Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Helena Dravec

Počeci razvoja kombinatorne teorije vjerojatnosti

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Helena Dravec

Počeci razvoja kombinatorne teorije vjerojatnosti

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Tradicionalno se nastanak teorije vjerojatnosti stavlja u 17. stoljeće. Njezini temelji uspostavljeni su dopisivanjem Blaisea Pascala (1623. - 1662.) i Pierrea de Fermata (1601. - 1665.). Dopisivanje je počelo kada se kockar Chevalier de Méré obratio Pascalu s dva problema. Jedno pitanje je bilo isplati li se kladiti da će u 24 bacanja dvaju kocaka bar jednom pasti dupla šestica. Drugi je problem bio kako raspodijeliti uloge ukoliko se prijevremeno prekine igra na sreću u kojoj u svakom krugu nema neodlučenog ishoda, a pobjednik je onaj tko prvi pobijedi u određenom broju krugova. Pascal i de Fermat uspjeli su riješiti ove probleme, a njihove rezultate nastavio je znanstvenik Christiaan Huygens, dok su u djelu Jacoba Bernoullija, objavljenom 1713., prezentirani u potpuno sređenom obliku.

Međutim, teorija vjerojatnosti koristila se i prije 17. stoljeća, a postoje i njezini brojni prethodnici. Jedan od njih je Girolamo Cardano koji je napisao knjigu *Liber de ludo aleae (Knjiga o bacanju kocke).* To djelo je jedno od prvih djela o kombinatornoj teoriji vjerojatnosti, a objavljeno je 1663., dakle 87 godina nakon Cardanove smrti. U knjizi Cardano, koji je i sam bio kockar, bavi se problemom izračuna vjerojatnosti dobitka u igrama na sreću, te daje i preporuke za varanje.

Osim Cardana važno je spomenuti i indijske matematičare, koji su uglavnom iz religioznih razloga, već oko 3. st. pr. Kr. rješavali neka pitanja vjerojatnosti. Oni su najstariji poznati matematičari koji su se bavili kombinacijama i permutacijama, a njihova pravila zapisao je Mahavira u 9. stoljeću.

Nadalje će ovaj rad pokušati pokriti poznatu povijest vezanu uz teoriju vjerojatnosti između antičkih vremena i Cardana, te detaljnije pojasniti događaje vezane uz nastanak kombinatorne teorije vjerojatnosti u 17. stoljeću i nakon njega.

1 Vjerojatnost u antičkoj Indiji

Od 5. do 4. st pr. Kr. napisana su dva glavna epa na sanskrtskom jeziku antičke Indije, *Mahabharata* i *Ramajana*. Oba epa pisana su stihovima, te sadrže dugačke priče zajedno s filozofskim i molitvenim sadržajima, ali imaju i uzbudljiv pogled na matematičke interese u bujnom i egzotičnom okruženju. *Mahabharata* se sastoji od 200 000 stihova, a među glavnim pričama je priča o kralju Nali i njegovoj vjernoj ženi Damajanti.

Na samom početku priče kralj Nala izgubi cijelo svoje kraljevstvo kockajući se. Izgubio je sve do posljednjeg komada odjeće u šumi, te se pokriva polovicom haljine svoje žene Damajanti i napušta ju za njezino vlastito dobro. Princ Naga rekao je Nali kako će mu tajno znanje kralja Rituparne o kockanju pomoći da osvoji svoje kraljevstvo natrag. Stoga se Nala zapošljava, pod lažnim imenom Vâhuka, kod Rituparne kao vozač bojnih kola. Rituparna je želio oženiti Damajanti koja se, s dvoje djece, vratila svojim roditeljima. Na putu prema dvorcu njezina oca Nala zastaje pored bibithaki drveta [1], a Rituparna ne može odoljeti pokazati svoje matematičko znanje, te govori Nali: "Broj plodova na dvije grane ovog drveta je 2095, izbroji ih ako želiš."

Nala odluči brojiti plodove. Rituparna se uplaši zbog zastoja, svjestan da neće stići na vrijeme u dvorac, te predlaže Nali da izbroji plodove i lišće samo na dijelu jedne grane, te će biti zadovoljan njegovom tvrdnjom. Nala tako i učini te sazna da je procjena točna. Zatim predloži Rituparni da ga nauči toj "tajnoj vještini" u zamjenu za učenje o kročenju konja. Rituparna pristaje na takvu pogodbu, a čim Nala nauči vještinu istog trena prestaje biti ovisan o kockanju.

U ovoj priči vidimo povezanost pojmova uzorkovanja i kockanja, ali ujedno vidimo i da se takvo znanje smatra tajnom, te ga Rituparna odaje samo uz dobru nagodbu. Osim toga, u navedenoj priči spominje da je Nala izgubio svoje kraljevstvo igrajući igru "Krave i Bik". Poznato je da se ta igra igrala s jednom velikom kockom ili figurom koja se naziva bik i nekoliko manjih koje se nazivaju krave. Pravila igre nažalost nisu poznata, no igre s kockom rađaju potrebu za računanjem šansi, te na taj način vode razvoju teorije vjerojatnosti. Osim toga ova igra ima još jedno bitno obilježje, a to je da ima sličnosti i smatra se pretečom šaha, jer je poznato da se igrala na ploči s nekoliko figura.

[1]Drvo za čije se plodove smatra da su se koristili za kockanje u Indiji

2 Rani koncepti vjerojatnosti na području Europe

2.1 Dvosmislenost vjerojatnosti

Za razumijevanje razvoja vjerojatnosti na području Europe potrebno je razumjeti dva koncepta vjerojatnosti. Njezin se sadržaj postupno mijenjao pogotovo u filozofskoj literaturi, te i u sadašnjosti ima mnoga značenja. Za naše potrebe dovoljno je razlikovati dvije vrste vjerojatnosti koje ovise o kontekstu.

Objektivna, statistička ili aleatorna [2] *vjerojatnost* se koristi ukoliko opisujemo svojstva nasumičnih mehanizama ili pokusa. Tu pripadaju igre na sreću, opisivanje vjerojatnosti u populacijskim događajima kao što su vjerojatnost da se rodi dijete muškog ili ženskog spola, vjerojatnost za umiranje u određenoj dobi i slično. Takve vjerojatnosti izvedene su iz simetrije razmatranja ili procijenjene iz relativne frekvencije. Takva klasična vjerojatnost, bazirana na idealiziranim igrama na sreću s konačnim brojem jednako vjerojatnih ishoda, definira se kao omjer broja povoljnih i broja svih mogućih ishoda.

S druge strane imamo takozvanu *subjektivnu, osobnu ili epistemička vjerojatnost* koja se koristi za mjerenje stupnja vjerovanja u neki prijedlog zagarantiran dokazom koji ne mora biti statističke prirode. Takve vjerojatnosti odnose se na naše nesavršeno znanje i prema tome samo indirektno na stvari ili događaje na koje se izjava odnosi. Neki filozofi smatraju ovu vrstu vjerojatnosti mjerom snage logičke povezanosti između dva prijedloga i nazivaju ju logička vjerojatnost.

Jasnu podjelu ove dvije vrste vjerojatnosti dao je Jacob Bernoulli (1713.). Vjerojatnost prije renesanse bila je nematematička. Tek početkom 16. st. talijanski matematičari počinju raspravljati o šansama različitih ishoda igara na sreću.

2.2 Vjerojatnost u antici

Poznato nam je da su grčki filozofi i znanstvenici helenističkog razdoblja začetnici mnogih suvremenih ideja u raznim područjima geometrije i astronomije. Primjer njihovog značaja je elementarno korištenje nekih metoda matematičke analize, te Demokritova revolucionarna ideja o konceptu atoma koja je imala nepredvidive i neočekivane posljedice. Poznato je da su se osnovni koncepti vjerojatnosti, šanse i nasumičnosti pojavljivali kroz drevna vremena kao poveznica s vračanjem, proricanjem budućnosti, igrama na sreću, zakonom, osiguranjem, ispitivanjem uzoraka i pogrešaka u predviđanjima razlčitih znanosti kao što su astronomija i medicina.

[2] Ovisna o slučaju

Stoga je zapanjujuće i začuđujuće da objektivna vjerojatnost nikada nije bila predmet njihova istraživanja. Odnosno, nikada nisu iskoristili simetriju u igrama na sreću ili stabilnost relativne frekvencije kako bi kreirali aksiomatsku teoriju vjerojatnosti kao što su to učinili s geometrijom.

Umjesto klasične kocke u antičkoj Grčkoj korišteni su *astragaloi*, igraće kocke izrađene od kostiju životinjskih papaka. U popularnoj igri s astragaloima određeno bacanje donosilo je najveću vrijednost unatoč činjenici da su ostali ishodi imali manju vjerojatnost. Iz ovoga možemo zaključiti kako stari Grci nisu primijetili magnitude pripadajućih relativnih frekvencija.

Slika 1: Astragaloi

U Talmudu se spominje još jedan primjer nasumičnog mehanizma, a to je izvlačenje ždrijeba. Ono se koristilo u religijskim obredima, za dodjelu dnevnih obveza među svećenicima u hramu i za razne zakonske svrhe.

Pretpostavlja se da je znanstveno istraživanje ishoda u igrama na sreću spriječeno zbog religijskih razloga, a navodi se i nedostatak pojma o slučajnim događajima što pokazuje filozofija Platona i Aristotela koja je ograničila poglede grčkih znanstvenika na traženje pravilnosti samo u matematici i raju. Aristotel je klasificirao događaje na tri tipa:

1. određeni događaji koji se nužno događaju

2. vjerojatni događaji koji se događaju u većini slučajeva

3. nepredvidivi ili nepoznati događaji koji se događaju čistom slučajnošću.

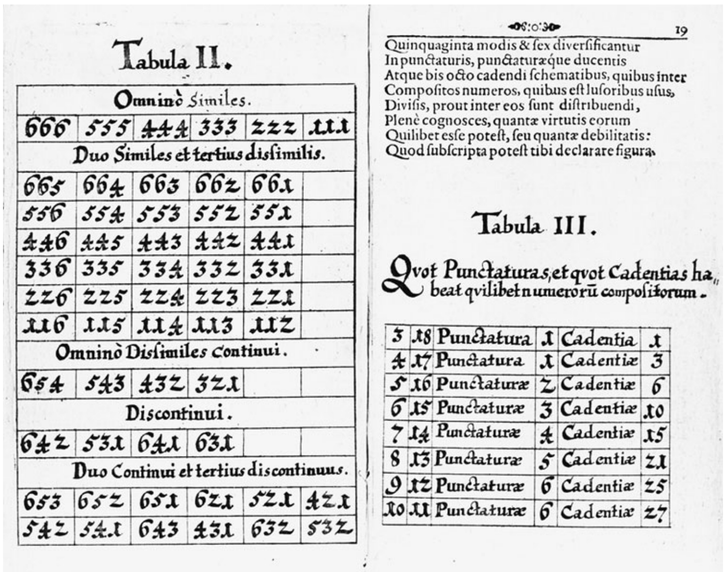
Pri tome je Aristotel smatrao da igre na sreću pripadaju trećem tipu događaja zbog čega nisu podložne znanstvenim ispitivanjima, te se pojam vjerojatnosti nije primjenjivao u igrama na sreću.

Rimski filozofi preuzeli su Aristotelovu klasifikaciju događaja, ali su ju trebali pomiriti s determinističkom filozofijom Crkve, stoga su smatrali da su nepredvidivi ili nepoznati događaji predodređeni Božjom voljom. Na ovaj način šanse za neki događaj u determinističkom svijetu mogu se okarakterizirati subjektivnom vjerojatnosti.

2.3 Vjerojatnost u srednjem vijeku

U srednjem vijeku u Europi su se počele pojavljivati osnovne ideje vjerojatnosti povezane s bacanjem kocke. Pronađeno je nekoliko dokumenata u kojima se računa broj različitih načina na koje mogu pasti dvije ili tri igraće kocke. Izračunato je da dvije kocke mogu pasti na 21 način, što je točno ukoliko nema permutacija. Dakle, ukoliko bacamo dvije kockice postoji samo jedan način da dobijemo zbroj 2, jedan načina da dobijemo zbroj 3, dva načina da dobijemo 4 (2 i 2, te 1 i 3), dva načina da dobijemo 5 (1 i 4, te 2 i 3), itd. Na ovaj način ne dobivamo jednako vjerojatne događaje, te oni ne mogu služiti kao baza za računanje vjerojatnosti za pobjedu u igri. Smatra se da je brojanje načina na koje kocke mogu pasti poteklo od proricanja pomoću kocke, tu je strana kocke pokazivala predodređenu budućnost, pa stoga nije bilo ni potrebne za šansama. Na isti način izračunato je, oko 960., da tri kocke mogu pasti na 56 načina.

Najstariji poznati komentar na tu temu je latinska pjesma *De vetula* nepoznatog pisca napisana između 1200. i 1400. koja kaže da postoji 216 načina na koje mogu pasti tri kocke.



Tabula II.

Omninò Similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo Similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omninò Dissimiles Continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

19

Quinquaginta modis & sex diversificantur
In punctaturis, puncturæque ducentis
Atque bis octo cadendi schematibus, quibus inter
Compositos numeros, quibus est lusoribus usus,
Divisis, prout inter eos sunt distribuendi,
Plenè cognosces, quantæ virtutis eorum
Quilibet esse potest, seu quantæ debilitatis:
Quod subscripta potest tibi declarare figura.

Tabula III.

Qvot Punctaturas, et qvot Cadentias habeat qvilibet numerorū compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Slika 2: *De vetula*

2.4 Vjerojatnost od renesanse do sredine 17. st. općenito

Tijekom renesanse vjerojatnost je i dalje bila nenumerički epistemički koncept, međutim u 16. stoljeću počinje se razvijati ideja o jednako vjerojatnim događajima i postaje moguće izračunati stvarne vjerojatnosti.

Prve primjere numeričke vjerojatnosti koji se ne odnose samo na primjenu u igrama na sreću dali su A. Arnauld i P. Nicole u djelu *La logique, ou l'art de penser* (1662.). Doktrina o šansama, kako se u početku nazivala, tada se razvila u teoriju vjerojatnosti s primjenom na različita područja, no nije bilo mnogo zabrinutosti o interpretaciji te vjerojatnosti sve do Jacoba Bernoullija.

Povjesničari su raspravljali i o teološkim i pravnim aspektima riskiranja za razvoj koncepta očekivanja u teoriji vjerojatnosti u renesansi. Crkva je proklela kockanje i lihvarstvo te ih proglasila moralno neispravnima, ali bilo je nemoguće zanemariti postojanje rizika u komercijalnom životu koji su identični rizicima kockanja. Tako je u renesansi nastala nova vrsta ugovora, takozvani aleatorni ugovori, koji su se koristili u pomorskom osiguranju, nepredvidivom životu, očekivanom nasljedstvu, lutrijama i riskantnim ulaganjima u poslu. Baza takvih ugovora bili su posebni uvjeti koji su zadovoljavali pravo svih uključenih strana, što je uključivalo procjenu rizika zajedno s mogućim dobicima i gubicima. Aleatroni ugovori na taj način su odgovarali pravednoj igri, odnosno igri u kojoj svi sudionici imaju jednaka očekivanja.

