Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Iva Gregurić

Bojenje grafova

Diplomski rad

Osijek, 2011.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Iva Gregurić

Bojenje grafova

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Antoaneta Klobučar

Osijek, 2011.

Sadržaj

Uvod

Grafovi su matematički objekti koje često srećemo u svakodnevnom životu. Bitna značajka je geometrijski pristup pri ispitivanju apstraktnih modela. Ako samo pogledamo kartu neke države sa naznačenim gradovima koji su povezani cestama, dobili smo jedan graf. U skupu ljudi na nekom predavanju, ako svakog čovjeka prikažemo kao točku, a samo one koji se poznaju spojimo linijom, dobili smo graf koji nam daje dobru sliku o međusobnom poznavanju ljudi na tom predavanju (takvi grafovi koriste se u sociologiji i nazivaju sociogramima).

Grafovi pomažu pri rješavanju brojnih problema vezanih za računarstvo, logistiku, ekonomiju, sociologiju, kemiju i zahvaljujući tako raširenoj uporabi, teorija grafova je dio matematike koji se i danas ubrzano razvija.

U ovom radu reći ćemo nešto više o bojenju grafova. Bojenje grafova je dio teorije grafova i zanimljivo je možda najviše zbog toga što su problemi bojenja grafova desetljećima zaokupljali brojne ugledne matematičare, znanstvenike, amatere... Rad na tim problemima i pokušaji rješavanja istih doveli su do brojnih novih spoznaja na području teorije grafova.

Rad je podijeljen na tri dijela. U prvom dijelu definirat ćemo neke osnovne pojmove teorije grafova.

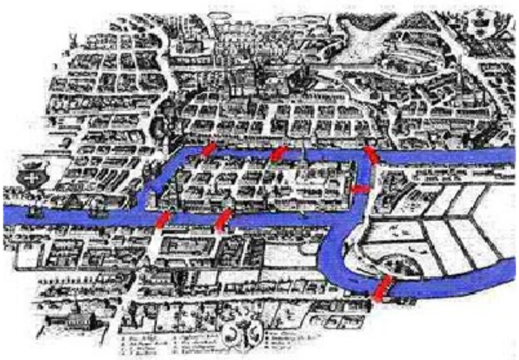
Drugi dio je glavni dio ovog rada i sadrži povijesni pregled razvoja bojenja grafova te tri pristupa: bojenje vrhova, bojenje bridova i bojenje karata.

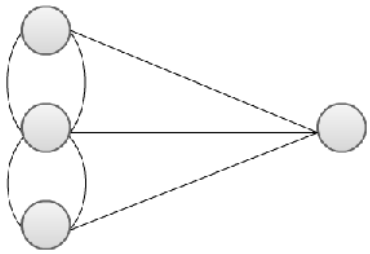
U trećem dijelu opisane su neke od zanimljivijih primjena bojenja grafova.

Poglavlje 1

Teorija grafova

Početkom razvoja teorije grafova smatramo 1736. godinu kada je matematičar Leonhard Euler riješio problem Köningsbergških mostova. Problem se sastoji u pitanju može li se svih sedam mostova u gradu Köningsbergu obići tako da se svaki prijeđe točno jednom i da se vratimo na mjesto s kojeg smo krenuli. U svom rješenju ne samo da je dao odgovor na problem, nego je postavio i opće pravilo kako riješiti takve probleme.





Slika 1.1. Mostovi Köningsberga

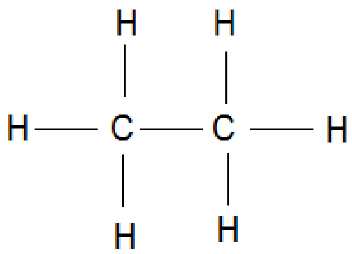
Na slici 1.1 možemo uočiti sljedeće: Ako lijeva obala rijeke nije niti početak niti kraj naše šetnje, onda nam za dolazak na taj teritorij i odlazak s njega trebaju dva različita mosta. No, budući da je lijeva obala rijeke spojena s ostalim dijelovima grada trima mostovima, takva šetnja je nemoguća. Dakle lijeva obala rijeke morala bi biti ili početak ili kraj šetnje. Analogno razmatranje možemo provesti i za preostala tri dijela grada iz čega proizlazi da bismo u svakom od tih dijelova grada trebali ili početi ili završiti šetnju, što je nemoguće.

Sljedeći korak u razvoju teorije grafova napravio je britanski matematičar Arthur Cayley 1870 - ih. On je u teoriju grafova uveo pojam i definiciju stabla. U to vrijeme otkrivene su i strukturne formule u kemiji. Cayley je našao vezu između ova dva pojma - povezao je stabla i strukturne formule alkana. Naime, crtež kemijske molekule možemo prikazati kao graf kod kojega atomi predstavljaju vrhove grafa, a veze među atomima bridove grafa. Takav prikaz pomaže nam kada želimo vidjeti postoji li molekula sa određenim svojstvima - pitanje preformuliramo u postoji li graf molekule sa traženim svojstvima. Takve grafove nazivamo molekularni grafovi. Tako npr. molekulu vode prikazujemo grafom na Slici 1.2. odnosno s tri vrha povezanih s dva brida, gdje dva vrha predstavljaju atome vodika, a jedan predstavlja atom kisika.

Slika 1.2. Molekula vode H_2O

Takvi prikazi ustalili su se upravo u Cayleyjevo doba, a on je tokom 1870-ih i 1880-ih godina riješio neka od kemijskih pitanja koja je sveo na pitanja teorije grafova. Samo jedan od primjera: matematički je dokazao da su molekule alkana C_nH_m moguće samo za $m = 2n + 2$.

Primjer 1 *Na slici 1.3 vidimo molekulu etana koja se sastoji od dva atoma ugljika i 6 atoma vodika.*



Slika 1.3. Molekula etana C_2H_6

Iz kemije nam je poznato da su u alkanima sve veze jednostruke i da nema ciklusa (zatvorenih prstenova unutar molekule). Time grafovi molekula alkana spadaju u vrstu grafova koje danas zovemo stabla i kojima se Cayley najviše bavio. S obzirom da u alkanu imamo n četverovalentnih C-atoma tj. vrhova iz kojih izlaze po 4 brida, te m jednovalentnih H-atoma tj. vrhova iz kojih izlazi po jedan brid, ukupno imamo $\frac{4n+m}{2}$ bridova (dijelimo s 2 jer smo svaki brid prebrojali dvaput tj. brojali smo ga jednom u svakom od njegova dva kraja). S druge strane, ukupan broj atoma tj. vrhova u grafu alkana C_nH_m je $m + n$. Za sva stabla vrijedi da je broj bridova za 1 manji od broja vrhova, dakle mora vrijediti:

$$\frac{4n+m}{2} = m + n - 1 \text{ tj. } m = 2n + 2$$

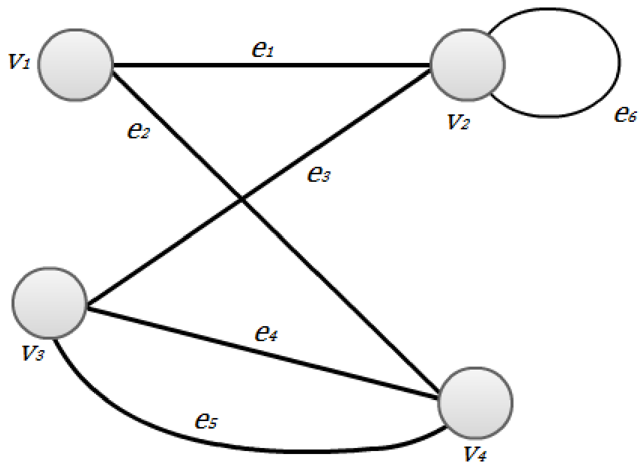
Tek 1936. godine objavljivanjem Königove monografije termin graf ušao je u upotrebu i tu godinu smatramo trenutkom zasnivanja teorije grafova kao samostalne matematičke discipline. Najznačajniji zamah i procvat teorija grafova doživljava u pedesetim godinama dvadesetog stoljeća kada se formiraju komunikacijske, biheviorističke znanosti, tehnologija.

1.1 Definicije i osnovna svojstva grafova

Definicija 1 *Graf G je uređeni par G = (V, E) gdje je V=V(G) skup vrhova, E=E(G) skup bridova disjunktnih s V, a svaki brid* $e \in E$ *spaja dva vrha u,* $v \in V$ *koji se zovu krajevi od e.*

Graf obično crtamo u ravnini tako da su vrhovi točke, a bridovi dužine ili krivulje koje spajaju te točke.

Primjer 2 *Neka je G = (V(G), E(G)), gdje je* $V(G) = v_1, v_2, v_3, v_4$ *i* $E(G) = e_1, e_2, e_3, e_4 e_5, e_6$.



Slika 1.4. Graf $G = (V(G), E(G))$

Definicija 2 *Kažemo da su vrhovi u i v incidentni s bridom koji ih spaja, bridom e, a vrhovi u i v su susjedni.*

Bridove s bar jednim zajedničkim krajem također zovemo incidentnima.

Definicija 3 *Graf G je konačan ako su V i E konačni skupovi, a inače je beskonačan. Dva osnovna parametra vezana uz konačni graf su:*

$$v(G) = |V(G)| = \textit{red od G (broj vrhova od G)},$$
$$e(G) = |E(G)| = \textit{veličina od G (broj bridova od G)}.$$

Ukoliko u nastavku ne naglasimo drugačije, znači da mislimo na konačne grafove.

