Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Nikolina Jakovljević**

# Učenje i poučavanje algebre

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Nikolina Jakovljević**

# Učenje i poučavanje algebre

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

# Sadržaj

# Uvod

Riječ algebra izvedena je iz arapskog, točnije iz naslova djela *Hisab al-jabr w'al-muqabala* prvog velikog arapskog matematičara Al-Khwarizmija koji se ujedno smatra i ocem algebre.

Algebra je bitan dio matematike i sve više se naglašava njezina važnost u školskom matematičkom kurikulumu. Ona je moćan alat za rješavanje problema stvarnog svijeta. Motivirati učenike je ključan faktor za uspješnu nastavu matematike. Ako nismo uspijeli pridobiti pozornost učenika, motivacija opada i glavna svrha nastave postaje riješiti test. Kao što mnogi učitelji matematike znaju, većina učenika ne razumije ideje, ne vidi smisao u učenju algebre i ne vidi njezinu korisnost i svrhu. Zbog toga algebru treba sagledati kao način rješavanja zadataka koji učenicima imaju neku važnost. Bitno je povezivati ideje i zadatke s nečim konkretnim i poznatim te da to nešto proizlazi iz matematike.

U prvom poglavlju ovog rada istražit ćemo što algebra treba naučiti učenike i kako učenici mogu učiti algebru s većim uspjehom i užitkom. U drugom dijelu govorit ćemo o razumijevanju, pogrešnim shvaćanjima i greškama koje su vrijedni pokazatelji učeničkog razumijevanja. Govorit ćemo i o još jednom važnom elementu uz razumijevanje algebre, a to je postizanje tečnosti te o ulozi tehnologije u učenju algebre. Posljednji dio ovog rada rezerviran je za kreiranje i rješavanje jednadžbi. Promatrat ćemo kreiranje i rješavanje lineranih jednadžbi, sustava linearnih jednadžbi, kvadratnih jednadžbi i neke pogreške i poteškoće na koje učenici nailaze pri rješavanju kvadratnih jednadžbi.

# 1 Učenje i poučavanje algebre

## 1.1 Zašto učiti algebru?

Za većinu laika osnovna karakteristika algebre je u njezinom korištenju simbola, no dati objašnjenje što algebra jest i koja je njezina svrha većini ljudi bi predstavljalo teškoću. Zaista, mnogo profesora matematike smatraju poteškoćom odgovoriti na pitanja koja učenici uvijek iznova ponavljaju: "Zašto učimo algebru?" i "Koja je svrha?". Nažalost, iskustvo koje mnogi ljudi imaju što se tiče školske algebre ne pokazuje ono što algebre jest. Pitanja nadolaze jer ljudi stječu vrlo usku i ograničenu sliku samog predmeta.

Algebra svoje korijene ima i u aritmetici i u geometriji i razvila se kao jezgrovit sustav simbola za opisivanje odnosa. Na osnovnoj razini ovi odnosi obično uključuju brojeve i njihovo osnovno obilježje je izricanje općenitosti. Kada pogledamo brojeve $3, 6, 9, 12$ i $15$, naša reakcija je tablica množenja broja 3 ili višekratnici broja 3. Znamo da se niz nastavlja sa $18, 21, 24$ i da ćemo, nastavimo li dovoljno daleko, stići do 99 ili 300 ili čak 3 milijuna. Naše shvaćanje uzorka je čvrsto i ovo je ta generalizacija koju algebra želi objasniti i s njome raditi. Vidimo da tablica množenja brojem 3 raste 'po tri' ili još više da je svaki broj u tablici 'tri puta nešto', te nam to omogućuje da s lakoćom kažemo da je 300 stoti član u nizu jer je $3 \cdot 100$. Iako nema potrebe izricati tako jednostavan problem algebarskim pojmovima, samo mišljenje koje je uključeno je algebarsko. Ovo 'nešto' je varijabla koja vrijedi za sve pozitivne cijele brojeve i često je označena s $n$. Prema tome 'tri puta nešto' će biti zapisan kao $3n$, a primjećivanje da je 300 stoti član u tablici proizlazi iz nesvjesnog rješavanja jednadžbe $3n = 300$.

Sposobnost da se opći odnosi među brojevima izraze simbolima je prilično istaknuta. Jednom kada znamo da su svi brojevi u tablici množenja brojem tri 'tri puta nešto' ili '$3n$' možemo odrediti bilo koji broj u nizu i iskoristiti to znanje da riješimo probleme i objasnimo iznenađujuće veze između brojeva.