3 Prethodnici teorije vjerojatnosti

3.1 O igrama na sreću

Ranije smo spomenuli da su u srednjem vijeku računali broj načina na koje mogu pasti dvije ili tri kocke. U 14. stoljeću igrama s kockom koje su popularne još od antičkih vremena, pridodaju se igre s kartama. U početku su karte bile skupe, te su ih koristili samo bogataši koji su igrali na velike rizike, a u nekim državama karte su bile i zabranjene. Iz ovih razloga kartaške igre širile su se sporo i bilo je potrebno nekoliko stotina godina kako bi postale popularnije od kocke.

Lutrije su se koristile još u vrijeme Rimljana. U srednjem vijeku i renesansi lutrije su postale sredstva za financiranje državnih troškova. Cvjetale su i privatne lutrije, međutim zbog loših uvjeta su potisnute ili proglašene ilegalnima, ali su kasnije autorizirane za pomoć dobrotvornim svrhama i likovnim umjetnostima. Engleski ekonomist William Petty u djelu *Treatise of Taxes and Contributions* (1662.) oštro je osudio ljude koji igraju lutrije, te rekao kako je lutrija porez na nesretne "umišljene budale". Međutim, ovakva oštra osuda nije spriječila ljude da igraju lutrije tada pa ni u kasnije vrijeme.

U svijetu u kojem su igre na sreću imale ekonomsku i rekreacijsku vrijednost, nema sumnje da su matematičari pokušavali analizirati igre kako bi odredili šanse za pobjedu, a time i uloge za poštenu igru. Radovi u 16. i 17. stoljeću uglavnom su okupirani problemima kocke, igrama loptom, igrama na stolu i lutrijama, dok se problemi karata javljaju početkom 17. stoljeća.

Terminologija koja se koristila u navedenim problemima bila je ovisna o problemu koji se proučavao. Međutim, postojali su osnovni koncepti: *broj šansi* iz kojeg su izvedene *šanse*, te *vrijednost* ili *očekivanje* za bacanje ili izvlačenje koje u obzir uzima uloge i nagrade i iz kojeg se može procijeniti pravednost igre. Argumenti koji su korišteni bili su čisto matematički bez naznaka o promatranju relativnih frekvencija. Pojam "vjerojatnost" nije se koristio u igrama na sreću prije početka 18. stoljeća, međutim iz današnje perspektive lako je zaključiti kako se radi o vjerojatnosti.

Poznato je da su talijanski matematičari još od 1500-tih godina pokušavali riješiti problem pravedne raspodjele uloga u ranije završenoj igri. Ovaj je problem bio pravi izazov jer nije postojala kombinatorika, pa stoga mnogi nisu uspjeli u svojim pokušajima rješavanja.

3.2 Rani pokušaji rješavanja problema raspodjele

Problem raspodjele uloga još se naziva i *problem bodova* [3] jer pobjednik svake igre osvaja određeni broj bodova. Apstraktna formulacija problema glasi: Dva igrača A i B igraju igru naizmjence dok jedan od njih ne osvoji zadani broj bodova, neka je to s. Iz nekog slučajnog razloga igra se zaustavlja u trenutku kada A ima s_1, a B s_2 bodova i s_1, s_2 manji su od s. Kako pravedno raspodijeliti uloge?

Prvi pisani pokušaj rješavanja ovog problema ostavio je Luca Pacioli (1445. - 1517.) u svom djelu *Summa* objavljenom 1494. Ono daje sažetak svog poznatog znanja matematike u to vrijeme, te je unatoč manjku originalnosti kasnije bilo baza mnogim naprecima u europskoj matematici. Djelo sadrži proučavanje igara na sreću, a između ostalog i Paciolijev pokušaj rješavanja problema raspodjele.

Pacioli je pokušao dati rješenje za problem $s = 6$, $s_1 = 5$ i $s_2 = 3$, smatrajući ga problemom proporcija i predlaže podjelu uloga kao $s_1 : s_2$. Dakle, igra traje najmanje s, a najviše $2(s-1)+1 = 2s-1$ poteza. Pacioli, bez ikakvog razloga uvodi maksimalan broj poteza u igri i tvrdi da podjela treba biti $\frac{s_1}{2s-1} : \frac{s_2}{2s-1}$, što je jednako $s_1 : s_2$ kako je i ranije rečeno, odnosno $5 : 3$ u promatranom primjeru. Primjećujemo da Pacioli nije koristio vjerojatnosno niti kombinatorno rasuđivanje u rješavanju problema raspodjele.

Niccolo Fontana (1500. -1557.), poznat kao Tartaglia, kritizirao je Paciolijev rad oko 60 godina kasnije u svom djelu *Generale trattato* (1556.), te je primijetio da je odgovor netočan. Kao razlog netočnosti navodi da ako je igrač A dobio jednu

[3]Problem of points

pobjedu, a igrač B niti jednu tada je igra nevažeća, prvi igrač bi u tom slučaju uzeo sve uloge, a drugi ništa što je nepravedno. Njegov prijedlog je sljedeći: Ukoliko je s_1 veći od s_2, igrač A treba dobiti natrag svoj ulog plus $\frac{s_1-s_2}{s}$ uloga igrača B. Ukoliko pretpostavimo da su ulozi jednaki tada podjela treba biti sljedeća $s + s_1 - s_2 : s - s_1 + s_2$. Tartaglia nije bio samouvjeren u vezi svog odgovora te je stoga zaključio da je to pitanje više sudske prirode nego matematičke jer na koji god način napravili podjelu doći će do sudskog spora.

Girolamo Cardano (1501. - 1576.) bio je prvi koji je primijetio da raspodjela ne treba ovisiti o s, s_1 i s_2 već samo o broju bodova koji svakom igraču nedostaje za pobjedu, pa uvodi $a = s - s_1$ i $b = s - s_2$. Nadalje, uvodi novu igru u kojoj je A pobjednik igre ukoliko osvoji a bodova prije nego B osvoji b bodova u igri, te se pita na koji način u tom slučaju treba podijeliti uloge kako bi igra bila pravedna. Tada kao pravilo za pravednu raspodjelu uloga u ranije prekinutoj igri uzima omjer uloga u novoj igri te zaključuje kako podjela treba biti jednaka $b(b + 1) : a(a + 1)$.

Sljedeći primjer pokazuje njegovo razmatranje problema za $a = 1$ i $b = 3$: "Ulog onoga koji osvoji 3 boda je 2 krune, koliki treba biti ulog drugog igrača? Ja kažem da on treba biti 12 kruna iz sljedećih razloga. Ako igrač dobije samo jedan bod, 2 krune je dovoljan ulog, a ako dobije 2 boda ulog treba biti 3 puta toliko jer pobjedom u dvije igre ulog bi bio 4 krune, ali imao je rizik gubitka u drugoj igri stoga treba imati trostruku naknadu. Nadalje ako pobijedi u 3 igre naknada treba biti šesterostruka jer se težina još jednom udvostručila, prema tome ulog drugog igrača treba biti 12 kruna."

Vidimo da Cardano koristi argument induktivnosti. Ako ulog za igrača B postavimo na 1, tada ulog za A periodično postaje jednak 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$. Međutim, ne objašnjava kako iz posebnog slučaja $(1, b)$, doći do općenitog slučaja (a, b), ali pretpostavlja se da je koristio simetriju među igračima.

Sigurno je da u Cardanovom rasuđivanju postoje tragovi vjerojatnosti, međutim njegovi argumenti su nejasni, te ne vode točnom pravilu raspodjele uloga.

3.3 Cardano i *Knjiga o bacanju kocke*

Girolamo Cardano ili Jerome Cardan istaknuti je matematičar 16. stoljeća, koji je imao i odliku zagriženog kockara, stoga ne čudi da se bavio proučavanjem teorije kockanja, a ujedno je imao i nesavladiv poriv da svo svoje znanje podijeli javno.

Girolamo Cardano bio je nezakoniti sin Fazia Cardana. Otac mu je bio odvjetnik u Milanu koji se bavio i poučavanjem matematike, a Leonardo da Vinci savjetovao ga je u pitanjima geometrije. U početku je Girolamo Cardano bio pomoćnik svom ocu u poslovima, a kasnije je poželio biti nešto više od očeva pomoćnika. Otac ga je stoga poučio matematici i Cardano je počeo razmišljati o akademskoj karijeri. Cardano je počeo studirati medicinu na Sveučilištu Pavia, a diplomirao je na Sveučilištu u Padovi. Nakon toga želio se pridružiti Medicinskom fakultetu u Milanu, međutim odbili su ga iako je bio izvrstan student. Formalno su ga odbili zbog nelegitimnog rođenja, međutim vjerojatno je pravi razlog odbijanja bilo to što je bio poznat kao težak čovjek. Cardano je imao oštar jezik, te je bio poznat kao čudak i kockar. Poslije je još jednom odbijen.

Kasnije je dobio očevo mjesto predavača matematike na Piatti zakladi u Milanu. Zbog toga je imao dosta slobodnog vremena koje je iskoristio kako bi liječio nekoliko pacijenata iako nije bio član Medicinskog fakulteta. Cardano je postigao neka gotovo čudesna izlječenja što je podiglo njegovu liječničku reputaciju.

Cardano je još bio gnjevan zbog isključenja s fakulteta, te je 1536. objavio knjigu u kojoj napada, ne samo liječničke sposobnosti članova fakulteta, već i njihov karakter. To mu iduće godine nije pomoglo kako bi se pridružio fakultetu, te je ponovno odbijen. Međutim, dvije godine kasnije, nakon velikog pritiska njegovih obožavatelja, postao je član fakulteta. Iste godine objavio je i dvije matematičke knjige. Nekoliko godina poslije postao je i rektor. Osim matematičkih knjiga Cardano je tijekom svoje karijere napisao brojne knjige s temama iz medicine, filozofije, astronomije i teologije, te je postao jedan od najistaknutijih liječnika u Milanu, a njegovo najvažnije matematičko djelo je *Ars Magna*. U godinama između, od 1540. do 1542. Cardano nije radio na svojim studijama, te je samo kockao i igrao šah po cijele dane.

Na vrhuncu svoje slave, Cardano je doživio svoju, kako je on naziva, "krunsku nesreću". Cardanov najstariji sin Giambatista je bio doktor, ali je otrovao svoju ženu, te je pogubljen. Cardano se nikada nije oporavio od ovog događaja, a kao otac ubojice u javnosti je postao omražen, te se odlučio preseliti u Bolognu gdje postaje profesor medicine. Njegova reputacija u kombinaciji s arogantnim stavom osigurala mu je ondje brojne neprijatelje. Godine 1570. Cardano je uhićen pod presudom da je heretik, stoga je otpušten i onemogućeno mu je održavanje predavanja i izdavanje knjiga. Cardano je brzo otpušten iz zatvora, nakon čega odlazi u Rim gdje je primio neočekivano ugodnu dobrodošlicu. U ovom razdoblju Cardano je napisao svoju autobiografiju *De Vita Propria Liber (Knjiga mog života)* koja je objavljena 1643. Cardano u knjizi spominje svoje 4 najveće tuge života: "Prva je moj brak; druga, gorka smrt moga sina; treća, zatvoreništvo; četvrta, bazni karakter mog najmlađeg sina." Cardanov najmlađi sin Aldo bio je zagriženi kockar koji je cijelo bogatstvo izgubio na kocki. Nadalje, Cardano je izvijestio kako je točno izračunao dan svoje smrti, ali smatra se da je to postigao počinivši samoubojstvo.

Među mnogim Cardanovim neobjavljenim rukopisima je i knjiga *Liber de Ludo Aleae (Knjiga o bacanju kocke)*. Prvi puta je objavljena 1663., a nije poznato kada ju je Cardano završio. U knjizi Cardano ulazi u, do tada još netaknuto, carstvo teorije vjerojatnosti. To je prva studija o stvarima kao što je bacanje kockice, bazirana na pretpostavci da postoje osnovni znanstveni principi vođeni vjerojatnošću postizanja nedostižne "dvostruke šestice", izvan okvira čiste sreće. U 5. poglavlju Cardano je izjavio: "Iako je kockanje potpuno zlo, zbog velikog broja ljudi koji igraju, čini se da je to prirodno zlo. Iz tog razloga potrebno je da ga liječnik razmotri kao neizlječivu bolest."

Knjiga o bacanju kocke je rasprava o moralu, praktičnim i teoretskim aspektima kockanja, napisana je vulgarnim jezikom, a sadrži i anegdote iz Cardanova osobnog iskustva. Knjiga ima 32 kratka poglavlja u kojima iskusni kockar, s 25 godina iskustva u kockanju, daje praktične savjete što nagovještavaju i neki od naslovi poglavlja. Većina teorije u knjizi dana je u obliku primjera iz kojih se mogu ili jesu izvučeni generalni principi. U nekim slučajevima Cardano dolazi do rješenja problema metodom pokušaja i pogreške, a knjiga sadrži i točna i netočna rješenja. Cardano se dotiče i nekih problema čija rješenja ne zna i pokušava dati aproksimativna rješenja.

Glavni rezultati o bacanju kocke mogu se pronaći u poglavljima 9. - 15. i 31. - 32. Cardano jasno izjavljuje da su svih šest strana kocke jednako vjerojatne ukoliko je kocka pravilna, te uvodi vjerojatnost kao omjer broja povoljnih slučajeva i broja svih jednako mogućih slučajeva. Koncept pravedne igre definira pomoću pojma šansa[4], kojeg je češće koristio, na sljedeći način: "Dakle, postoji jedno opće pravilo, naime, trebamo razmatrati cijeli "krug" (ukupan broj jednako mogućih događaja) i broj bacanja koja predstavljaju broj načina na koje se povoljan rezultat može dogoditi, te usporediti taj broj s ostatkom od "kruga" i na temelju te proporcije potrebno je donijeti uzajamnu okladu tako da se svatko može natjecati pod jednakim uvjetima."

Nabrajanje jednako vjerojatnih slučajeva provedeno je na sljedeći način. Prvo je pronađen broj različitih vrsta ishoda. Na primjer, za određivanje broja načina na koje mogu pasti tri kocke, navodi da je broj trojki 6, broj parova i jedne različite strane je 30, a broj slučajeva u kojima su sve strane različite je 20. Zatim pronalazi broj permutacija za svaki različiti tip, u promatranom primjeru to su 1, 3 i 6, što daje konačan rezultat $6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$. Cardano provodi ovakvu analizu u detalje za dvije i tri standardne igraće kocke, te za četiri četverostrane kocke.