Definicija 4 *Grafovi G i H su izomorfni ako postoje bijekcije* $\theta : V(G) \to V(H)$ *i* $\varphi : E(G) \to E(H)$ *tako da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je* $\theta(v)$ *incidentan s* $\varphi(e)$ *u H. Uređeni par* $f = (\theta, \varphi) : G \to H$ *se tada zove izomorfizam iz G u H.*

Izomorfizam dakle čuva incidenciju i susjednost. Jedan od zanimljivijih i težih problema teorije grafova sastoji se u otkrivanju postoji li izomorfizam između dva grafa ili ne.

Definicija 5 *Stupanj vrha v u grafu G je broj bridova koji su incidentni s vrhom v. Označavamo ga sa deg(v). Ako je u vrhu v petlja, onda je* $deg(v) = 2$. *Vrh stupnja* 0 *zovemo izolirani vrh, a vrh stupnja* 1 *krajnji vrh.*

Definicija 6 *Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se petlja. Dva brida ili više njih incidentnih s istim parom vrhova zovu se višestruki bridovi. Graf je jednostavan ako su svaka dva vrha spojena s najviše jednim bridom i nema petlji.*

Ako ponovo pogledamo sliku 1.4, vidimo da je brid e_6 petlja, a bridovi e_5 i e_4 su višestruki.

Graf sa samo jednim vrhom zove se trivijalan, u suprotnom je netrivijalan. Graf G je prazan ako je $E(G) = \emptyset$. U nul - grafu svaki je vrh izoliran, odnosno stupanj svakog vrha jednak je nuli.

Definicija 7 *Za graf G kažemo da je regularan ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je graf G r - regularan ako je* $deg(v) = r, \forall v \in V(G)$. *Cijeli broj r tada ćemo zvati stupanj regularnosti grafa G.*

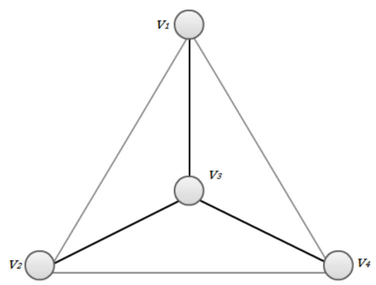
Definicija 8 *Graf H je podgraf grafa G, ako je V(H)⊆V(G) i E(H)⊆E(G).*
Graf G je nadgraf grafa H ako je graf H podgraf grafa G.

Definicija 9 *Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom nazivamo potpunim grafom. Potpuni graf sa n vrhova označavamo sa* K_n. *Možemo uočiti da potpuni graf ima*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

bridova, te svaki od n vrhova ima $(n-1)$ *susjeda.*

Primjer 3 *Na slici 1.5 vidimo potpuni graf sa 4 vrha u kojem je svaki par vrhova spojen bridom.*

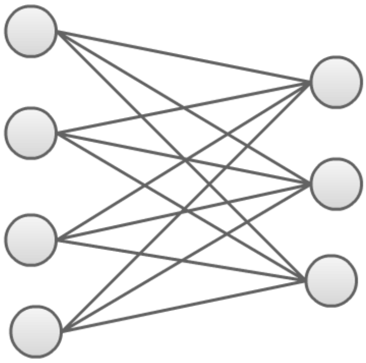


Slika 1.5. Potpuni graf K_4

Definicija 10 *Potpuni graf s k vrhova (ili k-klika) je graf čija su svaka dva vrha susjedna.*

Definicija 11 *Graf G je bipartitan (ili dvodijelni) ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X, Y) zove se tada biparticija grafa. Bipartitni graf s biparticijom (X, Y) označavamo s G (X, Y).*

Definicija 12 *Potpuni bipartitni graf je jednostavan bipartitni graf s biparticijom* (X, Y) *u kojem je svaki vrh iz* X *spojen sa svakim vrhom iz* Y*. Ako je* $|X| = m$ *i* $|Y| = n$*, takav graf označavamo sa* $K_{m,n}$*.*



Slika 1.6. Bipartitni graf $K_{4,3}$

1.2 Šetnje, putovi i povezanost grafova

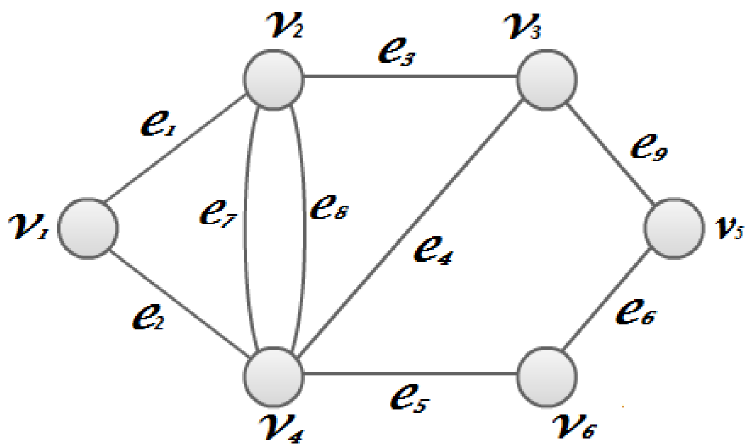
Definicija 13 *Šetnja u grafu G je netrivijalan konačan niz* $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots, e_k v_k$ *čiji su članovi naizmjence vrhovi* v_i *i bridovi* e_i *tako da su krajevi od* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant k$. *Šetnja je zatvorena ako ima pozitivnu duljinu, a početak i kraj se podudaraju.*

Definicija 14 *Ako su bridovi* $e_1, e_2, \ldots e_k$ *međusobno različiti, onda* W *zovemo put.*

Definicija 15 *Staza je put ako su vrhovi* $v_1, v_2, \ldots v_m$ *različiti (osim eventualno početnog vrha* v_0 *i krajnjeg vrha* v_m*).*

Primjer 4 *Na slici 1.7 je graf G sa vrhovima* $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_6$ *i bridovima* $E(G) = e_1, e_2, \ldots, e_9$.

Šetnja u grafu G: $(v_1, v_6) : v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 e_7 v_2 e_3 v_3 e_9 v_5 e_6 v_6$
Put u grafu G: $(v_1, v_6) : v_1 e_1 v_2 e_7 v_4 e_4 v_3 e_9 v_5 e_6 v_6$
Staza u grafu G:$(v_1, v_6) : v_1 e_1 v_2 e_8 v_4 e_4 v_3 e_9 v_5 e_6 v_6$



Slika 1.7. Graf

Definicija 16 *Za stazu ili put kažemo da su zatvoreni ako je* $v_0 = v_m$.

Definicija 17 *Graf je povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem, a dva vrha grafa u i v su povezana ako postoji (u, v) − put u grafu.*

Komponenta povezanosti grafa G je maksimalni povezan podgraf od G (tj. povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom većem povezanom podgrafu). Graf je povezan

ukoliko se sastoji od samo jedne komponente povezanosti (u suprotnom je nepovezan). Broj komponenti povezanosti od G označavamo sa $c(G)$.
U sljedećoj propoziciji naveden je dovoljan uvjet da bi graf G bio povezan.

Propozicija 1 *Neka je G graf s n vrhova. Ako svaki vrh ima stupanj barem $\frac{(n-1)}{2}$, graf G je povezan.*

Definicija 18 *Rezni brid grafa G je brid $e \in E(G)$ za koji je $c(G-e) > c(G)$, odnosno čijim se izbacivanjem graf raspada na više komponenti povezanosti.*

Propozicija 2 *Brid $e \in E(G)$ je rezni ako i samo ako nije brid ciklusa iz G.*

Analogno reznom bridu definiramo i rezni vrh.

Definicija 19 *Vrh v je rezni vrh grafa G ako se skup bridova E može particionirati u dva skupa E_1 i E_2 tako da je $G[E_1] \cap G[E_2] = v$. Ako je G bez petlji i netrivijalan, onda je v rezni vrh od G ako i samo ako je $c(G-v) > c(G)$.*

Općenitiji pojam je vršni rez odnosno podskup $S \subseteq V(G)$, takav da je $G - S$ nepovezan. Ako je $|S| = k$, kažemo da je to k - vršni rez.
Bridni rez u G je podskup $[S, \bar{S}] \subseteq E(G)$ gdje je $S \subseteq V(G)$ (a $\bar{S} = V(G) \setminus S$). Pri tome simbol $[X, Y]$, za $X, Y \subseteq V(G)$ znači skup svih bridova iz G s jednim krajem u X, a drugim u Y.

1.3 Ciklusi i stabla

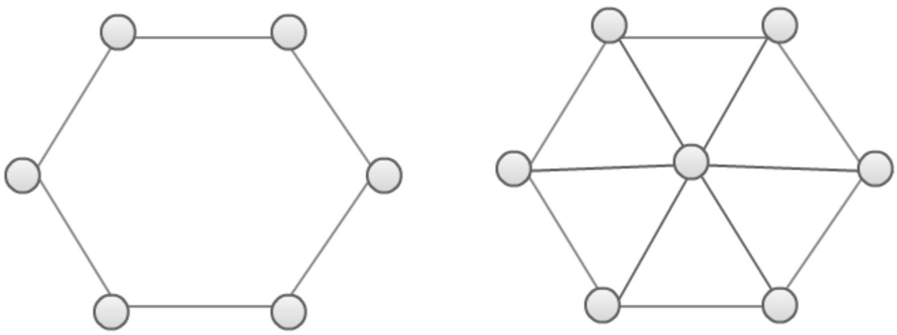
Ciklusi i stabla su najjednostavniji, ali možda i najznačajniji grafovi jer su od njih izgrađeni svi grafovi.