Na Slici 1. vidimo rezultate dodavanja nekoliko raznih skupina od tri uzastopna broja. Neobična činjenica o rezultatima je da je svaki višekratnik broja 3 i možemo pretpostaviti da zbrajanjem tri uzastopna broja uvijek dobivamo višekratnik broja 3. Ali kako možemo u to biti sigurni? Algebarskim riječnikom, korištenjem varijable

$n$ za označavanje bilo kojeg pozitivnog cijelog broja, tri uzastopna broja mogu biti izražena kao $n, n+1$ i $n+2$.
Zbrajajući ove vrijednosti dobivamo:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

| | |
|---|---|
| $1+2+3=6$ | $7+8+9=24$ |
| $3+4+5=12$ | $9+10+11=30$ |
| $49+50+51=150$ | $22+23+24=69$ |

Slika 1: Zbroj tri uzastopna broja

Opća formula $3n+3$ govori nam i nešto više od toga da bilo kada, kada zbrojimo tri uzastopna broja dobivamo višekratnik broja 3. S obzirom na to da $3n+3$ možemo zapisati i kao $3(n+1)$, možemo vidjeti koji višekratnik broja 3 je ovdje uključen: 3 puta $n+1$ što upravo označava srednji broj.

Očito je da je svojstvo uzastopnih brojeva jednostavno i može biti objašnjeno bez pribjegavanja algebri, ali ono prikazuje neke ključne aspekte algebarskog argumenta. Simbolički izraz je postavljen tako da prikazuje tri uzastopna broja te se transformira u dva različita ekvivalentna oblika koja pružaju informacije za objašnjenje i proširenje svojstva predložena u numeričkim primjerima.
Općenito, svaki algebarski argument ima trodijelnu strukturu:

- prikazivanje elemenata situacije u algebarskom obliku
- transformiranje simboličkih izraza na neki način
- interpretacija novih oblika koji su proizašli.

Izražavanje elemenata situacije u simboličkom obliku čini lakšim prenošenje transformacije na drugu razinu. Prije razvoja našeg modernog sustava simbola, koji je naširoko korišten od strane Descartesa u 17. stoljeću, argumenti su bili prikazani

ili u verbalnom obliku ili u obliku svojstava geometrijskih dijagrama. Otkriće simboličke algebre bio je značajan proboj koji je učinio lakšim razumijevanje i rad na kompleksnim situacijama.
Bit algebre je taj da koristi ekonomičan i dosljedan sustav simbola pomoću kojih se predstavljaju izrazi i veze koje su zatim korištene u formuliranju argumenata koji se tiču predviđanja, rješavanja problema, objašnjenja i dokaza. Predviđanje često uključuje pronalaženje prikladne funkcije koja zatim može biti procijenjena, rješavanje problema uključuje postavljanje i rješavanje jednadžbe, dok objašnjenje i dokazi zajednički uključuju uspostavljanje i interpretaciju algebarskog identiteta.
Postoje dva opširna razloga razloga koji zagovaraju učenje algebre: prvi da je korisna, a drugi da je zanimljiva. Algebra je očito korisna u pravom smislu onima koji rade na poljima kao što je znanost, tehnologija, računalstvo i naravno poučavanje matematike. Samo manjina studenata će pronaći zaposlenje ovakve vrste, iako nije jasno tko će biti u ovoj manjini sve dok ne dosegnu kasnije stupnjeve školovanja, no važno je da su im mogućnosti otvorene. Međutim, većina će imati malo izravne koristi algebre u poslu ili igri i bilo bi varljivo tvrditi drugačije.
Algebra je također korisna u dva manje izravna smisla:

- pruža vrijednu vježbu vještini mišljenja i poštovanje prema rigoroznim argumentima

- daje uvid u objašnjenje raspona raznih fenomena u svijetu.

Prvi razlog nije dovoljan jer se isto može tvrditi za druge aspekte matematike i, zaista, za većinu, ako ne i sve druge školske predmete. Drugo je istinito u smislu da građani koji su informirani i zainteresirani za svijet mogu više doprinijeti društvu i možda voditi zadovoljavajuće živote, naznačeno od Usiskina koji je pokazao vrijednost učenja jezika zemlje koju posjećujete: *"Ako posjetite Meksiko, ali ne znate španjolski, možete se slagati, ali nikada nećete moći cijeniti bogatstvo kulture i nećete moći naučiti najviše što možete kao što biste mogli kad biste znali španjolski...I, možda najvažnije, nećete znati što ste možda propustili."* (Usiskin, 1991.)
Ovo, međutim, odražava drugi, širi razlog za učenje algebre koji je taj da je ona zanimljiva po sebi, kao i na račun svoje korisnosti. Ne tražimo djecu da uče o glazbi, umjetnosti i književnosti jer su one korisne, nego zato što su potencijalno zanimljive i ugodne. One daju uvid u drugačije aspekte ljudskog djelovanja. Isto je istinito i za matematiku i za njezinu glavnu komponentu, algebru.