Dodavanjem niza jednako mogućih slučajeva, Cardano izvodi šanse za složene događaje. Prvo stavlja u tablicu razdiobu suma bodova u igri s dvije ili tri igraće

[4]Šansa je omjer broja elemenata dva disjunktna skupa događaja koji u uniji čine cjelinu

kocke. Zatim pronalazi šanse za razne kombinacije bodova u igri s dvije kocke. Neka 1 označava pojavljivanje barem jedne jedinice, zatim 2 označava pojavljivanje barem jedne dvojke, bez slučaja s jedinicom itd. Brojenjem samo odvojenih slučajeva Cardano daje rezultate kao u sljedećoj tablici:

Povoljni slučajevi za kombinaciju		
	Dvije kocke	Tri kocke
Slučajevi za 1	11	91
Dodatno za: 2	9	61
3	7	37
4	5	19
5	3	7
6	1	1
Ukupno:	36	216

Tablica 1

Cardanov najnapredniji rezultat je pravilo množenja za određivanje šansi ponovnog pojavljivanja određenog događaja u n nezavisnih ponavljanja igre, te u knjizi navodi kako je u početku bio zbunjen što točno treba pomnožiti. Neka je t broj svih jednako mogućih događaja u igri i neka je r broj povoljnih događaja, stoga su šanse $\frac{r}{t-r}$. Analizirajući igraće kocke s tri, četiri, pet i šest strana, te metodom pokušaja i pogreške Cardano dolazi do važnog zaključka, a to je da će u n ponavljanja šanse postati $\frac{r^n}{t^n-r^n}$. Ukoliko uzmemo $p = \frac{r}{t}$, rezultat postaje $\frac{p^n}{1-p^n}$. U knjizi se nalazi i nekoliko primjera za ovu metodu, a najkompliciraniji slijedi. U igri s tri kocke postoji 91 povoljan slučaj, u kojemu se dobije barem jedna jedinica, od 216 jednako mogućih slučajeva. Šanse da se taj rezultat dogodi svaki puta u tri ponavljanja igre su $\frac{91^3}{216^3-91^3} = \frac{753571}{9324125}$, što je nešto manje od $1 : 12$.

U nekoliko poglavlja knjige Cardano se bavi kartaškim igrama, točnije srednjovjekovnom inačicom pokera, koja se zove Primero. Pokazuje kako izvlačenjem karata iz snopa odrediti šanse za neke jednostavne ishode.

Kako je Cardano bio praktičan čovjek kao i matematičar začuđujuće je što nije dao nikakve empirijske podatke, te da nije zabilježio niti jednu relativnu frekvenciju u svom dugotrajnom kockarskom iskustvu. S druge strane knjiga *Knjiga o bacanju kocke* sadrži mnogo važnih zapažanja u praksi. Iako nije imala direktni utjecaj na daljnji razvoj vjerojatnosti zbog kasne objave, razumno je za pretpostaviti da su Cardanovi rezultati bili poznati matematičkoj zajednici krajem 16. stoljeća. U vrijeme Pascala (sredina 17.st.) Cardanova formula $\frac{p^n}{1-p^n}$ smatrala se elementarnom.

3.4 Galileo i *Razmišljanja o igrama s kockom*

Kao što je već rečeno, Cardanovo otkriće vjerojatnosti pojavljivanja svake strane kocke brzo se proširilo među matematičarima, te je Galileo Galilei (1564. - 1642.) objavio svoja *Razmišljanja o igrama kockom* (1620.) u kojima se uglavnom posvetio vjerojatnostima ishoda ako se igra s dvjema kockama. Galileo je zaključio sljedeće: "Budući da igraća kocka ima šest strana, kada je bacimo ona može pasti na bilo koju stranu... Ali ako zajedno s prvom kockom bacimo i drugu kocku, koja također ima šest strana, možemo dobiti 36 različitih ishoda, jer svaka strana prve kocke može se kombinirati sa svakom stranom druge kocke... što čini 6 puta 6, tj. 36 kombinacija."

Ako bacamo tri kocke, ne računajući permutacije, zbrojeve 9 i 10 možemo dobiti na 6 načina. Galieo je želio odgovoriti na pitanje: Kako je ta činjenica spojiva s iskustvom kockara, koji nakon dugotrajnog promatranja igre, smatraju da je dobivanje zbroja 10 povoljniji događaj nego dobivanje zbroja 9? Kako bi odgovorio na pitanje, Galileo je napravio listu tri-particija brojeva od 3 do 10, te na taj način odredio broj permutacija svake particije. Na taj način je odredio "da suma 10 može biti dobivena na 27 različitih načina, a suma 9 na samo 25 načina. Primjećujemo da je Galileo došao do rezultata na sličan način kao i Cardano, odnosno rješenje dobiva određivanjem broja svih mogućih događaja i prebrojavanjem povoljnih.

Ovaj događaj je osobit iz još jednog razloga, a to je da je netko postavio pitanje jer je nakon dugotrajnog promatranja igre primijetio relativnu frekvenciju, a Galileo je na to pitanje odgovorio pomoću vjerojatnosnog modela.

4 Začetak teorije vjerojatnosti

4.1 Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601. - 1665.) potekao je iz obitelji bogatog trgovca kožom. Studirao je pravo na sveučilištu u Toulouseu, a kasnije se preselio u Bordeaux gdje je započeo svoju prvu seriju matematičkih istraživanja. Za život je zarađivao baveći se odvjetništvom, a matematika mu je bila cjeloživotni hobi. Fermat je 1631. postao savjetnik Parlamenta u Toulouseu, a od tada je postupno unaprijeđivan na više pozicije, te je 1652. unaprijeđen na najviši stupanj kaznenog suda. Fermat je 1653. obolio od kuge i bio je proglašen mrtvim, međutim kratko nakon je ispravljena ta pogreška i objavljeno je kako njegovo zdravlje više nije u opasnosti.

Kako je Fermat bio čovjek širokog raspona znanja, dopisivao se s mnogim kolegama, čak i onima izvan Francuske. U tim dopisivanjima i svojim rukopisima, govorio je o svojim važnim matematičkim rezultatima koje je davao bez dokaza ili s nepotpunim dokazom. Na taj način sačuvao je svoju slobodu i status "amatera" bez obveze objavljivanja, a u isto vrijeme je postao poznat, što mu se sviđalo. Takvo ponašanje dovelo ga je u sukob s nekim istaknutim matematičarima tog doba. Međutim, stekao je i novog prijatelja Carcavia. Kao i Fermat, Carcavi je radio kao savjetnik u Toulouseu, a zajednička im je bila i ljubav prema matematici. Carcavi je otišao raditi u Pariz, te je stupio u kontakt s Mersenneom i njegovom grupom. Mersenne je bio zadivljen Carcavijevim opisom Fermatovih otkrića o slobodnom padu, te mu je i sam pisao.

Danas Fermatova slava leži u njegovim doprinosima teoriji brojeva za koju je dao brojne teoreme bez dokaza, ali ukazujući na općenitu metodu dokaza, a to je metoda beskonačnog spusta. Fermat se teoriji brojeva posvetio od 1643. do 1654., a u tom razdoblju nije kontaktirao ni svoje kolege matematičare u Parizu. Nakon tog razdoblja brojni su matematičari pokušavali dokazati Fermatove teoreme. Fermatov "posljednji teorem" ili *Veliki Fermatov teorem* kaže: "Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom." Fermat je na marginama napisao: "Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak, da ga zapišem."

Fermat je ponovno uspostavio vezu s matematičarima u Parizu 1654. kada mu se obratio Blaise Pascal sa željom da on potvrdi njegove ideje o vjerojatnosti. Blaise Pascal znao je za Fermata preko svog oca, a bio je upoznat i s Fermatovim izvanrednim matematičkim sposobnostima. U svom kratkom dopisivanju postavili su temelje suvremene teorije vjerojatnosti i od tada se smatraju osnivačima iste.

4.2 Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623.–1662.) bio je treće dijete pravnika Étienna Pascala i njegov jedini sin. Blaiseova majka umrla je kada je on imao samo tri godine. Étienne se iz hobija bavio matematikom, te je odlučio svog sina poučavati kod kuće. Osim toga odlučio je kako ga neće poučavati matematici do petnaeste godine, stoga je iz kuće maknio sve matematičke knjige. Zbog toga se Blaise još više zainteresirao za matematiku, te se u dobi od 12 godina samostalno počeo baviti geometrijom. Otac ga je otkrio kako ugljenom na zidu ispisuje dokaz da je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta, stoga mu je dopustio da proučava Euklidove *Elemente*. U dobi od 14 godina Blaise Pascal pridružio se ocu na sastancima Mersenneove grupe.

Pascalov otac radio je kao sakupljač poreza, a kako bi mu olakšao rad Blaise je izmislio mehanički kalkulator, poznat pod nazivom *Pascaline*. Događaji u 1646.

bili su iznimno važni za Pascala, te je godine njegov otac ozlijedio nogu i morao se oporavljati kod kuće. Pomagala su mu dvojica braće iz jansenističkog religijskog pokreta koji su ostavili jak dojam na mladog Pascala i on je postao duboko religiozan.

U to vrijeme Pascal je počeo raditi pokuse s atmosferskim tlakom, te je do 1647. dokazao postojanje vakuuma. Iste je godine Pascala posjetio Descartes, međutim posjet je trajao samo dva dana jer su se posvađali oko vakuuma. Descartes nije vjerovao da vakuum postoji, a u kasnijem pismu Huygensu napisao je da Pascal "ima previše vakuuma u svojoj glavi". Pascal je 1653. objavio djelo o ravnoteži u tekućinama u kojem se nalazi i Pascalov zakon tlaka, prema kojem je SI jedinica za tlak dobila ima paskal (Pa).

Blaiseov otac umro je 1651., a on je nastavio živjeti na naslijeđenom bogatstvu. Godine 1654. počeo je svoje slavno dopisivanje s Fermatom, a iste godine doživio je svoje "drugo preobraćenje" i od tada je uglavnom bio okupiran religijskim problemima. U to vrijeme počeo je pokazivati i prve ozbiljne probleme sa zdravljem, a u listopadu 1654. gotovo je izgubio život u nesreći. U posljednjim godinama života radio je na raspravi o kršćanskoj filozofiji, *Isprika kršćanskoj religiji*, a pronađeni dijelovi te rasprave dodani su 1670. u djelo *Pensées (Misli)*. To filozofsko djelo je skup njegovih osobnih misli o čovjeku koji pati i vjeri u Boga. U tom djelu je zapisana i poznata Pascalova vaga: *Ako Bog ne postoji, čovjek ništa ne gubi vjerujući u njega, a ako postoji ne vjerovanjem gubi sve.* Pascal je bio duboko podijeljen između svoje odanosti matematici i prirodnim znanostima i odanosti religiji, a umro je u 39. godini.

4.3 Pascalov aritmetički trokut

Osim nekoliko pisama koja je izmijenio s Fermatom, Pascalov doprinos vjerojatnosti je dan u njegovoj *Traité du triangle arithmétique (Treatise on the Arithmetical Triangle)* u javnosti objavljenoj 1665. godine. Pascal je 1653. otkrio aritmetički trokut, danas poznat kao Pascalov trokut. Aritmetički trokut bio je već stotinama godina poznat Indijcima, Kinezima i Arapima, međutim Pascal je prvi koji je detaljno i sistematično izložio svoje proučavanje trokuta. Pascal je umjesto danas poznatog trokuta koristio sljedeću pravokutnu tablicu:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Tablica 2: Pascalov trokut

U prvom retku i stupcu nalaze se jedinice, a ostali brojevi nastaju zbrajanjem broja lijevo i iznad onog kojeg želimo upisati.

Pascal je brojeve u aritmetičkom trokutu definirao rekurzijom. Neka je Pascalov trokut (beskonačna) matrica $T = [t_{mn}]$, gdje je t_{mn} broj u m-tom retku i n-tom stupcu. Tada je on jednak:

$$t_{mn} = t_{m-1,n} + t_{m,n-1}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (m, n) \neq (0, 0)$$

Granični uvjeti su:

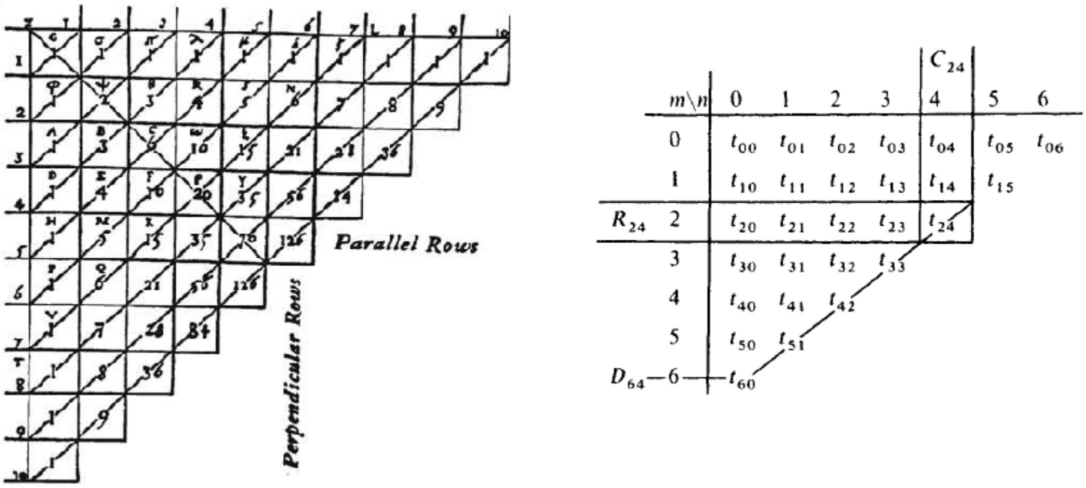
$$t_{m,-1} = t_{-1,n} = 0, \qquad m, n = 1, 2, \dots$$

i generator je $t_{00} = 1$. Pascal daje vrijednosti za t_{mn} do $m = n = 9$. Osim konkretnim brojevima Pascal je u svojoj tablici ćelije označio različitim grčkim i latinskim slovima kako bi lakše provodio dokaze. Tada još nisu postojale oznake za elemente tablice kao danas što Pascalovu originalnu tablicu čini nepreglednom. Radi lakšeg snalaženja uvodimo t_{mn} i dokaze provodimo prema tim oznakama. Dokazao je 20 propozicija o t_{mn}, a posljednja je multiplikativna forma. Sve svoje rezultate Pascal je dao u verbalnom obliku, a koristio je sume retka, sume stupca i dijagonalne sume koje možemo u današnjem obliku zapisati na sljedeći način:

$$R_{mn} = \sum_{j=0}^{n} t_{mj} \qquad C_{mn} = \sum_{i=0}^{m} t_{in}$$

$$D_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} t_{n-j,j} \qquad D_n = D_{n,n}$$

Ovakav zapis i oznake odgovaraju Pascalovom verbalnom obliku, a prednost ovakvog zapisa je što se lako može pokazati simetrija. Pascal je propozicije dokazao ponavljajućom primjenom rekurzivne formule. Većina ih je lagana, stoga prvih 11



Slika 3: Lijevo: Originalni Pascalov trokut
Desno: Trokut s novim oznakama

navodimo bez dokaza:

$$t_{0n} = t_{m0} = t_{00} = 1 \tag{1}$$

Svojstvo za sume redaka i stupaca:

$$t_{mn} = R_{m-1,n} \tag{2}$$

$$= C_{m,n-1} \tag{3}$$

$$t_{mn} - 1 = \sum_{i=0}^{m-1} R_{i,n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{m-1,j} \tag{4}$$

Svojstvo simetrije:

$$t_{mn} = t_{nm} \tag{5}$$

$$t_{mj} = t_{jm}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Svojstva dijagonalnih suma:

$$D_{k+1} = 2D_k \tag{7}$$

$$D_k = 2^k \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_i = D_{k+1} - 1 \tag{9}$$

$$D_{k,n} = D_{k-1,n} + D_{k-1,n-1} \tag{10}$$

$$t_{m,m} = 2t_{m,m-1} = 2t_{m-1,m} \tag{11}$$

Nadalje, Pascal ističe sljedeću propoziciju za omjer kao posebno važnu:

$$\frac{t_{m+1,n-1}}{t_{mn}} = \frac{n}{m+1} \tag{12}$$

Dokaz za ovu propoziciju dan je indukcijom. Iako je nepotpuna indukcija korištena još od doba Euklida, Pascal prvi daje eksplicitnu i potpunu formulaciju indukcije i to na sljedeći način:

> Kako propozicija pokriva beskonačno mnogo slučajeva, dati ću kratki dokaz koji se bazira na dvije leme. Prva lema, koja je očita, kaže da propozicija vrijedi za $m + n = 1$, jer je jasno da je omjer $1 : 1$. Druga lema kaže da ako propozicija zadovoljava danu bazu [npr. za danu vrijednost $m + n$] tada neophodno vrijedi i za sljedeću bazu.