Definicija 20 *Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus.*

Definicija 21 *Za ciklus duljine k kažemo da je k-ciklus. k-ciklus je paran ako je k paran. U suprotnom je neparan.*

Definicija 22 *Graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo sa jednim novim vrhom zovemo kotač sa n vrhova i označavamo sa W_n.*

Primjer 5 *Na slici 1.8 vidimo ciklus C_6 sa 6 vrhova i kotač W_7.*



Slika 1.8. Ciklus C_6 i kotač W_7

Definicija 23 *Šuma je graf bez ciklusa. Stablo je povezani aciklički graf koji ne sadrži cikluse. Komponente povezanosti šume su stabla.*

Teorem 1 *(Karakterizacija stabla) Neka je $G = (V, E)$ jednostavni graf. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *G je stablo*

(b) *Jedinstvenost putova: za svaka dva vrha $x, y \in V$ postoji jedinstveni (x, y)-put u G*

(c) *G je povezan, a za svako $e \in E(G)$, $G - e$ je nepovezan*

(d) *G nema ciklusa, a dodavanjem bilo kojeg brida $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, graf $G + e$ sadrži ciklus*

(e) $v(G) = e(G) + 1$.

1.4 Planarni grafovi

Graf je apstraktan objekt. Uglavnom ga predočavamo na način kako ga crtamo - točke koje predstavljaju vrhove grafa spajamo linijama koje predstavljaju bridove grafa. Često nam je potreban još jedan uvjet - bridovi grafa G sijeku se samo u vrhovima. Crtež grafa G koji zadovoljava ove uvjete zovemo smještavanje grafa G u prostor. Nije uvijek jasno možemo li graf smjestiti u dani prostor, no u slučaju prostora $\mathbf{R^3}$ vrijedi sljedeće:

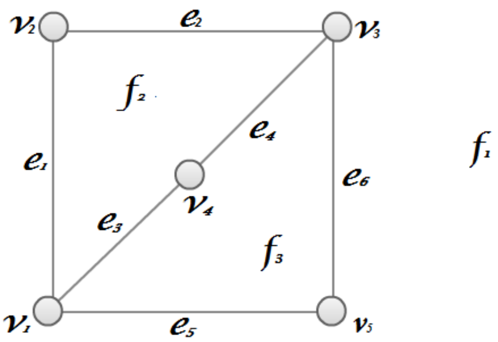
Propozicija 3 *Svaki graf se može uložiti u* $\mathbf{R^3}$.

To isto ne možemo reći i za ravninu $\mathbf{R^2}$. Primjer grafa koji ne možemo smjestiti u ravninu $\mathbf{R^2}$ je, kao što ćemo i pokazati u nastavku, potpuni graf K_5.

Definicija 24 *Graf je planaran ako se može nacrtati (smjestiti) u ravninu* $\mathbf{R^2}$ *tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima, a graf koji je već tako smješten zovemo ravninskim grafom.*

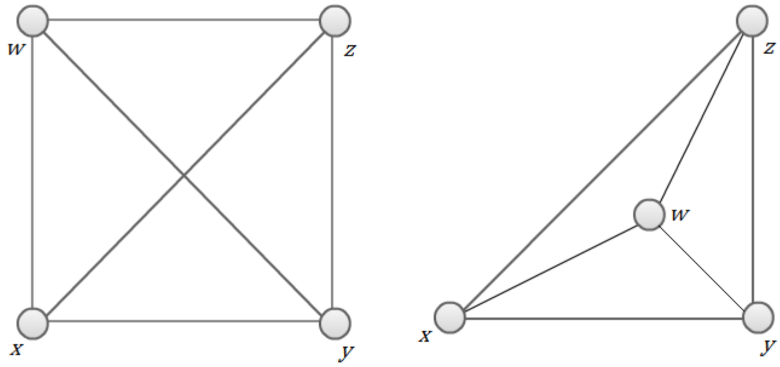
Planarni grafovi važni su i u praksi - na primjer ukoliko se grafom modelira neka električna shema, pri čemu bridovi predstavljaju vodiče, od značaja je utvrditi može li se ta shema prikazati bez presijecanja bridova, s obzirom da presijecanje bridova povlači presijecanje vodiča bez spoja na mjestu presjeka, što može predstavljati komplikacije pri realizaciji. Također našli su primjenu i u pitanjima egzistencije i klasifikacije popločavanja ravnine.

Ravninski graf G dijeli ravninu na područja od kojih je jedno neomeđeno. Zatvorenja tih područja zovemo strane grafa G. Brid (ili vrh) od G je incidentan sa stranom ako je sadržan u toj strani (i obratno,strana je incidentna s tim vrhovima i bridovima). Isto tako kažemo da su dvije strane susjedne ako imaju zajednički incidentan brid. Ako je e rezni brid ravninskog grafa, onda je samo jedna strana incidentna s e (inače su dvije). Strana incidentna reznom bridu susjedna je samoj sebi. Kažemo također da brid separira strane koje su s njim incidentne.



Slika 1.9. Ravninski graf G dijeli ravninu na tri područja: f_1, f_2 i f_3

Graf koji nije planaran naziva se neplanaran. Bitno je istaknuti da, ako je graf nacrtan tako da mu se bridovi presijecaju, ne slijedi nužno da nije planaran. To još ne znači da ga nije moguće nacrtati drugačije. Na primjer, iako graf K_4 obično crtamo kao kvadrat kojem se dijagonale presijecaju, možemo ga nacrtati i bez presijecanja bridova, iz čega slijedi da je graf K_4 planaran. Na sljedećoj slici prikazana su dva načina crtanja grafa K_4, sa i bez presijecanja bridova:



Slika 1.10. Graf K_4 kao neplanaran i kao planaran

Propozicija 4 *Potpuni graf K_5 je neplanaran.*

Dokaz: Pretpostavimo da je K_5 planaran odnosno da se može smjestiti u ravninu tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Tada postoji ciklus $v \to w \to x \to y \to z \to v$ duljine 5 i potrebno je nacrtati još 5 dijagonala tog peterokuta. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da wz leži unutar peterokuta. Tada obje dijagonale iz vrha v, vx i vy moraju ležati van peterokuta i to je moguće realizirati. No, preostale dvije dijagonale, xz i yw morale bi sada biti unutar peterokuta što je nemoguće ostvariti bez presijecanja.

■

Osnovni rezultat o planarnim grafovima je tzv. Eulerova formula koja povezuje broj vrhova, bridova i strana ravninskog grafa.

Teorem 2 ***(Eulerova formula)***
Neka je G povezan ravninski graf. Tada je Eulerova karakteristika od G

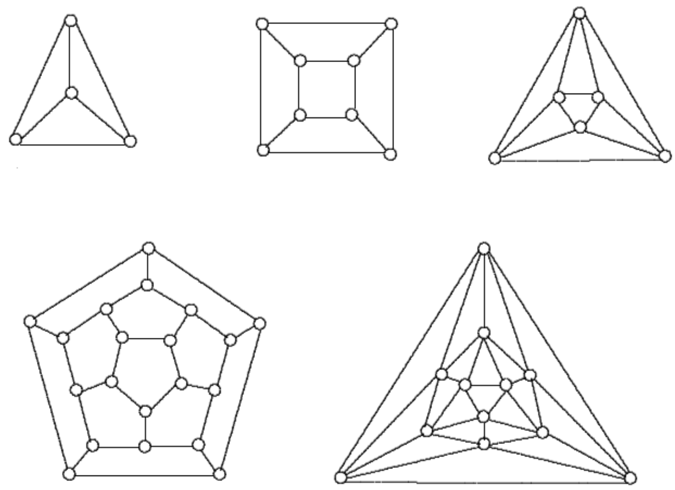
$$v(G) - e(G) + f(G) = 2$$

Dokaz: Indukcijom po $e(G)$. Ako je $e(G) = 0$, onda je $v = 1$ i $f = 1$, pa formula vrijedi. Neka je $e(G) \geq 1$. Pretpostavimo prvo da G nema ciklusa. Tada je G stablo, pa je $v = e+1$ (prema Teoremu 1) i $f = 1$ jer onda imamo samo jednu neomeđenu stranu pa formula opet vrijedi. Sada uzmimo da imamo ciklus i neka je $e \in E(G)$ brid nekog ciklusa. Tada je $G-e$ opet povezan(Propozicija 2), pa je po pretpostavci indukcije Eulerova karakteristika grafa $(G-e)$ jednaka 2. Očito je $v(G-e) = v(G)$ i $e(G-e) = e(G) - 1$. Budući da je e incidentan sa dvjema stranama, uklanjanjem brida e te se dvije strane stope u jednu stranu i stoga je $f(G-e) = f(G) - 1$. Zato imamo:

$$v(G) - e(G) + f(G) = v(G-e) - (e(G-e)+1) + f(G-e) + 1 = 2$$

$\blacksquare$

Najpoznatija primjena Eulerove formule odnosi se na klasifikaciju pravilnih (konveksnih) poliedara. Pravilni poliedri su geometrijska tijela kojima su sve stranice (plohe) sukladni pravilni mnogokuti. Njihove geometrijske konstrukcije bile su poznate već u starogrčkoj matematici (nazivamo ih Platonova tijela). Promatrajući poliedre Euler je i došao do svoje formule i uveo pojmove vezane za grafove koje danas koristimo. Postoji točno pet pravilnih poliedara (Platonova tijela) i grafovi svih pet su planarni.



Slika 1.11. Grafovi Platonovih poliedara: tetraedar, kocka, oktaedar, ikozaedar, dodekaedar

Sljedeća propozicija je jedna od posljedica Eulerove formule. Opisuje nam opća svojstva planarnih grafova.