Rastužuje to što znamo da je svaki prijedlog da je algebra korisna i zanimljiva u neslaganju sa iskustvom mnogih učenika, čak i kada su relativno uspješni u svladavanju zahtjeva školskog kurikuluma. Nismo jako uspješni u priopćavanju učenicima prave naravi i moći algebre u predviđanju i rješavanju i dokazivanju. Ovaj neuspjeh lišava ih mogućnosti da odaberu je li učenje algebre nešto čime se trebaju baviti. Cockcroft je rekao da je "matematika težak predmet za učenje i poučavanje" i da se isto još više može reći za algebru. U sljedeće dva dijela ovog poglavlja istražujemo što algebra treba naučiti učenike, i ključno pitanje ovog diplomskog rada, kako učenici mogu učiti algebru s većim uspjehom i užitkom.

## 1.2 Što algebra treba naučiti učenike?

Čini se da postoji naročito širok konsenzus diljem svijeta u vezi sadržaja školskog kurikuluma za algebru. Engleski nacionalni kurikulum (The English National Curriculum) koji sadrži uvodna poglavlja koja se odnose na rješavanje problema, informiranje i razumijevanje i detaljniji odabir sadržaja za algebru na ključnoj četvrtoj razini (od 14 do 16 godina), a s kojom se učenici ne susreću u potpunosti ima sljedeće podnaslove: korištenje simbola, obilježavanje znakova, jednadžbe, linearne jednadžbe, formule, izravne i obrnute proporcije, sustavi linearnih jednadžbi, kvadratne jednadžbe, sustavi linearnih i kvadratnih jednadžbi (od svake po jedna), brojčane metode, nizovi, grafovi linearnih funkcija, tumačenje informacija iz grafova, kvadratne funkcije, druge funkcije (koje uključuju kubne, recipročne funkcije, jednostavne eksponencijalne funkcije i trigonometrijske funkcije), transformacije funckija.
Kurikulum post-16 za naprednu matematiku, koju sluša oko 10 posto učenika, proširuje ovo dalje i uključuje račune s polinomima, racionalnim, trigonometrijskim, eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama.
U SAD-u Principi i standardi školske matematike, u odlomcima o algebri od 6. do 8. razreda (11-14 godina) i od 9. do 12. razreda (14-18 godina) tvrdi se da programi trebaju omogućiti učenicima da:

- razumiju uzorke, odnose i funkcije
- predstave i analiziraju matematičke situacije i strukture korištenjem algebarskih simbola
- koriste matematičke modele za predstavljanje i razumijevanje kvantitavnih

odnosa

- analiziraju promjene u raznim okolnostima.

Ove tvrdnje su proširene sa popisom očekivanja koji, iako nije toliko detaljan kao Engleski nacionalni kurikulum, pokriva sličan raspon tema, uključujući pojmove koji se pojavljuju u Engleskom nacionalnom kurikulumu za više razine no, kao i u Engleskoj, manji broj učenika se susreće sa cijelim kurikulumom.
Hrvatski nacionalni okvirni kurikulum (NOK) uključuje sljedeće sadržaje iz algebre podijeljene po ciklusima:

1. ciklus - algebra ne postoji u ovom ciklusu

2. ciklus (5. i 6. razred) - brojevni pravac (prikaz cijelih brojeva i jednostavnijih racionalnih brojeva zapisanih kao razlomak ili decimalni broj), pravilnosti vezane uz brojeve, rabiti slova u zaspisivanju formula i izraza, jednostavne linearne jednadžbe, riješiti jednostavni problemski zadatak, proporcionalne veličine i omjeri

3. ciklus (7. i 8. razred) - postoci i postotni račun, prepoznati i primijeniti proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost, prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina, linearne jednadžbe i sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, prevesti jednostavni problem u algebarske simbole

4. ciklus (strukovno obrazovanje) - primjena postotka i postotnog računa, uvrštavanje konkretnih vrijednosti u formule, prepoznati i primijeniti proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost, opisati i izvesti jednostavne veze dviju veličina, linearne jednadžbe i nejednadžbe i sustavi dviju linearnih jednadžbi, prepoznati i interpretirati karakteristična svojstva i točke jednostavnih grafova, primjenjivati linearne jednadžbe i nejednadžbe i sustave dviju linearnih jednadžbi u modeliranju situacija iz svakodnevnog života
   (gimnazije) - aritmetički i geometrijski niz, uvrstiti konkretne vrijednosti u formulu, izraziti jednu veličinu u formuli pomoću ostalih, potencije, jednostavni algebarski izrazi, faktorijeli, binomni koeficijenti, opisati i izvesti jednostavne veze dviju veličina, linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te pripadne jednadžbe i nejednadžbe te sutavi jednadžbi, primjenjivati funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju problema iz matematike i svakodnevnog života.