Dakle, kombinacijom dvije leme zaključuje da propozicija vrijedi za $m + n = 2$, zatim $m + n = 3$ i tako dalje do beskonačnosti. Pascalov dokaz dan je na sljedeći način. Ako postavimo $m + n = k$, tada propoziciju možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{t_{k-r,r}}{t_{k-r-1,r+1}} = \frac{r+1}{k-r}, \qquad r = n-1, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Sada treba pokazati da omjer vrijedi za $m + n = k + 1$, koristeći rekurzivnu formulu dobivamo

$$\frac{t_{k+1-r,r}}{t_{k-r,r+1}} = \frac{t_{k-r,r} + t_{k+1-r,r-1}}{t_{k-r-1,r+1} + t_{k-r,r}}.$$

Dijeljenjem i brojnika i nazivnika s $t_{k-r,r}$ i korištenjem prethodne pretpostavke slijedi da je omjer jednak

$$\frac{1 + \frac{r}{k-r+1}}{1 + \frac{k-r}{r+1}} = \frac{r+1}{k+1-r}$$

čime je tvrdnja dokazana. Nadalje, kako znamo da vrijedi

$$\frac{t_{mn}}{t_{m+n,0}} = \frac{t_{mn}}{t_{m+1,n-1}} \cdot \frac{t_{m+1,n-1}}{t_{m+2,n-2}} \cdots \frac{t_{m+n-1,1}}{t_{m+n,0}}$$

ponavljajućom primjenom tvrdnje (12) dobivamo:

$$t_{mn} = \frac{(m+n)\cdot(m+n-1)\cdots m+1}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \tag{13}$$

što je multiplikativni oblik za t_{mn}. Danas taj broj nazivamo binomni koeficijent i prema Pascalovom originalnom trokutu zapisujemo ga kao

$$t_{mn} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}. \tag{14}$$

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Tablica 3: Suvremeni Pascalov trokut

Binomne koeficijente lakše je odrediti u suvremenom zapisu Pascalova trokuta kao $(k+1)$-vi element u $(n+1)$-vom retku, odnosno

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \quad \cdots \quad (n-k+1)}{k!}.$$

Pascal daje primjer povezanosti binomnih koeficijenata s aritmetičkim trokutom, odnosno daje binomnu formulu:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} t_{k-i,i}a^{k-i}b^i \tag{15}$$

Što je u današnjem zapisu:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{16}$$

Nadalje, Pascal definira kombinacije od k elemenata u skupu od n elemenata, te kaže da su to svi različiti skupovi od k elemenata bez obzira na poredak. Međutim Pascal nije uveo oznake za broj kombinacija. Kasnije je postala popularna oznaka C_k^n što je zapravo $\binom{n}{k}$, koju ćemo nadalje koristiti. Pascal dokazuje četiri leme. Prve tri

$$\binom{n}{k} = 0 \quad za \quad k > n; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad i \quad \binom{n}{1} = n; \tag{17}$$

koje slijede direktno iz definicije. *Lema 18*:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{18}$$

pokazana je pomoću različitih primjera. Pascalovo razmišljanje slijedi: $n+1$ element možemo promatrati kao n elemenata plus jedan poseban element, neka je to A, i neka se $\binom{n+1}{k}$ sastoji od svih kombinacija koje ne sadrže A i onih koje sadrže A, a to je upravo ono što piše u (18).

Zatim slijedi osnovna tvrdnja o povezanosti između sume retka u aritmetičkom trokutu i broja kombinacija:

$$R_{n-k,k} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 0, 1, \quad \ldots, \quad n$$

Dokaz slijedi matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da je $R_{n-1-k,k} = \binom{n}{k}$

$$\begin{aligned} R_{n-k,k} &= R_{n-k,k-1} + t_{n-k,k} \\ &= R_{n-1-(k-1),k-1} + R_{n-1-k,k} \quad [iz \quad (2)] \\ &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\ &= \binom{n+1}{k} \quad [iz \quad (18)] \end{aligned}$$

Kako tvrdnja sigurno vrijedi za $n = 0$, dokaz je gotov. Odavde slijedi da je

$$\binom{n+1}{k} = t_{n+1-k,k}, \tag{19}$$

što je veza između broja kombinacija i Pascalovog originalnog trokuta.

Pascal je otkrio i da su nizovi u svakom retku njegovog načina zapisa aritmetičkog trokuta figurativni brojevi[5]. Još su pitagorejci promatrali glavna svojstva takvih brojeva, a najpoznatiji figurativni brojevi su trokutni. Pascalov najvažniji doprinos su najvećim djelom njegovi dokazi, te jasan prikaz veza između figurativnih, binomnih i kombinatornih brojeva.

4.4 Dopisivanje Pascala i Fermata

Već je naglašeno da je za kombinatornu teoriju vjerojatnosti dopisivanje Pascala i Fermata jedan od najvažnijih događaja. Prije nego razmotrimo problem raspodjele uloga, pozabavimo se dvama jednostavnijim primjerima igara s kockom. Pascal je u pismu, 29. srpnja 1654., Fermatu pisao o de Méréovom najjednostavnijem problemu, a to je isplatili se kladiti da će u 24 bacanja dvije kocke pasti dupla šestica. Pismo je glasilo:

> Ukoliko osoba želi dobiti šest s jednom kockicom, šansa njezinog dobivanja u četiri bacanja je 671 : 625. Ukoliko osoba želi baciti dvostruku šesticu s dvije kockice, postoji nedostatak šanse za dobivanje iste u 24 bacanja. Štoviše 24 prema 36 (što je broj strana na 2 kockice) je isto što i 4 prema 6 (što je broj strana na jednoj kocki). [2]

Pascal nije imao vremena Fermatu pisati rješenje, te je smatrao da će ga Fermat sam lako otkriti. Cardano je već dao rješenje problema ranije. Potrebno je pronaći najmanji broj pokušaja n takav da je

$$\frac{1-q^n}{q^n} \geqslant 1 \quad ili \quad q^n \leqslant \frac{1}{2}.$$

Dakle, za $p = \frac{1}{6}$ dobivamo da je $n = 4$ jer je $q^4 = (\frac{5}{6})^4 \leqslant \frac{1}{2}$, a šanse su kako Pascal navodi 671 : 625. Za $p = \frac{1}{36}$, n treba biti 25 i približne šanse su 506 : 494, dok šanse za $n = 24$ iznose 491 : 509.

Drugim riječima, vjerojatnost da će u jednom bacanju pasti dupla šestica je $\frac{1}{36} \approx 2.78\%$, prema tome vjerojatnost da u jednom bacanju neće pasti dupla šestica jednaka je $q = \frac{35}{36} \approx 97.22\%$. Kako je svako bacanje nezavisno od prethodnog,

[5] Prirodni brojevi koji se mogu prikazati slaganjem kamenčića u geometrijske likove

vjerojatnost da neće pasti dupla šestica u 24 bacanja treba 24 puta pomnožiti sa samom sobom odnosno $P = q^{24} \approx 0.5086 \approx 50.86\%$. Znamo da u 24 bacanja ili će barem jednom pasti ili neće niti jednom pasti dupla šestica. Stoga vjerojatnost da u 24 bacanja barem jednom padne dupla šestica iznosi $1 - P \approx 0.4914 \approx 49.14\%$, odakle slijedi da se ne isplati kladiti da će u 24 bacanja para kockica barem jednom pasti dupla šestica. Međutim, isplatilo bi se kladiti da će dupla šestica pasti u 25 bacanja, s vjerojatnošću približno 50.55%.

Pascal je u jednom od svojih djela o korištenju aritmetičkog trokuta riješio problem raspodjele uloga, prvo pomoću rekurzije za očekivanje, a zatim pomoću aritmetičkog trokuta, te uvijek pretpostavlja da oba igrača imaju jednaku šansu za pobjedu u svakoj pojedinoj igri. Izlaganje rješenja Pascal započinje s dva aksioma za raspodjelu. Prvi aksiom kaže da ako igrač dobije određenu sumu, kakav god ishod igre bio ta suma mu treba biti dodijeljena. Drugi aksiom kaže da ukoliko pobjednik osvaja ukupan ulog s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ i igra nije do kraja odigrana, tada ulog treba jednako podijeliti između igrača. Drugim riječima, ukoliko je ukupan ulog t, tada vrijednost igre ili igračevo očekivanje iznosi $\frac{t}{2}$. Iz ovih aksioma, Pascal je dokazao sljedeći korolar:

Korolar 1. *Ako igrač dobiva iznos s ukoliko gubi, a iznos $s + t$ ukoliko pobjeđuje i ako igra nije do kraja odigrana, tada treba dobiti iznos $s + \frac{t}{2}$.*

Dokaz je proveo pomoću ranije navedenih aksioma. Dakle, prvi aksiom kaže da igrač treba dobiti iznos s koji mu pripada neovisno o ishodu igre, dok prema aksiomu dva treba dobiti i $\frac{t}{2}$. U *Korolaru 2*, Pascal navodi da se isti rezultat može dobiti zbrajanjem dvije veličine i dijeljenjem zbroja s 2. Kasnije ćemo vidjeti da ovim korolarima Pascal izvodi igračevo očekivanje u slučaju kada dva ishoda igre odgovaraju različitim nagradama, koje trebaju biti ograničene ukupnim ulogom i nulom, kao u drugom aksiomu.

Pascal objašnjava da pravilo raspodjele uloga treba ovisiti samo o broju bodova koji nedostaju svakom od igrača do pobjede. Označimo s $e(a, b)$ udio igrača A u ukupnom ulogu, tj. očekivanje za igrača A, ukoliko je igra prekinuta u trenutku kada igraču A nedostaje a bodova, a igraču B b bodova za pobjedu u igri. U početku Pascal u primjerima razmatra ukupan ulog 8, koji kasnije mijenja u 1 što znači da je očekivanje jednako vjerojatnosti da A pobijedi.

Pascalovi rezultati podijeljeni s 8 prikazani su u *Tablici 4*. U prva dva retka rezultat je očit. Od trećeg retka pa nadalje, Pascal razmatra dva moguća ishoda idućeg poteza, A igrač ili pobjeđuje ili gubi. Za svaki od ovih slučajeva očekivanje je poznato iz prethodnih izračuna. Konačno očekivanje računa se prema *Korolaru 2.*

Nadalje, Pascal zaključuje kako se ova metoda može koristiti općenito, te je vidljivo

		a	b	$e(a-1,b)$ $e(a,b-1)$	$e(a,b)$
(1)		0	$n>0$		1
(2)		n	n		$\frac{1}{2}$
(3)		1	2		
	(3a) A pobjeđuje	0	2	1	$\frac{3}{4}$
	(3b) A gubi	1	1	$\frac{1}{2}$	
(4)		1	3		
	(4a) A pobjeđuje	0	3	1	$\frac{7}{8}$
	(4b) A gubi	1	2	$\frac{3}{4}$	
(5)		1	4		
	(5a) A pobjeđuje	0	4	1	$\frac{15}{16}$
	(5b) A gubi	1	3	$\frac{7}{8}$	
(6)		2	3		
	(6a) A pobjeđuje	1	3	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{16}$
	(6b) A gubi	2	2	$\frac{1}{2}$	

Tablica 4: Pascalov rekurzivni izračun očekivanja

da koristi argument koji odgovara formuli

$$EX = \frac{\{E(X|A) + E(X|\overline{A})\}}{2}. \tag{20}$$

Pascalov postupak mogli bismo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &e(0,n) = 1 \quad i \quad e(n,n) = \frac{1}{2}, \quad n = 1,2,\dots, \\ &e(a,b) = \frac{1}{2}[e(a-1,b) + e(a,b-1)], \quad a,b = 1,2,\dots. \end{aligned} \tag{21}$$

Vidimo da je Pascalov rezultat s tablicom pomalo nezgrapan, to je vjerojatno i razlog zbog kojeg je i sam Pascal odučio potražiti bolji način. Pronašao ga je uspoređujući rekurzivnu formulu za očekivanje s brojevima u aritmetičkom trokutu, shvatio je da ih ne razlikuje ništa osim faktora $\frac{1}{2}$ i graničnih uvjeta, te predlaže rješenje čiji detalji se nalazi u [2].

Pascalovi su radovi čisto matematički, nije pokušao dati njihovu kombinatornu interpretaciju iako spominje da pravilo za raspodjelu može biti dano kombinatornim metodama. O toj temi raspravljao je s Fermatom u pismima.