Propozicija 5 **(a)** *Sva ravninska smještanja danog povezanog planarnog grafa imaju isti broj strana.*

(b) *Jednostavni planarni graf G s $n \geq 3$ vrhova ima najviše $3n-6$ bridova*

(c) *Jednostavni planarni graf G ima vrh stupnja najviše 5, tj. $d_G\ v \leq 5$*

(d) *Za ravninski graf G je $\gamma(G) := v(G) - e(G) + f(G) = 1 + c(G)$*

Poglavlje 2

Bojenje grafova

U teoriji grafova bojenje grafova se odnosi na specifičan slučaj označavanja grafa odnosno dodjeljivanje oznaka (boja) elementima grafa uz neka ograničenja. Kod bojenja vrhova zadanog grafa uvjet je da susjedni vrhovi budu različite boje. Drugi slučaj odnosi se na bojenje bridova - uvjet je da dva susjedna brida budu različite boje. Treći slučaj je bojenje karata - dvije susjedne strane moraju biti različite boje. U nastavku ćemo, nakon pregleda bojenja grafova kroz povijest, bolje opisati ova tri slučaja.

2.1 Povijest bojenja grafova

Kada govorimo o bojenju grafova moramo reći nešto o problemu 4 boje koji je brzo nakon objavljivanja 1860. godine postao poznat gotovo kao i tri klasična problema (kvadratura kruga, trisekcija kuta, udvostručenje kocke). Ako matematički formuliramo teorem on glasi ovako:

Teorem 3 ***Teorem o četiri boje***
Svaka karta može se obojiti najviše četirima bojama tako da su susjedne države obojene različito.

Slika 2.1. Politička karta Europe

Problem četiri boje na prvi pogled ima više veze s kartografijom nego matematikom no u kartografiji se ovaj problem ne spominje. Pri bojenju karata nije bilo bitno da se upotrijebi što manje različitih boja, samo da područja koja dijele granicu ne budu iste boje. Na slici 2.1. vidimo političku kartu Europe obojenu sa šest boja. Karta se sastoji od međusobno povezanih država ili regija. Pojedine države (regije) međusobno su odvojene granicama odnosno bridovima. Dvije države sa zajedničkim bridom nazivaju se susjedne države. Bridovi se sastaju u točkama odnosno vrhovima. Važno je naglasiti da ako se dvije države dodiruju samo u jednoj točki, tada se smiju obojiti istom bojom.

Problem četiri boje ima dosta dobro dokumentiranu povijest. Davne 1852. godine matematičar Francis Guthrie, tada na postdiplomskom studiju u Londonu, uočio je da može obojiti grofovije Engleske tako da susjedne budu različite boje i da mu za to ne treba više od četiri boje. Pokušao je otkriti može li se svaka karta obojiti s najviše četiri boje tako da susjedne države budu različite boje no nije uspio i pitanje je poslao profesoru Augustusu De Morganu koji je pak problem proslijedio kolegi sir Williamu R. Hamiltonu. Sir Hamilton nije bio zainteresiran za problem i De Morgan piše i drugim matematičarima i 1860. god. anonimno objavljuje problem u književnom časopisu Athenaeum. Tako za njega doznaju i matematičari s druge strane Atlantika.

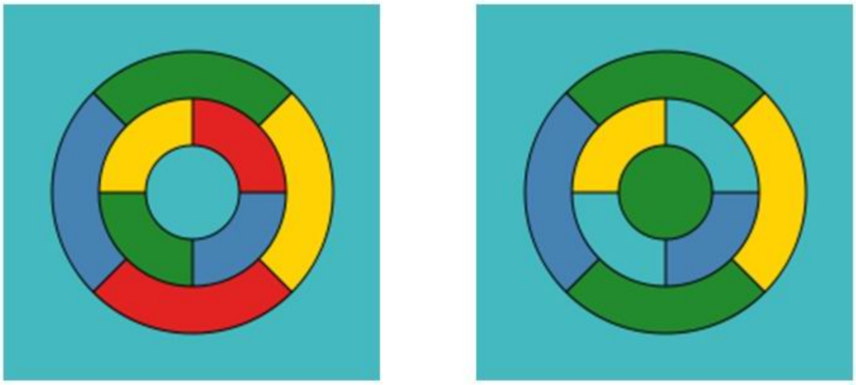
Nakon De Morganove smrti 1871. god. problem pada na neko vrijeme u zaborav. Otvara ga ponovo istaknuti britanski matematičar Arthur Cayley 1878. godine na sastanku Londonskog matematičkog društva i već iduće godine Arthur Bray Kempe objavljuje članak u kojem tvrdi da je dokazao teorem. Ovaj dokaz bio je prihvaćen čitavih jedanaest godina - i time postao najpoznatiji pogrešan dokaz u matematici. Naime, 1890. godine matematičar P. J. Heawood pronašao je grešku tako veliku da se dokaz nije mogao popraviti. Umjesto toga, dokazao je Teorem o 5 boja.

Teorem 4 ***Teorem o pet boja***
Svaka karta može se obojiti s najviše 5 boja tako da su susjedne države obojene različito.

Dokaz: Provodimo indukciju po broju vrhova n. Neka je G jednostavni planarni graf s n vrhova te neka su svi jednostavni planarni grafovi s $n-1$ vrhova 5-obojivi. Graf G sadrži vrh v stupnja $deg\ v \leq 5$ (Propozicija 5.c). Pogledamo li graf $G - v$ vidimo da je to graf s $n-1$ vrhova i po pretpostavci indukcije 5-obojiv. Trebamo još dovršiti bojenje grafa G odnosno vrha v. Ako je $deg\ v < 5$, vrh v možemo obojiti nekom od boja kojom nisu obojeni susjedi vrha v i dokaz bi bio gotov. Pretpostavimo da je $deg\ v = 5$ te neka su vrhovi v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 susjedi od v. Ako bi svi $v_1, \ldots, v_5$ bili međusobno susjedni, graf G bi imao K_5 kao podgraf što je prema Propoziciji 4. u suprotnosti s pretpostavkom da je graf G planaran. Dakle postoje sigurno neka dva nesusjeda među njima - bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su to v_2 i v_4. Stegnemo li bridove $v\ v_2$ i $v\ v_4$ dobit ćemo graf sa $n-2$ vrha koji je prema pretpostavci indukcije 5-obojiv. Nakon što taj graf obojimo, vratimo natrag vrhove odnosno stegnute bridove opet rastegnemo (bojenje sačuvamo). Vidimo da su vrhovi v_2 i v_4 iste boje (bili su stegnuti u isti vrh) što je pravilno budući da oni nisu susjedi. Sada je skup susjeda vrha v obojen s najviše 4 boje pa vrh v obojimo jednom od preostalih boja. Time je dokazan teorem.

$\blacksquare$

Tijekom vremena pojavio se veliki broj pogrešnih dokaza i pokušaja opovrgavanja teorema. Najjednostavniji kontraprimjeri su oni u kojima se pokuša nacrtati strana koja dodiruje sve ostale. Time bismo ostale strane morali obojiti sa samo tri boje. Budući da je teorem o četiri boje točan, to je uvijek moguće. No, ako smo koncentrirani na jednu veliku stranu, promakne nam da možemo preostale strane obojiti sa samo tri boje.



Slika 2.2.Kontraprimjer koji to zapravo nije

Druga vrsta kontraprimjera krši pretpostavku teorema tako što koristi stranu koja se sastoji od dijelova koji se međusobno ne dodiruju ili ne dopušta da se različito oboje strane koje se dodiruju u samo jednoj točki.

Godine 1976. napokon je došlo do preokreta. Koristeći Kempeove tvrdnje o reducibilnosti i algoritam Heescha, Kenneth Appel i Wolfgang Haken sa Sveučilišta Illinois uspjeli su dokazati pretpostavku uz pomoću računala. Beskonačan broj mogućih karata reduciran je na 1936 koje je računalo moralo provjeriti jednu po jednu. Trebalo je oko 1200 sati samo rada računala. Tada je po drugi put problem četiriju boja dobio status teorema. Ovaj dokaz izazvao je brojne rasprave među matematičarima. To je prvi veći teorem koji je dokazan računalno i čovjek ga ne može provjeriti. Povjerenje je dodatno poljuljano 1981. godine kada je Ulrich Schmidt otkrio pogrešku u programu. Premda se ona vrlo brzo ispravila, ipak dokaz nije bio lako prihvaćen i stalno su ga pratile loše glasine i sumnje. Zato 1986. Appel i Haken, u nastojanju da otklone svaku sumnju, objavljuju članak sa detaljnim opisom metode rješavanja, a tri godine kasnije objavljuju i knjigu pod naslovom Every Planar Map is Four Colorable. 1997. godine Robertson, Sanders, Seymour i Thomas objavili su jednostavniji dokaz na 40 stranica, ali također koristeći računalo.

2.2 Bojenje vrhova

Definicija 25 *Neka je G graf, a $k \in \boldsymbol{N}$ zadani broj. Tada je k - bojenje vrhova grafa funkcija $f : V_G \to C$ koja svakom vrhu pridružuje jednu od točno k različitih boja. Ako je $c(v) = i$ kažemo da je vrh v obojen bojom i.*

Boje koje koristimo mogu biti elementi bilo kojeg skupa. Prave boje (plava, zelena, žuta, crvena) koristimo kada trebamo malo boja. U suprotnom koristimo prirodne brojeve umjesto boja ($1, 2, \ldots, k$ za $k \in \mathbf{N}$; $k > 0$). Osim pojednostavljivanja razlog je i taj što nas zanima koliko boja upotrebljavamo.

Definicija 26 *Pravilno bojenje vrhova grafa je bojenje vrhova grafa tako da su susjedni vrhovi različito obojeni. Možemo ga promatrati kao funkciju $c : V_G \to \boldsymbol{N}$ gdje je $\boldsymbol{N}$ skup pozitivnih cijelih brojeva takav da je $c(u) \neq c(v)$ ako su u i v susjedni vrhovi grafa G.*

Kada govorimo o bojenju vrhova grafova, ako nije navedeno drugačije, mislimo na pravilno bojenje. Samo grafovi bez petlji dopuštaju pravilno bojenje i zato ćemo u nastavku razmatrati samo grafove bez petlji.
Ako je svaka boja koju smo upotrijebili jedna od k danih boja, govorimo o k - bojenju.

