća teorija relativnosti ove godine zaokružuje svoju stogodišnjicu i za sada je najprihvatljivija teorija gravitacije i temelj je moderne fizike. Potvrđena je u mnogo pokusa kao i kod Hulse i Taylorovog pokusa. Objašnjenje zakretanja Merkurova perihela te opažanje savijanja zraka svjetlosti u blizini Sunca bili su početci potvrde te teorije.

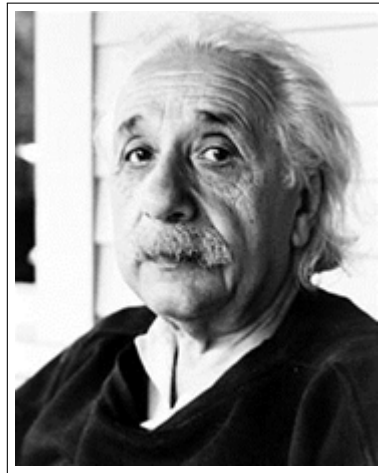


## Literatura

- [1] BRANA JOSIP, Opća Teorija Relativnosti, Einsteinova teorija gravitacije, (prvi dio), Odjel za fiziku, Sveučilište u Osijeku, 2010.g.
- [2] CHENG TA-PEY, Relativity, Gravitation and Cosmology, A Basic Introduction; Oxford master series in particle physics, astrophysics, and cosmology, Oxford university Press, 2005.g.
- [3] FAJ ZDRAVKO, Pregled povijesti fizike, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, 1999.g.
- [4] HOBSON M. P ., G . P . EFSTATHIOU, A . N . LASENBY, General Relativity, An Introduction for Physicists, Cambridge university Press, 2006.g.
- [5] SCHUTZ BERNARD, Gravity from the ground up, University Press, Cambridge, 2003.g.
- [6] [http : //www.ESA.int](http://www.ESA.int) (3.1.2015.g.)
- [7] [http : //www.NASA.gov](http://www.NASA.gov) (3.1.2015.g.)
- [8] [http : //www.cam.ac.uk](http://www.cam.ac.uk) (14.1.2015.g.)
- [9] [http : //www.ox.ac.uk](http://www.ox.ac.uk) (14.1.2015.g.)
- [10] [http : //www.znanost.com](http://www.znanost.com) (28.1.2015.g.)
- [11] [http : //www.wikipedia.com/wiki/Mercury](http://www.wikipedia.com/wiki/Mercury) (10.12.2014.g.)

## Sažetak

**Opća relativnost** ili **Opća teorija relativnosti (OTR)** fizikalna je teorija koju je Albert Einstein objavio 20. ožujka 1916. godine, i trenutno opisuje gravitaciju u modernoj fizici. Opća relativnost generalizira specijalnu relativnost i Newtonov zakon gravitacije, pružajući jedinstven opis gravitacije kao geometrijsko svojstvo prostora i vremena, odnosno prostor-vrijeme.



Slika 14: Albert Einstein

Rad pokazuje kako je do toga došlo, počevši od Einsteinovih jednadžbi gravitacijskog polja i Swartzschildovih rješenja o kojima govorimo u prvom poglavlju.

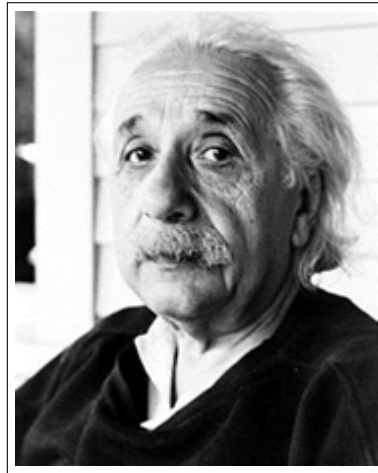
Drugo poglavlje govori o planetu Merkuru: njegovoj povijesti i osobinama, te provedenim promatranjima.

U trećem poglavlju prikazuje se pomicanje perihela Merkura u jakim gravitacijskim poljima.

Četvrto poglavlje opisuje binarni sustav u kojem je potvrđena Opća teorija relativnosti (Hulse i Taylorov pokus).

## Summary

**General relativity**, or **The General Theory of Relativity (GTR)**, is the physical theory of gravitation published by Albert Einstein in 20. March 1916.g. and the current description of gravitation in modern physics. General relativity generalizes special relativity and Newton's law of universal gravitation, providing a unified description of gravity as a geometric property of space and time, or space-time.



Picture 15: Albert Einstein

The object of this paper is to show how this came to be, starting with Einstein's gravitation field equations and Schwarzschild's solutions in the first chapter.

The second chapter is about planet Mercury: its history and attributes, and conducted observations.

In the third chapter, it is presented rotation of perihelion of Mercury in strong gravitational fields.

The fourth chapter describes the binary system in which The General Theory of Relativity was confirmed (Hulse & Taylor's experiment).

## Životopis

Rođena sam u Svetozarevu, u Srbiji, 16. svibnja 1984. godine.

Osnovnu školu završila sam u Slatini 1999. godine. Nakon završene osnovne škole upisala sam Opću gimnaziju u Slatini te maturirala 2003. godine.

Iste sam godine upisala smjer matematika-fzika na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayer u Osijeku.

## Zahvala

Ovaj diplomski rad izraden je u Slatini te u Osijeku pod vodstvom doc.dr.sc.Igora Lukačevića u sklopu Sveučilišnog dodiplomskog studija matematike-fzike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayer u Osijeku.

Posebno se zahvaljujem mentoru doc.dr.sc.Igoru Lukačeviću na svim korisnim savjetima vezanim za izradu rada.

Nadalje, velika hvala cijeloj mojoj obitelji i mojim prijateljima na velikoj podršci koju su mi pružili.