U pismu 24. kolovoza 1654. Pascal detaljno opisuje Fermatov postupak. Fermat kaže da ukoliko igraču A nedostaje a bodova za pobjedu, a igraču B, b bodova za pobjedu tada će igra biti završena u najviše $a+b-1$ krugova, tada postoji 2^{a+b-1} jednako mogućih ishoda i svi ishodi koji su povoljni za igrača A daju njegov udio pri raspodjeli uloga. Uzmimo za primjer neka igraču A nedostaju 2 boda, a igraču B 3 boda za pobjedu. Neka slovo A označava pobjedu igrača A, a B pobjedu igrača B. Promotrimo svih 16 kombinacija od 4 kruga igre: $AAAA$, $AAAB$, $AABA$, $ABAA$, $BAAA$, $AABB$, $ABBA$, $BBAA$, $ABAB$, $BABA$, $BAAB$, $ABBB$, $BABB$, $BBAB$, $BBBA$, $BBBB$. U svakoj od kombinacija u kojoj se nalazi barem dva A, igrač A pobjeđuje, dok za one koje imaju barem tri B igrač B pobjeđuje. Vidimo da ima 11 povoljnih slučajeva za igrača A i 5 povoljnih slučajeva za igrača B odakle slijedi da ulog treba raspodijeliti u omjeru 11 : 5.

Kako se radi o kombinacijama, korištenjem Pascalova trokuta izbjeći ćemo ispisivanje svih mogućih kombinacija. Dakle, u navedenom primjeru potrebno je pogledati četvrti red Pascalova trokuta koji je jednak 1, 4, 6, 4, 1. U tom su redu redom nabrojani brojevi kombinacija u kojima igrač A pobjeđuje 4, 3, 2, 1 i 0 puta, odnosno igrač B pobjeđuje 0, 1, 2, 3, 4 puta. Igraču A potrebno je 2 kruga za pobjedu, stoga su za njega povoljna prva tri slučaja pa zbrajamo $1+4+6=11$. Za igrača B su povoljna preostala dva slučaja, dakle $4+1=5$, odakle slijedi da omjer pravilne razdiobe uloga iznosi 11 : 5.

Na taj način se došlo do onoga što danas nazivamo binomna razdioba. Ona opisuje vjerojatnost uspjeha ukoliko pokus, koji ima samo dva moguća ishoda, ponovimo n puta. Neka je p vjerojatnost uspjeha, a $q=1-p$ vjerojatnost neuspjeha. Vjerojatnost da u n ponavljanja pokusa bude točno k uspješnih, odnosno $n-k$ neuspješnih, jednaka je k - tom članu binomnog razvoja $(p+q)^n$:

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Pascal je još pisao da je raspravljao o Fermatovom rješenju s kolegom profesorom matematike Robervalom. Roberval je imao prigovor na Fermatovu metodu jer pravilo raspodjele ovisi o igri koja vjerojatno neće biti odigrana, odnosno hipotetska je. Međutim, Pascal kaže kako je to nebitno, stvarna i hipotetska igra će uvijek dati isti rezultat za dva igrača jer su slučajevi u kojima A pobjeđuje ili gubi u stvarnoj igri isti onim slučajevima u kojima A pobjeđuje ili gubi u hipotetskoj igri. Ovo je zapravo lako vidljivo iz danog primjera. Dakle, kako u svakoj kombinaciji od četiri slova samo jedan igrač može pobijediti, pobjednik će biti jednak i u slučaju da se odigraju sve četiri igre i u slučaju da se igra prekine nakon što netko dobije pobjednički rezultat.

U svom odgovoru 25. rujna Fermat se složio s Pascalovim objašnjenjem, te dodaje dvije važne napomene kojima će uvjeriti Robervala u valjanost metode. Prva kaže da duljina hipotetske igre, produljene preko $a + b - 1$ krugova, ne utječe na raspodjelu uloga. Uzmimo na primjer da je igra s 4 runde produžena na 5 rundi, tada će se svaka od 16 kombinacija udvostručiti dodavanjem A ili B na kraj, imati ćemo 32 kombinacije, i to neće utjecati na relativan broj slučajeva u kojima A pobjeđuje. Drugu napomenu Fermat je prikazao pomoću primjera s tri igrača [2], ali radi jednostavnosti ćemo se držati ranije navedenog primjera za $a = 2$ i $b = 3$. Dakle, igrač A može pobijediti u dva, tri ili četiri kruga igre što odgovara razmještaju AA, ABA, BAA i $ABBA$, $BABA$, $BBAA$, od kojih svaki u sebi sadrži dva A i jedan A se nalazi na kraju. Za dva kruga igre imamo 2^2 jednako vjerojatnih ishoda od kojih je jedan povoljan za igrača A. Za tri kruga igre imamo 2^3 jednako vjerojatnih ishoda od kojih su dva povoljna za A, te za 4 kruga imamo tri povoljna ishoda. Očekivanje za igrača A može se odrediti izrazom

$$e(2,3) = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} = \frac{11}{16},$$

što odgovara ranije dobivenom rezultatu. Općenito za (a, b) igrač A može pobijediti u a-tom, $(a + 1)$, $\ldots$, ili $(a + b - 1)$ krugu. Broj različitih razmještaja od a pobjeda igrača A i i pobjeda igrača B, takvih da je A na posljednjem mjestu jednak je broju kombinacija $a - 1$ pobjeda igrača A i i pobjeda igrača B, prema tome slijedi

$$e(a,b) = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1+i}{a-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{a+i}. \tag{22}$$

Iako Fermat nije dao ovu posljednju formulu, napisao je:

> Pravilo je dobro i vrijedi općenito za sve slučajeve, stoga bez pribjegavanja hipotetskoj igri, stvarne kombinacije za svaki broj krugova igre daju rješenje i pokazuju ono što sam rekao na početku, da produljenje igre za određeni broj krugova nije ništa drugo nego smanjenje različitih udjela s istim nazivnikom.[2]

Obojica, Pascal i Fermat, riješili su problem raspodjele uloga kombinatornim metodama, Pascal ga je riješio i pomoću rekurzivne formule, te pokazao da je rješenje jednako kombinatornom. Metode koje su razvili koristili su Johann Bernoulli, Montmort i de Moivre kako bi riješili problem raspodjele za igrače s različitim vjerojatnostima za pobjedu u jednoj igri.

Pascalovo i Fermatovo dopisivanje je nastavljeno 1656. kada je Pascal postavio

Fermatu problem koji je danas poznat kao "problem kockareve propasti". Carcavi je taj problem proslijedio Huygensu, koji ga je u svoju raspravu uvrstio kao peti problem.

5 Christiaan Huygens i prvo djelo o teoriji vjerojatnosti

Christiaan Huygens (1629. - 1695.) rođen je u bogatoj nizozemskoj obitelji čiji članovi su imali visoke pozicije u civilnim i diplomatskim službama Nizozemske. Christiaan i njegova braća imali su opsežnu privatnu edukaciju. Christiaan je u to vrijeme učio geometriju, pravljenje mehaničkih modela, te je naučio svirati lutnju. Descartes je ostavio snažan utjecaj na Christiaana. Studirao je matematiku i pravo na fakultetu Orange u Berdi. Na njega su utjecali njegov profesor matematike Van Schooten i Mersenne s kojim se u to vrijeme počeo dopisivati. Do 1666. Christiaan je uglavnom živio u obiteljskom domu uz očevu financijsku potporu. Huygens nije imao previše zanimljiv niti buran život, međutim njegovi doprinosi znanosti su vrlo značajni. Bavio se geometrijom, fizikom, optikom, izumio je sat s njihalom, poboljšao teleskop pomoću kojeg je riješio mnoge astronomske probleme, pod njegovim nadzorom izrađen je i prvi džepni sat s regulirajućom oprugom, te je postao najistaknutiji znanstvenik svog vremena u Europi. Bio je toliko značajan da mu je francuski kralj Louis XIV 1666. dao mirovinu uz uvjet da se preseli u Pariz, što je Huygens prihvatio. Ondje je ostao do 1681. kada se zbog bolesti odlučio vratiti u Nizozemsku. Nije se više vraćao u Pariz zbog sve veće netolerancije katolika prema protestantima, a posljednje godine života proveo je u rodnom Den Haagu.

Huygensovo glavno djelo je *Horologium oscillatorum (The Pendulum Clock)* objavljeno je 1673. Drugo glavno djelo u kojem piše o teoriji svjetlosnih valova je objavljeno 1690. kao *Traité de la lumière.* Naslijedio je Descartesove ideje o mehanici, te je promatrao svjetlost kao efekt valova u eteru koji se sastoji od jako malih čestica, odakle je izveo zakone refleksije i refrakcije. Huygens je nerado objavljivao svoje radove i mnoge su njegove knjige tiskane mnogo godina nakon što su napisane. Njegovi prikupljeni radovi s bilješkama i komentarima objavljeni su u 22 sveska od strane nizozemske znanstvene zajednice. U matematici Huygensov rad je važan za matematičku analizu, diferencijalni račun, diferencijalnu geometriju, te teoriju vjerojatnosti.

Tijekom posjeta Parizu u jesen 1655. Huygens se počeo zanimati za pitanja vjerojatnosti. U proljeće iduće godine je, na temelju Pascalovih i Fermatovih rezultata, napisao malu raspravu od 16 stranica naslova *De ratiociniis in ludo aleae (On Reasoning in Games of Chance).* Na latinski ju je preveo i 1657. objavio Van Schooten na kraju svoje knjige *Exercitationum Mathematicarum.* Ova rasprava prvo je objavljeno djelo o teoriji vjerojatnosti, koje je odmah prepoznato i bilo je norma za teoriju vjerojatnosti idućih 50 godina. Ovo je iznenađujuće jer je Pascalova rasprava iz 1665. opsežnija od Huygensove. Moguć razlog tomu je to što je Huygensova rasprava bila dostupna na latinskom, te je bila sadržana u naširoko poznatom Van Schootenovom djelu.

5.1 *De ratiociniis in ludo aleae*

Ovo Huygensovo djelo sadrži 14 propozicija, a na kraju se nalazi pet problema. Za prva tri je dao rješenje, a dokazi su ostavljeni čitaocu. Iz aksioma za vrijednost pravedne igre Huygens izvodi tri teorema o očekivanju i te teoreme koristi za rješavanje 11 drugih problema.

Propozicija 1. *Ako imam jednake šanse dobiti a ili b, očekivanje iznosi $\frac{a+b}{2}$.*

Propozicija 2. *Ako imam jednake šanse dobiti a, b ili c, očekivanje iznosi $\frac{a+b+c}{3}$.*

Propozicija 3. *Neka broj šansi za dobivanje a iznosi p, a broj šansi za dobivanje b iznosi q. Pod pretpostavkom da su šanse jednake, očekivanje će tada biti $\frac{pa+qb}{p+q}$.*

Danas ovo smatramo definicijom matematičkog očekivanja, međutim Huygens je smatrao da treba dati dokaz. Kako bi dokazao *Propoziciju 1* uvodi lutriju s dva igrača koji se dogovore da će svaki uložiti x i pobjednik treba dati gubitniku iznos a, tako da pobjedniku ostane $2x - a$. Postavljanjem $b = 2x - a$ lutrija postaje ekvivalentna danoj igri i vrijedi $x = \frac{a+b}{2}$. Dokaz *Propozicije 2* slijedi analogno. Huygens tvrdi da ovu tvrdnju možemo proširiti na bilo koji broj igrača tako da vrijednost igre s konačnim brojem jednakih šansi bude jednak aritmetičkoj sredini nagrade. Za dokaz *Propozicije 3* o težinskoj sredini Huygens kaže da promatra lutriju s $p + q$ igrača uključujući i sebe, te svaki igrač daje ulog x. Zatim se s q igrača dogovorim da mi svaki treba dati iznos b ukoliko on pobijedi, a ja ću mu dati iznos b ukoliko ja pobijedim. Nadalje s $p-1$ igrača se dogovorim da mi svaki od njih treba dati iznos a ukoliko on pobijedi, a ja ću njemu dati iznos a ukoliko ja pobijedim. Odatle slijedi da imam očekivanje $p+q$ za osvojiti iznos $(p+q)x-qb-(p-1)a$, te imam očekivanje q za iznos b i očekivanje $p-1$ za iznos a. Ako je $(p+q)x-qb-(p-1)a = a$ tada slijedi $x = \frac{pa+qb}{p+q}$.

Huygens je kao aksiom za vrijednost pravedne igre uzeo tvrdnju da je svaki igrač u pravednoj igri voljan riskirati samo pravedan izračunati udio i nije spreman riskirati više od toga. Međutim, gledajući povijest kockanja i današnje stanje s kockanjem, nije baš sigurno da je njegov definirani pravedan udio najviše što bi neka osoba željela riskirati kako bi sudjelovala u igri. Uspješno poslovanje državnih lutrija i privatnih kockarnica govori nam upravo suprotno.

Prvih devet problema Huygens rješava rekurzivnom metodom, koristeći se prethodno navedenim propozicijama. Probleme promatra samo numerički, te je vidljivo da je njegova metoda ista kao Pascalova. U *Propozicijama 4-7* Huygens razmatra problem pravedne raspodjele uloga.

Propozicija 4. *Pretpostavimo da igram igru protiv drugog igrača i za pobjedu je potrebno pobijediti u tri kruga, te sam ja već pobijedio u dva kruga, a on je pobijedio u jednom. Želim znati koliki je moj udio u ulogu u slučaju da odlučimo prekinuti igru u ovom trenutku i podijeliti ulog pravedno među nama.*

Vidimo da je ovo zapravo problem raspodjele uloga za $(a, b) = (1, 2)$. *Propozicije 5-7* odgovaraju problemima za $(a, b) = (1, 3), (2, 3), (2, 4)$ i riješeni su na isti način. Huygens rješava ove probleme koristeći *Propoziciju 1* i rekurziju (21) istu kao i Pascal, te dobiva iste rezultate kao u *Tablici 4*.

Propozicija 8. *Pretpostavimo da igru igraju tri osobe, te prvom nedostaje jedan bod za pobjedu u igri, drugom isto toliko, a trećem nedostaju dva boda.*

Propozicija 9. *Kako bismo izračunali udio za bilo koji broj igrača, od kojih svakom nedostaje dani broj bodova za pobjedu u igri, potrebno je odrediti koliki iznos će dobiti igrač, čiji udio želimo saznati, ukoliko on ili bilo koji drugi igrač pobijedi u sljedećem krugu. Zbrajanje dijelova i dijeljenje s ukupnim brojem igrača dati će nam traženi udio.*

Vidimo da u *Propoziciji 8* Huygens razmatra problem raspodjele uloga za tri igrača, dok u *Propoziciji 9* generalizira postupak za bilo koji broj igrača.

Koristeći *Propoziciju 2* rješenje *Propozicije 8* možemo zapisati kao

$$e(a, b, c) = \frac{1}{3}[e(a-1, b, c) + e(a, b-1, c) + e(a, b, c-1)]. \tag{23}$$

Huygens je načinio tablicu od 17 različitih vrijednosti za $e(a, b, c)$ za male vrijednosti (a, b, c).

Nadalje, u *Propozicijama 10 i 11* Huygens se bavi de Méréovim prvim problemom, a problemi su riješeni rekurzijom koristeći *Propoziciju 3*.