Definicija 27 *Graf je k - obojiv ako i samo ako dopušta pravilno k - bojenje.*

Svaki graf s n vrhova je n - obojiv (budući da svaki vrh možemo obojiti drugom bojom). Ostaje nam najzanimljivije pitanje - koliki je najmanji broj boja koji trebamo upotrijebiti da bi zadani graf bio pravilno obojen.

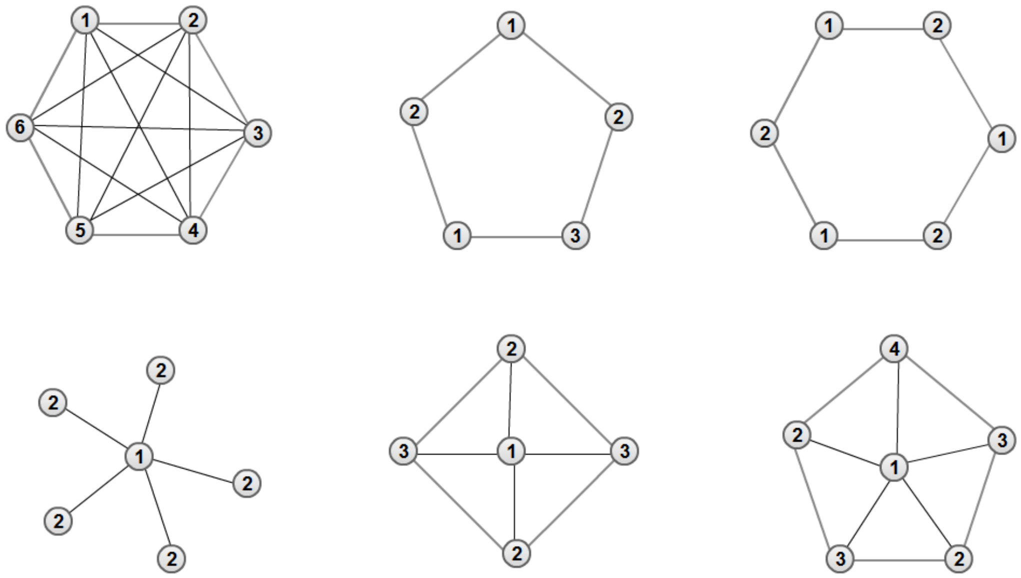
Definicija 28 *Kromatski broj grafa G je najmanji broj različitih boja potrebnih za pravilno bojenje grafa G, a označavamo ga sa χ (G). Ako je graf G k - obojiv, ali nije $(k-1)$ - obojiv, kažemo da je graf G k - kromatski.*

Ako je zadano k-bojenje k - kromatskog grafa G, tada moramo upotrijebiti svih k boja. U sljedećoj tablici možemo vidjeti kromatske brojeve za neke poznate klase grafova.

Graf G	**χ (G)**
potpuni graf K_n	n
ciklički graf paran C_n, $n > 1$	2
ciklički graf neparan C_n, $n > 1$	3
zvijezda graf S_n, $n > 1$	2
parni kotač W_n, $n > 2$	4
neparni kotač W_n, $n > 2$	3

Slika 2.3 Kromatski brojevi

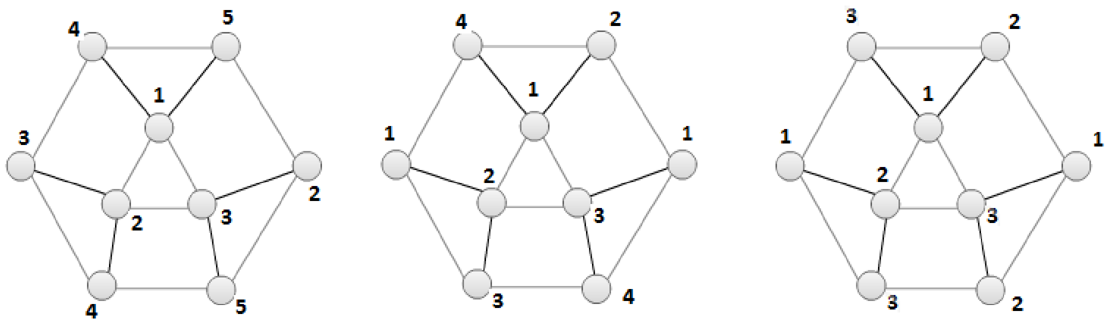
Na slici 2.4 možemo vidjeti bojenje vrhova nekih grafova i usporediti sa prethodnom tablicom: na prvom mjestu je potpuni graf K_6 za koji je kromatski broj $\chi(K_6) = 6$. Druga sličica prikazuje ciklus (neparni) C_5 i vrijedi $\chi(C_5) = 3$.



Slika 2.4 Karakteristični grafovi

Primjer 6 *Pogledajmo tri različita bojenja grafa H na slici 2.2. Na prvoj slici imamo* 5-*bojenje, na drugoj* 4-*bojenje, a na trećoj slici* 3-*bojenje. Budući da se radi o grafu sa 9 vrhova odnosno o grafu reda 9, H je k - obojiv za svaki k takav da je* $3 \leq k \leq 9$.

Budući da je graf H 3 *- obojiv* $\chi(H) \leq 3$. *Ne možemo naći* 2 *- bojenje grafa H zato što H sadrži trokute, a tri vrha svakog trokuta u grafu moraju biti različito obojena. Prema tome,* $\chi(H) \geq 3$ *i slijedi* $\chi(H) = 3$.



Slika 2.5.Različita bojenja grafa G

U prethodnom primjeru da bismo pokazali da je kromatski broj grafa H jednak 3, koristili smo općeniti pristup. Generalno, kako bismo pokazali da graf G ima kromatski broj k, trebamo utvrditi da postoji k - bojenje grafa G (tj. $\chi(G) \leq k$) i utvrditi da za bilo koje bojenje grafa G trebamo barem k boja (tj.$\chi(G) \geq k$).

Kromatskim brojem grafovi su u nekom smislu i definirani:

- $\chi(G) = 1$ ako i samo ako je graf G nul - graf (skup bridova grafa G je prazan)
- $\chi(G) = 2$ ako i samo ako je graf bipartitan
- $\chi(G) = k$ ako i samo ako je G k - partitan graf
  Dano je bojenje grafa G sa točno $\chi(G)$ boja. Sada se skup vrhova $V(G)$ dijeli na particiju podskupova vrhova koji su istobojni. Vrhovi iz istog podskupa nisu susjedni jer su obojeni istom bojom. Sada možemo poopćiti pojam bipartitnosti na k - partitne grafove kod kojih je svaki brid incidentan sa vrhovima koji pripadaju različitim podskupovima particije skupa $V(G)$.

Navedeno poopćenje na k - partitne grafove nije efikasno. Naime nije uopće jednostavno ustanoviti je li za $k > 2$ neki graf k - partitan ili nije.

Općenitog pravila nema i zato ćemo se morati zadovoljiti određivanjem pripada li graf nekoj od poznatih klasa grafova (Slika 2.3) ili ćemo tražiti gornje i donje granice za kromatski broj grafa i to na sljedeći način:

- Gornja međa: Pokazati da je $\chi(G) \leq k$ pokazujući pravilno k - bojenje grafa G
- Donja međa: Pokazati da je $\chi(G) \geq k$ koristeći svojstva grafa G i posebno pronalazeći podgraf koji zahtjeva k boja.

Iako problem određivanja kromatskog broja nije jednostavan, poznate su neke jednostavne procjene za ove veličine.

Jasno je da za svaki graf G reda n vrijedi:

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

Pri tome su obje granice dostižne. Naime, za grafove koji se sastoje od izoliranih čvorova očito vrijedi $\chi(G) = 1$, dok za potpun graf K_n vrijedi $\chi(G) = n$. Cilj nam je suziti ove granice.

Propozicija 6 *Neka graf G ima k međusobno susjednih vrhova. Tada je $\chi(G) \geq k$.*

Propozicija 7 *Neka je H podgraf grafa G. Tada je $\chi(G) \geq \chi(H)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\chi(G) = k$. Tada postoji k-bojenje c grafa G. Budući da c pridružuje susjednim vrhovima različite boje, c pridružuje različite boje i susjednim vrhovima podgrafa H. Prema tome, H je k - obojiv i vrijedi $\chi(H) \leq k$, a $k = \chi(G)$.

■

Definicija 29 *Graf G je kritičan ako je $\chi(H) < \chi(G)$ za svaki podgraf $H \subset G$. Možemo reći i ovako : graf G je k - kritičan ako je k - kromatski, a $\chi(G - v) < k$, za svaki $v \in V(G)$.*

Rekli smo da je stupanj vrha $v \in V(G)$ u grafu G broj bridova s kojima je vrh v incidentan. Označavat ćemo ga sa $d_G(v)$. Minimalni stupanj grafa G označit ćemo sa $\delta(G)$, a maksimalni stupanj grafa sa $\Delta(G)$.

Teorem 5 *Ako je G k - kritičan graf, onda je minimalni stupanj $\delta \geq k - 1$.*

Propozicija 8 *Neka je G k - kromatski graf. Tada je barem k vrhova od G stupnja $\geq k - 1$.*

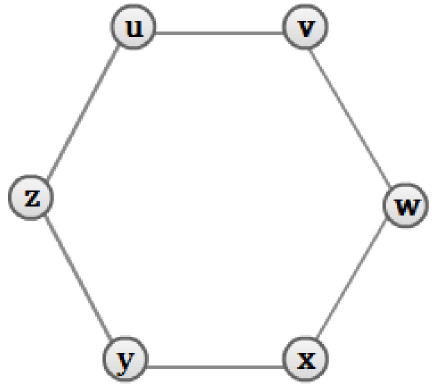
Efikasni algoritmi za pronalaženje bojenja koje koristi najmanji broj boja nisu poznati, no postoje jednostavni i efikasni algoritmi za nalaženje pravilnog bojenja vrhova. U praksi se često koristi pohlepni algoritam.

Pohlepni algoritam Pretpostavimo da su vrhovi grafa G navedeni redom $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$

1. Vrhu v_1 pridružujemo boju 1
2. Kada su vrhovima $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_j$ pridružene boje $1 \leq j < n$, vrhu v_{j+1} pridružuje se najmanja boja koja nije pridružena ni jednom susjednom vrhu od v_{j+1} iz skupa $v_1, \ldots, v_j$

Na primjeru ćemo vidjeti zašto se ne možemo pouzdati u točnost ovakvog bojenja grafova.

Primjer 7 *Promotrimo graf C_6 na slici 2.6.*



Slika 2.6 Graf C_6

Ako vrhove navedemo redom u, v, w, x, y, z, pohlepni algoritam će napraviti bojenje c zadanog grafa G na sljedeći način:
$c(u) = 1, c(v) = 2, c(w) = 1, c(x) = 2, c(y) = 1, c(z) = 2$. *Dobili smo da je $\chi(C_6) \leq 2$. Naravno, znamo da je $\chi(C_6) = 2$ i algoritam je dobro riješio problem.*
Ako vrhove istog grafa navedemo drugačijim redoslijedom, pr. u, x, v, w, z, y, pohlepnim algoritmom dobivamo bojenje c' definirano sa:
$c'(u) = 1, c'(x) = 1, c'(v) = 2, c'(w) = 3, c'(z) = 2, c(y) = 3$. *Dobili smo 3-bojenje grafa C_6 što naravno nije kromatski broj od C_6.*

Propozicija 9 *Za svaki graf vrijedi $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Dokaz: Pretpostavimo da su vrhovi grafa G navedeni redom $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ i da primijenimo pohlepni algoritam za bojenje. Tada je vrhu v_1 pridružena boja 1, a za $2 \leq i < n$ vrhu v_i je ili pridružena boja 1 ili boja $k+1$, gdje je k najveći prirodan broj takav da su sve boje 1, 2, 3,..., k upotrijebljene za bojenje susjeda od v_i u skupu $S = v_1, v_2, v_3, \ldots v_{i-1}$. Budući da je najviše $deg\ v_i$ susjeda vrha v_i u skupu S, najveća vrijednost od k je $deg\ v_i$. Prema tome boja pridružena vrhu v_i je najviše $deg\ v_i$, odnosno:

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{1 + deg\ v_i\} = 1 + \Delta(G)$$

■

Iako je $1 + \Delta(G)$ gornja granica za kromatski broj povezanog grafa G, R. L. Brooks je pokazao da su slučajevi kada je $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$ vrlo rijetki.

Teorem 6 *(Brooks, 1941.) Za svaki graf G je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ako je $\Delta(G) = 2$, onda vrijedi jednakost ako i samo ako je neka komponenta od G neparni ciklus. Ako je*

$\Delta(G) \neq 2$, onda jednakost vrijedi ako i samo ako je neka komponenta od G potpun graf sa $\Delta(G)+1$ vrhova.
Ekvivalentno: za jednostavni povezan graf G koji nije potpun niti je neparni ciklus vrijedi $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Dokaz:
Ako je $\Delta(G) = 1$ teorem je očit.

Ako je $\Delta(G) = 2$ teorem slijedi iz definicije da je graf bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne cikluse. Trebamo dokazati da, ako je $\Delta(G) \leq k$ i $G \not\supseteq K_{k+1}$ za neki $k \geq 3$, da je onda G k - obojiv. To ćemo dokazati indukcijom po $v(G)$. Za $v(G) \leq 4$ tvrdnja je očita.

Ako je G nepovezan ili ima rezni vrh, onda je svaki blok od G k - obojiv pa je i G k - obojiv.

Ako je G 2 - povezan sa vršnim rezom x, y, onda je $G = G_1 \cup G_2$, $V(G = G_1 \cup G_2) = x, y$, pri čemu G_1, G_2 imaju manje vrhova od G pa su po pretpostavci indukcije G_1 i G_2 k - obojivi.

Ako je $xy \in E(G)$ i ako su boje od x i y različite, gotovi smo, a ako su iste onda ova dva k - bojenja preimenovanjem daju k - bojenje od G.

Ako je $xy \notin E(G)$ onda je po indukciji $G_i' = G_i \cup xy$ k - obojiv ili jednak K_{k+1} za $i = 1, 2$. Tada je opet G k - obojiv, osim možda ako je barem jedan od G_i', recimo $G_i' = K_{k+1}$. No u oba slučaja x i y su stupnja 1 u G_2 jer je $\Delta(G) \leq k$. Tada G_2 dopušta bojenje u kojem su x i y iste boje zbog $k \geq 3$. Kako je $G_1 = K_{k+1} - xy$, slijedi da se to k - bojenje može proširiti do k - bojenja od G. Stoga možemo pretpostaviti da je G 3 - povezan.

Bojenje vrhova od G u nekom poretku tako da svaki vrh obojimo najmanjom od boja 1, 2, 3, $\ldots$ dobit ćemo $(k-1)$ bojenje od G. Ako pri tome vrh x obojimo bojom $k+1$, onda je $d(x) = k$ pa k susjeda od x imaju boje $1, 2, 3, \ldots, k$. U tom slučaju možemo x prebojiti nekom bojom i te prebojiti nekog susjeda od x boje i jednom od boja $1, 2, 3, \ldots, k+1$. Na taj način možemo pogurati neželjenu boju $k+1$ od x nekom susjedu ili ona pak nestaje. Ako tako poguramo boju $k+1$ duž bilo kojeg puta $x_1 x_2 \ldots x_n$, počevši od x_1, dobivamo $k+1$ bojenje do G u kojem možda x_n ima boju $k+1$. Budući da imamo putove iz bilo kojeg vrha do x_n slijedi da boju $k+1$ možemo pogurati tako da bude prisutna samo u x_n. Ako je $d(x_n) \leq k$, onda vrh x_n možemo prebojiti tako da dobijemo k - bojenje od G. Stoga možemo pretpostaviti da su svi vrhovi od G stupnja k.

Neka su u i v susjedni vrhovi. Duž bilo kojeg puta do vrha v poguramo boju $k+1$ tako da je u čitavom G prisutna možda jedino u v. U tom bojenju vrh u ima dva susjeda, x i y, iste boje. Kako je G 3 - povezan, postoji (u, v) put P u $G-x-y$. Poguramo boju $k+1$ iz v duž puta P. Tada boja $k+1$ nestaje ili završava kod vrha u. U posljednjem slučaju zbog $d(u)=k$ i zbog toga što su x i y isto obojeni, slijedi da postoji boja $i \in 1,2,3,\ldots,k$ kojom se može obojiti u. Na taj način dobivamo k - bojenje od G.

■

Vidjeli smo neke granice za kromatski broj grafa G. Broj klike $\omega(G)$ je najpoznatija i najjednostavnija donja granica za $\chi(G)$, dok je $1+\Delta(G)$ najpoznatija i najjednostavnija gornja granica za $\chi(G)$ (klika je podgraf grafa G u kojem su svaka dva vrha susjedna, tj. postoji brid između svaka dva vrha podgrafa). U slučaju da je $\Delta(G) \geq 3$ i G nije potpun graf tada je, prema Brooksovom teoremu, $\Delta(G)$ bolja gornja granica za $\chi(G)$.
Postoje brojne složenije procjene kojima možemo preciznije odrediti granice u kojima se kreće kromatski broj grafa G. Borodini Kostochka, Catlin te Lawrence su došli do zaključka da isključenje egzistencije manjih potpunih podgrafova može poboljšati gornju granicu za χ(G). No u općem slučaju efikasan algoritam za određivanje $\chi(G)$ nije poznat.

2.3 Bojenje bridova

Analogno bojenju vrhova definiramo i bojenje bridova.

Definicija 30 *Neka je G graf, a $k \in \mathbb{N}$ zadani broj. Tada je k-bojenje bridova grafa funkcija $f : E_G \to C$ koja svakom bridu pridružuje jednu od točno k različitih boja. Ako je $c(e) = i$ kažemo da je brid e obojen bojom i.*

Definicija 31 *Pravilno bridno k - bojenje je takvo kod kojeg su susjednim bridovima dodijeljene različite boje.*

Kako bismo mogli usporediti bojenje vrhova i bojenje bridova, moramo definirati linijski graf.

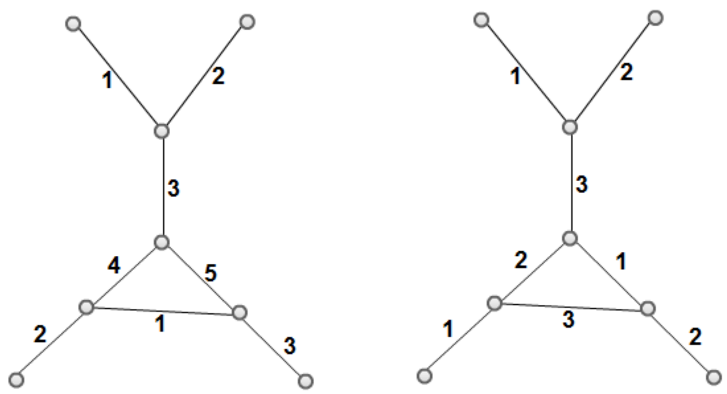
Definicija 32 *Linijski graf $L(G)$, grafa G je graf sa skupom vrhova $V(L(G)) = E(G)$ u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako su im pripadni bridovi u grafu G incidentni.*

Budući da je pravilno bojenje bridova nepraznog grafa G zapravo pravilno bojenje vrhova njegovog linijskog grafa $L(G)$, bojenje bridova grafa G jednako je bojenju vrhova odgovarajućeg linijskog grafa.