Propozicija 10. *Odredimo koliko je puta potrebno baciti jednu kocku kako bi se okrenuo broj šest.*

Huygens razmatra igru u kojoj se igrač A kladi na iznos t da će u n bacanja jedne kockice dobiti barem jednu šesticu. Neka je očekivanje igrača A jednako e_n, pa slijedi da je $e_1 = \frac{t}{6}$ i da je $e_{n+1} = \frac{1}{6}t + \frac{5}{6}e_n$. Prema tome imamo $e_2 = \frac{11t}{36}$, $e_3 = \frac{91t}{216}$, $e_4 = \frac{671t}{1296}, \ldots$. Vidimo da šanse za $n = 4$ iznose $671 : 625$, do čega su došli i Pascal i Fermat.

Propozicija 11. *Odredimo koliko je puta potrebno baciti dvije kocke kako bi se okrenula dupla šestica.*

Šanse 1 i 5 iz prethodne propozicije zamijenimo s 1 i 35, te dobivamo $e_1 = \frac{t}{36}$ i $e_2 = \frac{71t}{1296}$. Kako bi ubrzao rekurziju Huygens prelazi direktno s e_2 na e_4 prema formuli

$$e_4 = \frac{71t + 1225e_2}{1296} = \frac{178\,991t}{1\,679\,616}$$

Kako bi izveo ovu formulu promatrao je 71 i 1225 kao broj šansi za dobivanje duple šestice u dva bacanja. Nadalje je istu metodu koristio kako bi odredio e_8, e_{16} i e_{24}, te je za $n = 24$ dobio šanse nešto manje od $1 : 1$, dok za $n = 25$ dobiva šanse nešto malo veće od $1 : 1$. Huygens nije prikazao eksplicitno rješenje jednadžbe

$$e_{n+1} = pt + qe_n, \quad e_1 = pt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

za koje se lako pokaže da iznosi $e_n = (1 - q^n)t$.

Propozicija 12. *Odredimo koliko kocaka treba baciti igrač tako da se u jednom bacanju okrenu dvije šestice.*

Ovaj problem identičan je problemu određivanja broja bacanja jedne kockice tako da se "sigurno" okrenu barem dvije šestice. Pretpostavimo da igrač A koji uloži iznos t očekuje baciti barem dvije šestice u n bacanja. Iz *Propozicije 10* vidimo da ukoliko se kladi da će dobiti barem jednu šesticu u dva bacanja očekivanje iznosi $\frac{11t}{36}$, a iz *Propozicije 3* slijedi da je

$$e_{n+1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{11t}{36} + \frac{5}{6} \cdot e_n.$$

Stoga, ukoliko krenemo od $e_2 = \frac{t}{36}$, dobivamo da je $e_3 = \frac{16t}{216}$ itd. Huygens dolazi do zaključka da za $n = 10$ šansa iznosi nešto više od $1 : 1$. Očito je da Huygensovu formulu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$e_{n+1} = p(1-q^n)t + qe_n, \quad n = 2, 3, \ldots \quad . \tag{25}$$

Propozicija 13. *Pretpostavimo da jednom bacam dvije igraće kocke protiv druge osobe pod uvjetom da ako dobijem 7 ja pobjeđujem, a ako dobijem 10 ona pobjeđuje, za ostale ishode ulog trebamo podijeliti jednako. Želimo odrediti udio koji svatko od nas osvaja.*

Huygens je ovaj problem riješio ponavljajući primjenu *Propozicije 3*. Prvo je odredio šanse za sva tri ishoda, a to su redom 6, 3 i 27. Zatim zanemaruje posljednji ishod i određuje očekivanje $\frac{6}{9} \cdot t + \frac{3}{9} \cdot 0 = \frac{2t}{3}$, pa je konačno očekivanje $\frac{9}{36}\frac{2t}{3} + \frac{27}{36}\frac{t}{2} = \frac{13t}{24}$.

Propozicija 14. *Pretpostavimo da igram igru s drugim igračem i naizmjence bacamo dvije kockice pod uvjetom da ja pobjeđujem ukoliko dobijem 7, a on pobjeđuje ukoliko dobije 6 i on je prvi na potezu. Želimo odrediti omjer moje i njegove šanse.*

Ovaj problem raspodjele uloga razlikuje se od do sada promatranog problema jer nema gornju granicu za broj pobjeda u igri, stoga do sada primjenjivana metoda nije prikladna. Huygens je stoga osmislio novu metodu koju Jacob Bernoulli kasnije naziva *Huygensova analitička metoda*.

Označimo igrače s A i B. Vjerojatnost da igrač A pobijedi u jednoj igri iznosi $\frac{6}{36}$, a za B iznosi $\frac{5}{36}$. Pretpostavimo da je ukupan ulog t i očekivanje za igrača A je x, tada je očekivanje za igrača B $t - x$. Svaki puta kada je igrač B na redu očekivanje igrača A je x, ali kada je A na redu njegovo će očekivanje imati veću vrijednost, označimo je s y. Kada je B na redu iz *Propozicije 3* slijedi da očekivanje za igrača A iznosi $\frac{5}{36} \cdot 0 + \frac{31}{36} \cdot y = x$. Kada je A na redu očekivanje je $\frac{6}{36}t + \frac{30}{36}x = y$. Rješavanjem sustava za x dobivamo $x = \frac{31t}{61}$, prema tome slijedi da je omjer x i $t - x$ iznosi $31 : 30$.

Huygensova rasprava, kao što je već spomenuto, završava s pet problema koji su ostavljeni čitaocu na rješavanje. Problemi i rješenja se mogu pronaći u [2]. Navodimo samo posljednji problem:

Problem 5 (Problem kockareve propasti)**.** *Igrači A i B igraju igru s tri kocke i svaki od njih na početku ima 12 bodova. Igraju pod uvjetom da ako zbroj na kockicama bude 11, igrač A daje bod igraču B, a ako zbroj bude 14 igrač B daje bod igraču A, a igra završava kada jedan igrač drugome uzme sve bodove i on je pobjednik igre. Otkriveno je da je ovdje broj šansi igrača A prema šansama igrača B jednak 244 140 625 : 282 429 536 481.*

Pascalova verzija ovog problema bila je da igrači započinju s rezultatom $(0, 0)$, a pobjednik je onaj koji prvi skupi 12 bodova. Ovakav oblik je i Huygens koristio u svom dokazu.

Huygensovih pet problema postali su izazov matematičarima tog doba i o njihovim rješenjima, interpretacijama i generalizacijama raspravljao je i sam Huygens, ali i Hudde, Spinoza, Bernoulli, Montmort, de Moivre i Struyck.

6 Jacob Bernoulli i teorijska diskusija vjerojatnosti

U određenim tipovima igara rani kockari uspijevali su pronaći načine za brojenje uspjeha i neuspjeha te na taj način odrediti očekivanje ili vjerojatnost a priori. Međutim, u realističnim situacijama teško je bilo izmjeriti rizik, te odrediti koliko je razuman čovjek spreman riskirati. Kako uopće odrediti što je razumno? Jacob Bernoulli proučavao je ovu temu preko 20 godina, želio je izmjeriti rizik u situacijama u kojima nije moguće prebrojiti sve moguće ishode, te je iz tog razloga predložio uvođenje vjerojatnosti a posteriori.

Među članovima obitelji Bernoulli u Baselu bilo je mnogo uglednih trgovaca, političara, umjetnika, pravnika i znanstvenika. Četvorica, Jacob, John, Nicholas i Daniel pridonijeli su razvoju teorije vjerojatnosti.

Jakob (James, Jacques) Bernoulli (1654. - 1705.) studirao je filozofiju i teologiju u Baselu, a u isto vrijeme i matematiku i astronomiju. Četiri je godine proveo putujući kao instruktor i učenjak po Švicarskoj i Francuskoj. Moguće je da se tijekom posjeta Parizu zainteresirao za teoriju vjerojatnosti. U to vrijeme prošlo je samo 13 godina od objave Pascalove rasprave, a Huygens je još bio član Znanstvene akademije. U Baselu je prvo počeo proučavati eksperimentalnu fiziku, a potom je postao profesor matematike na sveučilištu u Baselu. Bio je izvrstan učitelj, te je imao brojne studente među kojima su bili njegov mlađi brat Johann i nećak Nicholas.

Jakob Bernoulli dao je važne doprinose teoriji diferencijalnih jednadžbi i mehanici, varijacijskom računu, teoriji beskonačnih nizova i teoriji vjerojatnosti. Njegov najveći doprinos teoriji vjerojatnosti je djelo *Ars Conjectandi*. To je prva teorijska diskusija vjerojatnosti kao broja između 0 i 1.

6.1 *Ars Conjectandi*

Počeci Bernoullijevog rada na vjerojatnosti mogu se pronaći u njegovim *Meditationes* [6] između 1684. i 1690. Rad je započeo rješavanjem Huygensovih problema, zatim nastavlja s napomenama i primjerima mogućnosti korištenja vjerojatnosti na probleme koji nisu vezani s igrama na sreću, te naposljetku razmatra konvergenciju binomno distribuiranih relativnih frekvencija i daje poznati teorem. Nakon 1690. nema zapisa u *Meditationes* jer je vjerojatno bio zaokupljen matematičkim radom, a put od bilješki do rukopisa *Ars Conjectandi* bio je dug. Iz dopisivanja s Leibnizom poznato je da je Bernoulli radio na tom djelu posljednje dvije godine svog života i nije ga dovršio. Beronulli je umro 1705. i njegov rukopis je bio pri kraju, ali nije objavljen sve do 1713. zbog nesuglasica u obitelji. Više o tome [2].

Ars Conjectandi sastoji se od četiri dijela:

1. Huygensova rasprava *De Ratiociniis in Ludo Aleae* s bilješkama Jacoba Bernoullija

2. Doktrina o permutacijama i kombinacijama

3. Primjena doktrine o predviđanjima na različitim igrama na sreću i igrama s kockom

4. Primjena doktrine i predviđanja na građanske, moralne i ekonomske poslove.

Sadrži još i dodatak naslovljen *Pismo prijatelju o bodovima u igri tenis.* U prva tri dijela Bernoulli generalizira doktrinu o šansama koju su razvili Pascal i Huygens. U slučaju nezavisnosti zagovara pravilo množenja, izvodi binomnu distribuciju, pronalazi vjerojatnost za pobjedu u igri s beskonačno mnogo ponavljanja kao sumu beskonačnog niza. Naposljetku, pokazuje moć svoje metode rješavajući 24 problema iz popularnih igara na sreću. Djelo sadrži formulirane teoreme s razrađenim apstraktnim dokazima i numeričkim primjerima. Četvrti dio knjige sadrži 30 stranica i ujedno je najvažniji.

U prvom djelu *Ars Conjectandi* Bernoulli poboljšava i nadopunjuje Huygensove zaključke, zamjenjuje Huygensove numeričke rezultate formulama, te generalizira probleme i daje bolje metode za njihovo rješavanje. Njegov komentar je 4 puta dulji od same rasprave, a slijede neki od rezultata.

Bernoulli je razmatrao ponavljanje igre na sreću, te naglašava da je vjerojatnost pobjede u jednoj igri konstanta i da je neovisna o ishodu prethodne igre. Danas

[6] Bernoullijev dnevnik

se iz tog razloga ponavljajući pokus koji za svako ponavljanje ima samo dva moguća ishoda (uspjeh ili neuspjeh), te je vjerojatnost tih ishoda jednaka u svakom ponavljanju, naziva *Bernoullijev pokus.*

Nadalje, Bernoulli daje novi dokaz za Huygensovu *Propoziciju 3.* Pretpostavimo da se lutrija sastoji od p srećki s nagradom a i q srećki s nagradom b. Neka postoji $p+q$ igrača od kojih svaki kupi jednu srećku, tada ukupan iznos koji osvajaju iznosi $pa+qb$. Kako svaki igrač ima isto očekivanje, ono mora iznositi $\frac{pa+qb}{p+q}$. Osim toga navodi i kako je očekivanje isto što i pravilo za pronalazak prosječne cijene proizvoda dobiveno promatranjem različitih cijena nekoliko proizvođača.

U generalizaciji Huygensovih *Propozicija 10 - 12*, Bernoulli razmatra vjerojatnost postizanja m uspjeha u n ponavljanja. Pretpostavimo da je broj uspjeha x, a broj neuspjeha y, te $x+y=n$ i A pobjeđuje ako je $x \geqslant m$. Neka je očekivanje igrača B dano s $e(m,n)$ kojeg Bernoulli pronalazi pomoću rekurzije

$$e(m,n) = p \cdot e(m-1,n-1) + q \cdot e(m,n-1), \quad m = 1,2,\ldots,n-1,$$

pri čemu vrijedi $e(0,n) = 0$ i $e(n,n) = 1-p^n = (p+q)^n - p^n$. Nepotpunom indukcijom zaključuje da je

$$e(m,n) = q^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2}n + \cdots + \binom{n}{m-1}p^{m-1}q^{n-m+1}.$$

Bernoulli također napominje kako se rezultat može dobiti direktno zbrajanjem m vjerojatnosti ishoda koje promatramo. Uvedimo oznake

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x}p^xq^{n-x}, \quad n = 1,2,\ldots, \quad x = 0,1,\ldots,n, \quad 0<p<1$$

$$B(c,n,p) = b(0,n,p) + b(1,n,p) + \cdots + b(c,n,p), \quad c = 0,1,\ldots,n.$$

Iz gornje formule možemo zaključiti da se vjerojatnost da igrač B pobijedi može napisati kao

$$1 - B(n-m,n,q) = B(m-1,n,p),$$

pri čemu redom vrijedi $y \geqslant n-m+1$ i $x \leqslant m-1$.