Pravilno bojenje bridova kod kojeg koristimo k - boja je k - bojenje bridova. Tada k - bojenje bridova opisujemo kao funkciju $c : E(G) \to 1, 2, \ldots, k$ t.d. $c(e) \neq c(f)$ za svaka dva susjedna brida e i f u grafu G. Graf G je k - obojiv ako postoji k - bojenje od G.

Definicija 33 *Kromatski indeks (bridno - kromatski broj) grafa G, $\chi(G)$, je najmanji broj različitih boja potrebnih za pravilno bridno bojenje. Ako je graf G bridno k - obojiv, ali nije $(k-1)$ - obojiv, kažemo da je kromatski indeks grafa G jednak k i pišemo $\chi(G) = k$.*

Na slici 2.7 vidjet ćemo 5 - bojenje grafa G i 3 - bojenje istog grafa



Slika 2.7 5 - bojenje grafa G i 3 - bojenje grafa G

Kao i kod bojenja vrhova i ovdje nas zanima najmanji broj boja koje trebamo upotrijebiti. Kromatski indeks $\chi'(G)$ grafa G je najmanji prirodni broj k za koji je graf G k - obojiv. Nadalje vrijedi $\chi'(G) = \chi(L(G))$ za svaki neprazni graf G.

Ako je graf G k - obojiv za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je $\chi'(G) \leq k$. U prethodnom primjeru, budući je graf H 3 - obojiv, $\chi'(H) \leq 3$. Graf H sadrži tri međusobno susjedna brida i prema tome treba najmanje tri boje za pravilno bojenje pa pišemo $\chi'(H) \geq 3$. Slijedi $\chi'(H) = 3$.

Neka je dano k - bojenje nepraznog grafa G bojama $1, 2, \ldots, k$ i neka je $E_i (1 \leq i \leq k)$ skup bridova grafa G obojanih istom bojom i. Tada su neprazni skupovi $E_1, E_2, \ldots E_k$ iz $E(G)$ particije podskupa bridova za dano k - bojenje bridova. Budući da se radi o pravilnom bojenju nema susjednih bridova u G koji su iste boje i svaki neprazni podskup od $E(G)$ sastoji se od neincidentnih bridova. Kromatski indeks od G je najmanji broj nezavisnih podskupova bridova na koje skup $E(G)$ može biti particioniran. Također, ako $\chi(G) = k$ za neki graf G svako k - bridno bojenje mora sadržavati samo k nepraznih podskupova boja bridova.

Označimo sa $\alpha'(G)$ veličinu najvećeg nepraznog podskupa bridova od G koji su međusobno ne susjedni. Ako je red od G jednak n tada je $\alpha'(G) \leq \frac{n}{2}$. Pomoću toga dobivamo jednostavnu i korisnu donju granicu za kromatski indeks grafa.

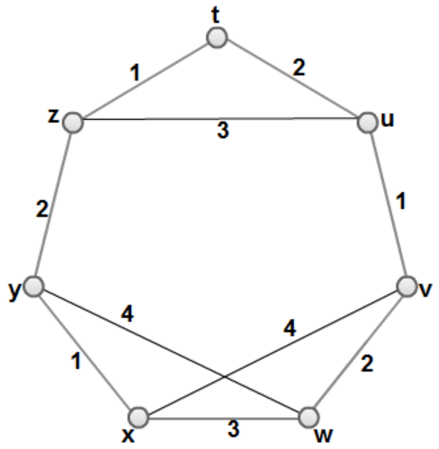
Teorem 7 *Ako je G graf veličine $m \geq 1$, tada* $\chi'(G) \geq \left\lceil \frac{m}{\alpha'(G)} \right\rceil$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\chi'(G) = k$ i da su $E_1, E_2, \ldots, E_k$ podskupovi bridova istih boja u k - bridnom brojenju grafa G. Prema tome, $|E(i)| \leq \alpha'(G)$ za svaki $i, 1 \leq i \leq k$. Slijedi: $m = |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \leq k \cdot \alpha'(G)$ i dobivamo $\chi'(G) = k \geq \left\lceil \frac{m}{\alpha'(G)} \right\rceil$.

■

Budući da pri bojenju bridova grafa G pridružujemo različite boje susjednim bridovima, za svaki vrh v grafa G vrijedi da je broj boja koje moramo upotrijebiti za bojenje bridova incidentnih s vrhom v jednak $degv$. Prema tome vrijedi da je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ za svaki neprazni graf G.

Primjer 8 *U grafu G reda $n = 7$ i veličine $m = 10$ na slici 2.7 $\Delta(G) = 3$. Prema $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ vrijedi $\chi'(G) \geq 3$. Na slici možemo uočiti podskup $X = uz, vx, wy$ koji se* *sastoji od tri neincidentna brida grafa G i prema tome je* $\alpha'(G) \geq 3$. *Prema Teoremu 6.* $\chi'(G) \geq \lceil \frac{m}{\alpha'(G)} \rceil = \lceil \frac{10}{3} \rceil$ *i zato je* $\chi'(G) \geq 4$. *Na slici uočavamo 4 - bridno bojenje zadanog grafa. Slijedi* $\chi'(G) \leq 4$, *odnosno* $\chi'(G) = 4$.



Slika 2.8. 4-bridno bojenje grafa G

Možemo zaključiti da je $\Delta(G)$ dobra donja granica pri određivanju kromatskog indeksa. Sljedeći teorem pomoći će nam u određivanju gornje granice kromatskog indeksa. Najprije ćemo samo definirati pojmove koje ćemo koristiti.

Definicija 34 *Neka je G graf bez petlji. Multiplicitet* $\mu(G)$ *grafa G je maksimalni broj bridova koje spaja isti par vrhova u G.*

Naime, iako nam pri određivanju kromatskog broja grafa G višestruki bridovi ne smetaju, pri određivanju kromatskog indeksa moramo obratiti pažnju i na njih.
S-trokut u grafu je trokut sa vrhovima x, y, z koji ima s xz-bridova, $(s-1)$ xy-bridova i jedan yz-brid.

Teorem 8 ***(V.G.Vizing, 1964.)*** *Za svaki graf G s multiplicitetom* $\mu(G) \geq 1$ *vrijedi*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G).$$

Ako je na desnoj strani jednakost, onda G sadrži $\mu(G)$*-trokut (za* $\mu(G) \geq 2$*). Posebno, za jednostavni graf* $\chi'(G) = \Delta(G)$ *ili* $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Znajući ovaj rezultat, preostaje nam za dani jednostavni graf odrediti jednu od dvije mogućnosti za kromatski indeks - to je ili najveći stupanj vrha u grafu ili taj broj uvećan za 1. Međutim, iako znamo da jedna od ove dvije mogućnosti mora vrijediti, nije nam poznat efikasan algoritam za utvrđivanje koja zaista vrijedi.

2.4 Bojenje karata

Karta je cjelina koja se sastoji od međusobno povezanih regija (država, područja).

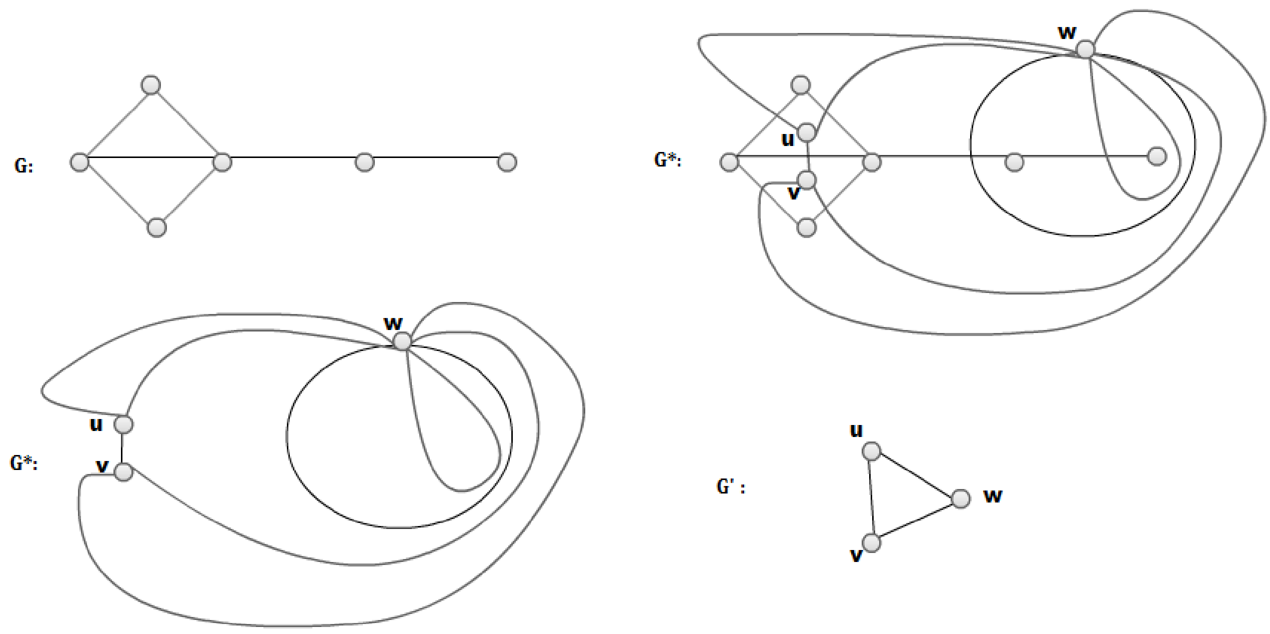
Definicija 35 *Bojenje karata je pravilno ako se područja koja se sreću na bridu e obojena različito za svaki* $e \in E(G)$.

Definicija 36 *Kromatski broj karte k je najmanji broj boja potrebnih za pravilno bojenje.*

Od svake karte možemo konstruirati odgovarajući planarni graf. Strane tada zamjenjuju vrhovi, a dva vrha spajamo bridom ako su strane koje odgovaraju vrhovima susjedne. Naglasimo - strane su susjedne ako se dodiruju nekom dužinom, ne samo u jednoj točki. Problem četiri boje možemo prikazati kao problem bojanja planarnih grafova, možda čak bolje nego kao problem bojenja karata. Neka je G ravninski graf. Graf G je k - obojiv ako svakoj strani od G možemo pridružiti jednu od k boja tako da su susjedne strane različito obojene.

Teorem 9 *Svaki planaran graf je 4 - obojiv.*

Neka je G planaran graf smješten u ravnini $\mathbb{R}^2$. Rekli smo da su strane grafa G područja na koja graf dijeli ravninu. Skup svih strana ravninskog grafa G označavamo sa $F(G)$, dok broj svih strana označimo sa $\phi(G)$ (dakle $\phi(G) = |F(G)|$). Dual G^* grafa G možemo konstruirati tako da svakoj strani $f \in F(G)$ pridružimo vrh $f^* \in V(G)$. Dobili smo skup vrhova $V(G^*)$. Dva različita vrha iz $V(G^*)$ povežemo bridom ako su strane koje odgovaraju vrhovima susjedne. Nadalje dodajemo petlju iz vrhu u G^* za svaki most iz G na granici odgovarajuće strane. Svaki brid iz G^* nacrtan je tako da presijeca odgovarajući brid u G, ali ne presijeca drugi brid u G ili G^*. Dobiveni dual G^* je planaran, a budući da sadrži petlje i paralelne bridove nazivamo ga multigraf. Ako sada svaki skup paralelnih bridova zamijenimo sa po jednim bridom i obrišemo sve petlje, dobit ćemo graf G' koji zovemo dualni graf od G.
Na sljedećoj slici vidimo graf G, njegov planarni dual G^* i dualni graf G'.



Slika 2.9 Postupak nalaženja dualnog grafa G'

Možemo reći sljedeće:

- Ako je G povezani planarni graf tada je $(G^*)^* = G$
- Svaki povezani planarni graf je dualni graf nekog povezanog planarnog grafa
- Planarni graf G je k - obojiv za neki $k \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je njegov dualni graf k - obojiv

Poglavlje 3

Primjena bojenja na praktične probleme

3.1 Problemi raspoređivanja

Mnogi problemi u praktičnom životu mogu se riješiti pomoću bojenja grafova. Jedan od primjera je izrada rasporeda za nastavu na fakultetu. Dva kolegija koje sluša ista grupa studenata ne smiju biti zakazana u istom vremenskom intervalu. Problem određivanja najmanjeg broja sati kako bi se održala nastava iz svih kolegija u stvari je problem bojanja grafova.

Uzmimo da je S skup svih studenata, a I skup svih kolegija. Za svaki kolegij x∈I neka je S_x skup svih studenata koji slušaju kolegij. Dva se kolegija x i y moraju održati u različcitim terminima ako i samo ako $S_x \cap S_y \neq \emptyset$. Konstruirat ćemo graf G čiji je skup vrhova V(G)=I, a dva vrha $x, y \in I$ spojimo bridom ako i samo ako se pripadni podskupovi S_x, S_y sijeku. Tada bojenje grafa G sa k boja odgovara rasporedu predavanja u k - termina bez konflikata. Sva predavanja obojana istom bojom sada se mogu održati u istom terminu. Dakle najmanji broj termina bez konflikata jednak je kromatskom broju $\chi(G)$ grafa G.

3.2 Dodjela frekvencije

Imamo mrežu odašiljača gdje svaki odašiljač mora imati svoju radio frekvenciju. Ako dva odašiljača koja su prostorno blizu imaju istu frekvenciju postoji mogućnost interferencije. U najjednostavnijem modelu takvi odašiljači trebaju imati različite frekvencije, a cilj nam je koristiti što manje frekvencija. Odašiljače možemo predstaviti vrhovima grafa, a brid povezuje dva vrha ako i samo ako među njima postoji mogućnost interferencije.

Frekvencije tada odgovaraju bojama koje treba dodijeliti vrhovima uz uvjet da susjedni vrhovi moraju biti različite boje.

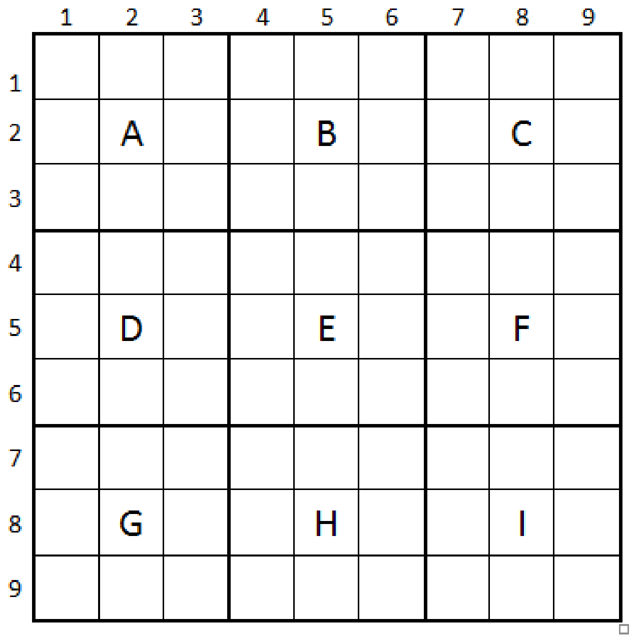
3.3 Sudoku slagalica

Možda ne tako važnu, ali u svakom slučaju zanimljivu primjenu bojanja grafova možemo vidjeti u popularnoj križaljci sudoku. Križaljka se sastoji od kvadratnog polja dimenzija 9 x 9 koje je podijeljeno u 9 podpolja dimenzija 3 x 3. Primjer je prikazan na slici 3.1. Križaljka je zadana kao djelomično popunjena znamenkama od 1 do 9. Cilj nam je ispuniti prazna polja znamenkama od 1 do 9 tako da se u svakom retku polja i svakom stupcu polja te u svakom od 9 označenih podpolja znamenka od 1 do 9 pojavljuje točno jednom.

	5		7					8
		3		5	4		7	
2		9	3			5		4
		5	1		2	4		
3	4							7
			4	3		9		5
		2					5	6
	3		6		5	8		2
5	9			2	3			

Slika 3.1 Sudoku križaljka

Da bismo mogli ovaj problem formulirati kao problem bojenja grafova, prvo ćemo označiti retke i stupce polja znamenkama od 1 do 9 te podpolja slovima od A do I kako je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2 Sudoku kao graf

Sada zadanu sudoku križaljku možemo predstaviti kao $9-$ bojenje grafa sa 81 vrhom (po jedan vrh za svaki kvadratić u polju) tako da se najprije zadaje djelomično $9-$ bojenje. Vrhovima ćemo dodijeliti oznake prema položaju odgovarajućih kvadratića u polju na sljedeći način: svaki vrh određen je uređenom trojkom (x, y, z) gdje je x oznaka retka, y oznaka stupca i z oznaka podpolja kojem odgovarajući kvadratić pripada. Brid postoji između dva različita vrha (x, y, z) i (x', y', z') ako i samo ako je ispunjen barem jedan od sljedećih uvjeta:

1. x = x' (nalaze se u istom retku)
2. y = y' (nalaze se u istom stupcu)
3. z = z' (nalaze se u istom podpolju)

Rješenje zadane križaljke ovako smo sveli na pravilno $9-$ bojenje grafa koji smo konstruirali.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je bojenje grafova. Sastoji se od tri veća poglavlja.

U prvom poglavlju definirani su osnovni pojmovi teorije grafova.

Drugo poglavlje sadrži povijesni razvoj ovog dijela Teorije grafova te je dana podjela bojenja grafova i to na bojenje vrhova, bojenje bridova i bojenje karata. Ove tri cjeline nisu strogo odvojene budući da probleme bojenja bridova i bojenja karata možemo svesti na problem bojenja vrhova, no svaki dio ima specifičnosti.

Treće poglavlje sadrži neke praktične primjene bojenja grafova. Navedeni su problemi formiranja rasporeda, određivanja frekvencija te rješavanje popularne križaljke sudoku.

Summary

The theme of this thesis is graph coloring. It consists of three major sections.

Section 1 mostly contains terminology and notation used in this paper.

Section 2 is the main part of this work. It starts with and covers historical development of graph coloring and covers vertex coloring, edge coloring and map coloring. These topics are not strictly separated since the problems of edge coloring and map coloring can be observed as vertex coloring but each part has specific features.

Section 3 contains applications of graph coloring on scheduling problems, bandwidth allocation to radio stations and solving the popular Sudoku puzzle.

Literatura

[1] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[2] M. Osvin-Pavčević, *Uvod u teoriju grafova*

[3] Gary Chartrand, Ping Zhang, *Chromatic Graph Theory*, 2008.

[4] http://www.geom.uiuc.edu/ zarembe/graph3.html

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Graphcoloring

[6] http://mathworld.wolfram.com/GraphColoring.html

[7] http://www.halapa.com/pravipdf/boje4.pdf

Životopis

Iva Gregurić rođena je 13.04.1983. godine u Našicama. Osnovnu školu A. Harambašić završava u Donjem Miholjcu i nakon toga upisuje Opću gimnaziju u Donjem Miholjcu. 2001. godine završava srednju školu i upisuje prvu godinu dodiplomskog studija na Sveučilištu J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, smjer matematika i informatika.