Najvažniji doprinos prvog dijela je komentar na *Propoziciju 14* o beskonačnom broju krugova s redom bacanja BA BA BA . . . Koristeći se pravilima zbrajanja i množenja, te teorijom beskonačnih nizova daje općenitiju metodu od Huygensove. On zamišlja beskonačno mnogo uzastopnih igrača, od kojih parni igrači imaju vjerojatnost p_1 za pobjedu, a neparni igrači imaju vjerojatnost p_2. Promotrimo četvrtog igrača, kako bi on imao mogućnost pobjede igrači prije njega moraju izgubiti, a vjerojatnost da pobijedi je $q_2q_1q_2p_1$. Bernoulli daje listu vjerojatnosti pobjede za svakog igrača prema *Tablici 5*. Vjerojatnost da igrač A pobijedi je očito suma vjero-

Igračev broj	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Vjerojatnost	p_2	q_2p_1	$q_2q_1p_2$	$q_2^2q_1p_1$	$q_2^2q_1^2p_2$	$q_2^3q_1^2p_1$	$\cdots$
Igrač	B	A	B	A	B	A	$\cdots$

Tablica 5: Lista vjerojatnosti za *Propoziciju 14*

jatnosti parno označenih igrača, analogno vjerojatnost igrača B je suma vjerojatnosti neparno označenih igrača. Zbrajanjem dvaju geometrijskih nizova Bernoulli dobiva

$$P_A = p_1q_2[1 + q_1q_2 + (q_1q_2)^2 + \cdots] = \frac{p_1q_2}{1 - q_1q_2}$$
$$P_B = p_2[1 + q_1q_2 + (q_1q_2)^2 + \cdots] = \frac{p_2}{1 - q_1q_2}$$

Drugi dio *Ars Conjectandi* sastoji se od devet poglavlja u kojima se Bernoulli bavi raznim zakonima permutacija i kombinacija jer je smatrao da pogreška u pronalaženju prave vjerojatnosti događaja leži u nepotpunoj numeraciji svih mogućih ishoda. Bernoulli je prvi koji metodom indukcije dokazuje da broj permutacija od n elemenata iznosi $n!$. Dao je generalizaciju Pascalovih ideja o raspodjeli uloga u ranije prekinutoj igri u slučajevima gdje šanse za pobjedu igrača nisu jednake i općenitije u slučajevima gdje vjerojatnost uspjeha i neuspjeha nisu jednake. Beronulli je pokazao da ako je vjerojatnosti uspjeha a, a neuspjeha b od $a+b$ pokušaja, tada je vjerojatnost r uspjeha u n pokušaja jednaka omjeru $\binom{n}{n-r}a^rb^{n-r} : (a+b)^n$. Slično, vjerojatnost barem r uspjeha u n pokušaja jednaka je omjeru $\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j : (a+b)^n$. Tu se pojavljuju i Bernoullijevi brojevi: to su brojevi oblika B_n, gdje je $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_n = 0$ ako je n neparan i veći od 1, $B_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k$. Dao je još mnoge druge kombinatorne rezultate čiji se detalji mogu pronaći u [2].

Treći dio djela sastoji se u primjeni prethodnih rezultata na 24 riješena primjera igara na sreću, kako izmišljenih tako i onih stvarnih iz Bernoullijevog vremena. Problemi se mogu pronaći u [2]. U ovom djelu Bernoulli također zapaža kako postoje dva tipa vjerojatnosti: objektivna i subjektivna kako smo naveli u poglavlju 2.1. Poprilično je zbunjujuće kako se ista riječ, vjerojatnost, koristi za dva tako različita koncepta, a među znanstvenicima i filozofima stoljećima se raspravljalo o tome koja je ispravna definicija vjerojatnosti.

Četvrti dio govori o novim fundamentalnim problemima teorije vjerojatnosti i njezinoj primjeni. Umjesto starog koncepta vjerojatnosti baziranom na simetriji, Bernoulli uvodi novi koncept vjerojatnosti definiran kao *stupanj pouzdanosti*, odnosno mjera znanja o istinitosti neke tvrdnje. Na ovaj način vjerojatnost se odnosi na tvrdnju, a ne na događaj i iz tog je razloga ovaj Bernoullijev pothvat revolucionaran. Bernoulliju se činilo očitim da što je više opažanja napravljeno za danu situaciju, lakše je predvidjeti buduće događaje. Međutim, želio je dati znanstveni dokaz ovog principa, te naposljetku pronalazi dokaz za svoj *zakon velikih brojeva.* To je prvi granični teorem u teoriji vjerojatnosti i vrlo je važan za statističku procjenu.

Osim definicije vjerojatnosti, Bernoulli uvodi definiciju slučajnosti, te kaže da ona ovisi o našem znanju. To ilustrira pomoću tri primjera: predviđanje ishoda pri bacanju kockice, predviđanje sutrašnjih vremenskih prilika, predviđanje pomrčine. On kaže da ukoliko možemo izmjeriti početne uvjete i poznajemo fizikalne zakone tada možemo odrediti predviđanje za prva dva primjera jednako točno kao i za treći.

Nadalje uvodi pojam *moralne sigurnosti*, te kaže da je događaj moralno siguran ako ima vjerojatnost veću ili jednaku 0.999, dok za događaj koji ima vjerojatnost manju ili jednaku 0.001 kaže da je moralno nemoguć.

6.2 Bernoullijev teorem i njegova formulacija

Razmatranjem relativne frekvencije nekog događaja, koja se računa iz ponavljanja događaja pod istim okolnostima, Bernoulli navodi kao osnovnu empirijsku činjenicu da "što više opažanja napravimo to je manja opasnost odstupanja od istine". Postavio je vrlo važno pitanje: Postoji li teorijski ekvivalent za navedenu empirijsku činjenicu? Ukoliko postoji, tada možemo sigurno primijeniti računanje vjerojatnosti na područja u kojima postoje stabilne relativne frekvencije.

Kako bismo bolje razumjeli diskusiju o teoremu trebamo imati na umu Bernoullijev primjer. Pretpostavimo da se u urni nalazi 3000 bijelih i 2000 crnih oblutaka, međutim promatraču je taj broj nepoznat. On želi saznati omjer crnih i bijelih oblutaka tako da izvuče određeni broj oblutaka i zabilježi ishod izvlačenja, te u svakom koraku vraća izvučeni oblutak natrag u urnu prije ponavljanja pokusa. Dakle, promatrani događaj je izvlačenje jednog oblutka i uspjeh je ukoliko je oblutak bijeli. Pretpostavimo da imamo N opažanja, odnosno ponavljanja pokusa, te da je njih X uspješno i vjerojatnost uspjeha je p.

U današnjim terminima, teorem formuliramo na sljedeći način. Neka je N broj nezavisnih ponavljanja pokusa, X broj uspjeha s vjerojatnošću p u svakom ponavljanju, te neka je $h_N = \frac{X}{N}$ relativna frekvencija. Zanima nas vjerojatnost događaja $\{|h_N - p| \leqslant \varepsilon\}$, a može se pokazati da vrijedi

$$P\{|h_N - p| \leqslant \varepsilon\} > 1 - \delta$$

za $N > N(p, \varepsilon, \delta)$ gdje su ε i δ dani mali pozitivni brojevi. Može se reći i da h_N konvergira prema stvarnoj vjerojatnosti p ukoliko $N \to \infty$.

U svom dokazu Bernoulli razmatra pokus s $t = r + s$ jednako vjerojatnih ishoda, od kojih je njih r povoljnih, pa vrijedi $p = \frac{r}{r+s}$. On pokazuje da h_N konvergira prema vjerojatnosti p, odnosno u njegovim terminima rečeno, možemo biti moralno sigurni da h_N ne odstupa previše od p ukoliko je N dovoljno velik. Nadalje koristi relativnu frekvenciju kao procjenitelj za p.

Bernoullijeva originalna formulacija teorema je sljedeća: "Mora biti pokazano da se može napraviti toliko ponavljanja pokusa tako da bude c puta više vjerojatno nego nevjerojatno da omjer broja povoljnih ishoda prema ukupnom broju ponavljanja ne bude niti veći od $\frac{r+1}{t}$ niti manji od $\frac{r-1}{t}$." Tu jednakost možemo zapisati

$$\frac{r-1}{t} \leqslant h_N \leqslant \frac{r+1}{t}$$

što se može zapisati i kao $|h_N - p| \leqslant \frac{1}{t}$. Primijetimo da je za Bernoullija $\varepsilon = \frac{1}{t}$, a $\delta = \frac{1}{c+1}$. Prema tome slijedi zapis teorema.

Teorem 1 (Bernoullijev teorem). *Neka su r i s dva pozitivna cijela broja, neka je $p = \frac{r}{r+s}$ i $t = r + s$. Tada za bilo koji pozitivan realan broj c vrijedi*

$$P\left\{|h_N - p| \leqslant \frac{1}{t}\right\} > \frac{c}{c+1}. \tag{26}$$

Tada za $N(c)$ možemo uzeti bilo koji broj koji je veći od većeg od brojeva

$$mt + \frac{st(m-1)}{r+1} \quad i \quad nt + \frac{rt(n-1)}{s+1},$$

gdje su m, n prirodni brojevi za koje vrijedi

$$m \geqslant \frac{\ln c(s-1)}{\ln\left(\frac{r+1}{r}\right)} \quad i \quad n \geqslant \frac{\ln c(r-1)}{\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)}.$$

U svom primjeru Bernoulli je izračunao da je za $r = 30$ i $s = 20$ drugi izraz veći, stoga $N = 25\,500$ za $c = 1000$. Na taj način odredio je da je potrebno 25 550 ponavljanja pokusa kako bi bilo barem 1000 puta vjerojatnije da se h_N nalazi unutar intervala $\left[\frac{29}{50}, \frac{31}{50}\right]$, nego izvan njega.

Bernoullijev rad završava s još nekoliko različitih vrijednosti za c, vjerojatno jer je bio nezadovoljan rezultatom. Za rano 18. st. 25 550 je bio ogroman broj, veći od cijele populacije Basela u to vrijeme. Stoga mu se možda činilo da je njegov zadatak pronalaženja stupnja sigurnosti promašaj jer ne može ništa korisno dobiti pomoću razumnog broja promatranja. Međutim, Bernoulli je krenuo u pravom smjeru i to je njegovog mlađeg suvremenika Abrahama de Moivrea dovelo do uspjeha u rješavanju problema.

7 Abraham de Moivre

Abraham de Moivre (1667. - 1754.) rođen je u protestantskoj obitelji u Vitryu, Francuska. Otac mu je bio kirurg i nisu pripadali francuskom plemstvu. Moivre je studirao humanizam na fakultetu Sedan i Samir, te se samostalno bavio matematikom. Kada je počeo progon protestanata u Francuskoj, osamnaestogodišnji Moivre bio je u internatu kako bi ga se navelo na promjenu religije. Nakon tri godine je pušten i odmah je otputovao potražiti azil u Englesku. Ondje je postao privatni učitelj matematike sinovima bogatih građana. Prema nekim izvorima za život je zarađivao i dajući savjete kockarima i prodavačima osiguranja. Preko Halleya, kojeg je poznavao od 1692., upoznao se s krugom znanstvenika koji su bili okupljeni oko Newtona, a 1697. ušao je u *Royal Socisty.* Poslije je izabran za člana komisije koja je trebala riješiti sukob Leibniza i Newtona oko prvenstva u otkrivanju infinitezimalnog računa. *Royal Society* ga je imenovao na to mjesto upravo zbog prijateljstva s Newtonom. Zanimljivo da je imenovan kao član tog uglednog društva, a da nije bio zaposlen na nekom od sveučilišta. De Moivre se nadao da će se uspjeti zaposliti kao profesor matematike, međutim u Engleskoj je bio diskrimininiran zbog svog francuskog porijekla. Čak ni njegovi utjecajni prijatelji nisu mu mogli pomoći, pa je stoga cijeli život bio siromašan i nije imao stalni posao. De Moivre je bio poprilično star kada je započeo svoja matematička istraživanja, a otprilike u 41. godini života počeo je svoj rad na teoriji vjerojatnosti. Međutim, ipak je uspio postati vodeći znanstvenik tog područja od 1718. pa sve do smrti. Nikada se nije oženio, a zanimljiva je anegdota da je predvidio dan svoje smrti. Naime, utvrdio je da svaki dan spava po 15 minuta dulje, sumacijom odgovarajućeg aritmetičkog niza izračunao je da će umrijeti na dan kada prespava puna 24 sata i bio je u pravu.

De Moivre je objavio u *Phil. Trans.*-u ukupno 15 članaka između 1695. i 1746., a dva njegova članka bave se teorijom vjerojatnosti, jedan od njih pod nazivom *De Mensura Sortis*. Jedan članak je na temu matematike u osiguranju, a ostalo su čisto matematički članci ili primjena matematike na fizikalne i astronomske probleme. Osim navedenih članaka objavio je i nekoliko izvanrednih knjiga, a njegovi glavni doprinosi tiču se teorije vjerojatnosti. Glavno djelo mu je *Doktrina o šansama (The Doctrine of Chances)* objavljeno 1718. To je djelo znatno poboljšano u sljedećim izdanjima 1738. i 1756. godine. Izdanja pokazuju razvoj teorije vjerojatnosti kroz cijelo to razdoblje, te je svako novo izdanje proširenje prethodnog. Godine 1725. je objavio djelo *Annuities upon Lives* koje je kasnije ukomponirao u *Doktrinu o šansama*. Njegova djela sadrže mnoge originalne doprinose u teoriji vjerojatnosti i matematici u osiguranju, te su godinama bile najbolje knjige u tim područjima.

7.1 *Doctrine of Chances* i ostali doprinosi

De Moivreovo najvažnije djelo *Doktrina o šansama* sastoji se od uvoda u kojem se nalaze definicije, osnovni teoremi i tablice, popraćeni nizom numeriranih problema. Prvo izdanje knjige sadrži 53 problema vezana za vjerojatnost, drugo izdanje 75 problema vezanih za vjerojatnost i 15 problema vezanih za osiguranje, dok treće izdanje sadrži 74 problema vezana za vjerojatnost i 33 problema vezana za osiguranje.

De Moivre daje preciznu definiciju vjerojatnosti koja do tada još nije dana, a glasi: "Vjerojatnost događaja je veća ili manja, ovisno o broju slučajeva u kojima se događaj može dogoditi ili ne dogoditi." Nadalje, kaže: "Vjerojatnosti događanja i ne događanja se zbrajaju i njihova suma će uvijek biti jednaka jedinici." Kao i Bernoulli daje jasnu definiciju nezavisnih događaja i odgovarajuće pravilo za množenje vjerojatnosti. Također je eksplicitno definirao zavisne događaje i dao pravilo za njihovo množenje. Nadalje, definira očekivanje i primjećuje da je suma očekivanja jednaka očekivanju sume. Tu se nalaze i neki osnovni primjeri koji vode prema binomnoj distribuciji, te rasprava o problemu raspodjele bodova i problemu kockarove propasti.

Vrlo je važna De Moivreova numerička analiza aproksimacije sume članova binomnog izraza $(a+b)^n$ za velike n, koja se u *Doktrini o šansama* prvi puta pojavljuje pod nazivom normalna aproksimacija binomne distribucije. Tu se prvi puta u povijesti pojavljuje integral gustoće vjerojatnosti normalne distribucije i tzv. *centralni granični teorem* koji kaže da za veliki broj pokusa binomna razdioba teži prema normalnoj.

De Moivre, kao i Bernoulli, za računanje vjerojatnosti koristi se metodom računanja određenih binomnih koeficijenata. U početku se ograničio samo na jednako vjerojatne događaje i želio je pronaći vjerojatnost $\frac{n}{2}$ uspjeha u n ponavljanja pokusa, što je omjer srednjeg član izraza $(1+1)^n$ prema sumi svih članova, 2^n. Odredio je da se taj omjer, $\binom{n}{\frac{n}{2}} : 2^n$, približava $\frac{2T(n-1)^n}{n^n\sqrt{n-1}}$ kada n postane velik, pri čemu je

$$\ln T = \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} + \cdots = \frac{B_2}{1\cdot 2} + \frac{B_4}{3\cdot 4} + \frac{B_6}{5\cdot 6} + \frac{B_8}{7\cdot 8} + \cdots ,$$

gdje su B_i Bernoullijevi brojevi. De Moivreov rezultat pokazuje njegovo dobro poznavanje beskonačnih nizova i logaritama. Detaljan dokaz nalazi se u [4].

Kako je de Moivre želio mogućnost izračuna ovog omjera pokazao je, koristeći $\ln T$ i $2T$, da on iznosi otprilike $2.168 = \frac{271}{125}$, te je na sličan način odredio i da za velike n vrijedi

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln B$$
$$n! \approx B n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = B\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

gdje je $\ln B = 1 - \ln T$, a to je formula koja se danas naziva Stirlingova formula. Stirling je prvi koji je izračunao da je $B = \sqrt{2\pi}$.

Kako bi izračunao članove koji su različiti od srednjeg člana M de Moivre je generalizirao metodu. Pokazao je da ukoliko je Q član izraza $(1+1)^n$ koji je za t udaljen od srednjeg člana M tada za $m = \frac{n}{2}$ vrijedi

$$\ln \frac{M}{Q} = \left(m+t-\frac{1}{2}\right) \ln(m+t-1) + \left(m-t+\frac{1}{2}\right) \ln(m-t+1) - 2m \ln m + \ln\left(1 + \frac{t}{m}\right).$$

Aproksimirajući logaritme pomoću nizova potencija, za velike n dobiva

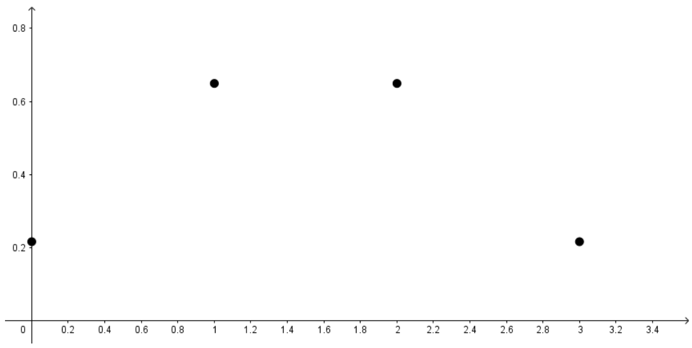
$$\ln \frac{Q}{M} \approx -\frac{2t^2}{n}$$
$$Q \approx M e^{-\frac{2t^2}{n}} = \binom{n}{m} e^{-\frac{2t^2}{n}}.$$

Modernim zapisom bismo to zapisali kao

$$P\left(X = \frac{n}{2} + t\right) \approx P\left(X = \frac{n}{2}\right) e^{-\frac{2t^2}{n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{2t^2}{n}}.$$

De Moivre je promatrao različite pojedinačne Q, te zaključio da oni formiraju krivulju koja ima dvije točke infleksije s obje strane najvećeg člana. Izračunao je da se te točke nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ od maksimalnog člana. Na taj je način de Moivre otkrio, današnju normalnu krivulju kao aproksimaciju binomne distribucije.

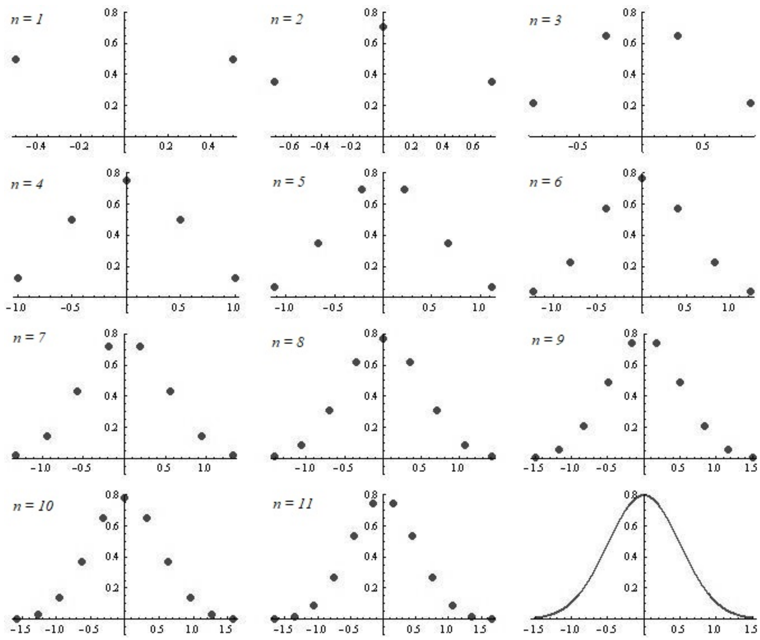
Objasnimo to i na drugi način. Kako je suma svih binomnih koeficijenata u formuli $(1+1)^n$ uvijek jednaka 2^n, dijeljenjem svih binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$ s 2^n možemo ih "normalizirati", a zbroj takvih koeficijenata biti će jednak 1. De Moivre je primijetio da ukoliko te binomne koeficijente pomnožimo s $\sqrt{n}$, te ih u obliku točaka $\left(k, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ ucrtamo u koordinatni sustav, onda dobivamo nizove točaka koji sliče istoj krivulji. Na primjer, ukoliko imamo $n = 3$, tada redom imamo binomne koeficijente: za $k = 0$ koeficijent je 1, za $k = 1$ koeficijent je 3, za $k = 2$ je 3 i za $k = 3$ je 1. Zatim koeficijente normaliziramo dijeljenjem s $2^n = 2^3 = 8$ i za $k = 0, 1, 2, 3$ redom dobivamo normalizirane koeficijente $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$. Sada ih množimo s $\sqrt{n} = \sqrt{3}$ i dobivamo da su za $k = 0$ i $k = 3$ koeficijenti $\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.216506$, dok su za $k = 1$ i $k = 2$ koeficijenti $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.649519$. Ucrtavanjem ovih koeficijenata u ovisnosti o k dobili bismo graf prikazan na *Slici 4*.



Slika 4: Binomni koeficijenti za $n = 3$, normalizirani i skalirani s $\sqrt{3}$.

Ukoliko sada sve točke pomaknemo za $\frac{n}{2}$ ulijevo, što je u opisanom primjeru $\frac{3}{2} = 1.5$, dobivamo točke koje su simetrične obzirom na os y. Dijeljenjem svih apscisa s $\sqrt{n}$ dobivamo točke s koordinatama $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$, te ćemo pri crtanju tih točaka dobiti grafove kao na *Slici 5*. Posljednji graf na toj slici je graf u obliku zvonolike krivulje. To je graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2}$, što je funkcija gustoće vjerojatnosti s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = \frac{1}{2}$. Na *Slici 5* je vidljivo da povećanjem n nizovi točaka postaju sve sličniji grafu te funkcije.

Vratimo se pojedinačnim članovima Q binomnog izraza i de Moivreovom prikazu različitih Q kao krivulje. Pomoću njih je mogao izračunati zbroj više članova korištenjem integrala i tako značajno poboljšati Bernoullijevu količinu nesigurnosti.



Slika 5: Normalna distribucija kao limes binomnih. Zadnji graf je graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$.

Njegova aproksimacija je sljedeća

$$\sum_{t=0}^{k} P\left(X = \frac{n}{2} + t\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k e^{-\frac{2t^2}{n}} dt,$$

zatim je funkciju zapisao kao niz potencija i integrirao član po član. Promatrao je konvergenciju niza za $k = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ i, modernom terminologijom rečeno, zaključio da za velike n vjerojatnost da će broj pojavljivanja simetričnog binomnog pokusa upasti unutar $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ srednje vrijednosti $\frac{1}{2}n$ iznosi 0.682688. Za različite $\sqrt{n}$ zaključio je da se povećanjem broja pokusa povećava točnost procjene vjerojatnosti kao $\sqrt{n}$.

Navedeni rezultati mogu se primijeniti samo u slučajevima dva jednako vjerojatna ishoda. De Moivre je dao neke nacrte za generalizaciju ove metode gdje je pokazao kako aproksimirati članove u izrazu $(a + b)^n$, za $a \neq b$. Ukoliko je n velik i M je najveći član binomnog razvoja, tada prvo

$$\frac{M}{(a+b)^n} \approx \frac{a+b}{\sqrt{2\pi abn}} \quad ili \quad P(X = np) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}$$

Zatim, ako je Q član koji je za t udaljen od M vrijedi

$$Q \approx Me^{-\frac{(a+b)^2}{2abn}t^2} \quad ili \quad P(X = np + t) \approx P(X = np)e^{-\frac{t^2}{2np(1-p)}}$$

U navedenim formulama druga formula je u modernom zapisu pri čemu je X binomna distribucija s n ponavljanja i vjerojatnošću $p = \frac{a}{a+b}$, a np je cijeli broj.

Ideje koje je dao de Moivre mogu se iskoristiti kako bi se pokazalo da je potrebno znatno manje ponavljanja pokusa kako bi se postigla sigurnost koju je Bernoulli zahtijevao. Na primjer, može se pokazati da u slučaju gdje je Bernoulli pokazao da je potrebno 25 550 ponavljanja, de Moivreovom metodom dobivamo da je potrebno 6 498 ponavljanja. Iako su de Moivreovi rezultati bili mnogo precizniji od Bernoullijevih, on ih nije bio u mogućnosti primijeniti, ali njegov rad je imao značajan utjecaj na daljnji razvoj teorije vjerojatnosti u 18. stoljeću.

Spomenimo još i njegovo rješenje za problem kockareve propasti: Dva igrača A i B igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos (npr. 1 novčanu jedinicu) i što jedan dobije drugi gubi. Neka je p vjerojatnost da A dobije u nekom krugu, a vjerojatnost da B dobije je q (pri čemu je $p + q = 1$). Igraju sve dok jedan od njih ne ostane bez novca. Ako A igrač na raspolaganju ima n novčanih jedinica za ulaganje, a B ima njih m, kolika je vjerojatnost da će A izgubiti sve? De Moivre je 1712. objavio rješenje za $p \neq q$, a tražena vjerojatnost je

$$p_A = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - (\frac{q}{p})^{n+m}}.$$

Dok u slučaju $p = q = \frac{1}{2}$ iznosi

$$p_A = \frac{m}{m + n}.$$

Značajna je još i de Moivreova formula

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

koja se prvi puta pojavila u takvom obliku u de Moivreovom članku iz 1722., međutim sličan je oblik formule koristio i u članku iz 1707. De Moivre je izveo ovu formulu za n prirodan broj, te ju je koristio u brojnim problemima. De Moivre je imao još mnogo vrijednih postignuća u teoriji vjerojatnosti, a dodatni detalji mogu se pronaći u [2].

Literatura

[1] F. M. BRÜCKER, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[2] A. HALD, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

[3] A. HALD, *A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 to 1935*, Department of Applied Mathematics and atatistics, Universiti of Copenhagen, 2004.

[4] V. J. KATZ, *A History of Mathematics*, Third Edition, Pearson Education, Inc., 2009.

[5] S. GLAZ, *Mathematical Ideas in Ancient Indian Poetry*, Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, USA, 2013.

[6] A. GUSK, *Igre na sreću*, Diplomski rad, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[7] M. KRAUS, *Early Greek Probability Arguments and Common Ground in Dissensus*, Philologisches Seminar, Universität Tübingen, Tübingen, 2007.

[8] C. K. RAJU, *Probability in Ancient India*, Philosophy of Statistics, Volume 7 1st Edition, (Prasanta S. Bandyopadhyay, Malcolm R. Forster), Elsevier B.V., North Holland, 2011, 1175-1195.

[9] G. SHAFER, *The Early Development of Mathematical Probability*, Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, (Ivor Grattan-Guinness), Routledge, 1994, 13-39.

[10] K. BASU, L. DEBNATH, *A Short History of Probability Theory and It's Applications*, International Journal of Mathematical Education, 2015.

[11] G. G. ROUSSAS, *Probability and Statistics througout the Centuries*, University of California, Davis, 2009.

[12] *The MacTutor History od Mathematics archive, biographies*, `https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html`

Sažetak

Ovaj rad otkriva povijest kombinatorne teorije vjerojatnosti od najranijih poznatih zapisa do sredine 18. stoljeća. Rad se dotiče povijesti od drevnih indijskih znanja o vjerojatnosti, preko koncepta vjerojatnosti u antičkoj grčkoj i srednjem vijeku, za koji se smatralo da je određen Božjom voljom, do početka određivanja šansi za pobjedu u igri u doba renesanse. Zatim slijedi začetak teorije vjerojatnosti za koju su zaslužni Pierre de Fermat, Blaise Pascal i njihovo slavno dopisivanje. Oni su postavili temelje na kojima nastavljaju graditi Christiaan Huygens i Jacob Bernoulli. Na posljetku dolazi Abraham de Moivre koji objedinjuje sve poznate rezultate i donosi svoje nove ideje koje postaju osnova teorije vjerojatnosti za buduće generacije.

Ključne riječi: Igre na sreću, šanse, subjektivna vjerojatnost, objektivna vjerojatnost, očekivanje, problem bodova, problem kockarove propasti, aritmetički trokut, Aristotel, Tartaglia, Girolamo Cardano, Galileo Galilei, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Jacob Bernoulli, Bernoullijev pokus, Bernoullijev teorem, suma binoma, binomna distribucija, normalna distribucija, integral gustoće vjerojatnosti normalne distribucije, centralni granični teorem.

Abstract

This paper reveals history of combinatorial probability theory from oldest known sources to mid 18th century. It touches the history from ancient Indian knowledge of probability, through the concept of probabilty in ancient Greek and Middle ages, which they taught was determined by the will of God, to the beginning of calculating chances for winning a game in Renaissance. Then follows beginning of probability theory for which Pierre de Fermat and Blaise Pascal are credited through their famous correspondence. They set the basis on which Christiaan Huygens and Jacob Bernoulli will continue to work. In the end comes Abraham de Moivre who brings together all probality theory knowledge and gives his own new ideas that become basis of probability theory for the future generations.

Key words: Games of chance, chance, subjective probability, objective probability, expectation, problem of points, problem of gamblers ruin, aritmetical triangle, Aristotel, Tartaglia, Girolamo Cardano, Galileo Galilei, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Jacob Bernoulli, Bernoulli's experiment, Bernoulli's theorem, binomial sum, binomial distribution, normal distribution, normal probability integral, central limit theorem.

Životopis

Rođena sam 29. svibnja 1993. u Đakovu. Pohađala sam Osnovnu školu "Ivan Goran Kovačić" Đakovo i završila ju 2008. godine. Školovanje sam nastavila u Gimnaziji A. G. Matoša Đakovo, prirodoslovno - matematički smjer, koju sam završila 2012. godine. Iste godine postala sam majka i upisala se na Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera. Od 2014. honorarno radim kao video editer za izraelsku tvrtku Veedi. Godine 2017. polagala sam Microsoft Data Science tečajeve od kojih posjedujem 9 certifikata.