Unatoč tome što postoji rasprostranjeno slaganje o temama koje trebaju biti uključene u kurikulum za algebru, ipak postoji mnogo manja jasnoća o raširenim problemima koji se tiču ciljeva i konteksta u kojem se algebarske ideje trebaju predstaviti. Rješavanje problema se smatra vrlo važnim, no postoje bitne razlike u tome što ljudi misle kada govore o problemima i ima jako malo slaganja o tome kako učenicima najbolje pomoći da nauče rješavati problem samostalno. Bit problema je taj da ne znamo kako riješiti problem kada se prvi put sretnemo s njim zato što, da ga znamo riješiti, on tada uopće ne bi bio problem! Mnogo takozvanih problema u udžbenicima nisu uopće problemi; oni su izravne primjene rutinske procedure koja je bila izvježbana ili prikazana u strukturiranom formatu koji postavlja korake koji su potrebni za rješavanje problema. Unatoč tome, čak i kad su dane detaljne instrukcije kako riješiti problem, neki učenici i dalje neizbježno nailaze na poteškoće. Očito da ovi problemi nisu jasni niti jednostavni. Nečiji rutinski zadatak za nekoga može biti problem. Ako mlađi učenik ne zapamti koliko je $7 \cdot 8$ i ako nema neposrednu strategiju za rješavanje, tada je to problem, ali ako uoči da može početi sa 8 i dodavati još osmica, problem prestaje biti problem. Drugi učenik koji se susreće sa istim problemom može odlučiti rješavati problem naopako počevši sa $10 \cdot 8$ ili dodati 8 na 49 jer se sjeća da je $7 \cdot 7$. Prepoznat ćemo da je drugi učenik pokazao sofisticiraniju metodu rješavanja problema, unatoč tome što bez sumnje žalimo da ova važna činjenica nije bila zapamćena na početku. Rješavanje problema nije samo stvar traženja rješenja, već stalna težnja ka ekonomičnijim i elegantnijim putevima ka rješenjima. Ovo se odnosi na rane stupnjeve učenja aritmetike pa sve do zahtjevnijih problema na predavanjima iz algebre.
Pomažući učenicima da postanu bolji u rješavanju problema je važan cilj u učenju algebre. To je mnogo teže postići nego znanje o korištenju rutinskih algebarskih vještina, iako se čini da je i to dosta teško. Rješavanje problema ne može biti poučavano kao zasebna vještina. Ona mora biti učena zajedno sa ostalim stvarima kao postupna nadogradnja iskustva kroz usvajanje spektra strategija. Stoga, pojava fraze 'rješavanje problema' koja je na popisu zahtjeva kurikuluma mora biti istumačena kao dugotrajan cilj koji prožima cjelokupno učenje algebre.

## 1.3 Kako učenici trebaju učiti algebru?

Postoji snažna prevladavajuća tradicija u poučavanju algebre u kojoj profesor uvodi učenike u novu temu demonstrirajući 'radne primjere' i zatim pokušava

učvrstiti procedure kroz iscrpne vježbe. Ove vježbe su najčešće izolirane od aktivnosti koje mogu dati svrhu i smisao algebarskim idejama i operacijama. Iako postoji već rastući naglasak na traženje uzorka brojeva i grafičkog kalkulatora ili programa za crtanje grafova, ove aktivnosti nemaju nikakav značajan utjecaj na pristupe vještinama učenja ili korištenju algebre u svrhu rješavanju problema i objašnjavanju svojstava brojeva. Inovacije često postaju dodatci kurikulumu koji ili istiskuju neku postojeću praksu ili su nezgodno postavljeni uz nju.
Način na koji se algebra poučava je uvelike pod utjecajem učiteljevih vjerovanja o prirodi predmeta i kako ga učenici trebaju učiti, ali i gomilom vanjskih pritisaka. Ne postoji krajnji odgovor na pitanje kako učenici trebaju učiti algebru, ali se može ukazati na prirodu poteškoća kritički promatrajući trenutne rezultate istraživanja i promatrajući prakse u svjetlu dokaza koje one pružaju. Postoji temeljna nelagoda za učitelje promatrati matematiku kao tijelo znanja i kao način mišljenja. Prva vodi do popisa tema koje se na neki način daju učenicima, a zadnja vodi do nešto nejasnih zahtjeva za rješavanje problema i dokazivanje. Nema rasprave o tome koji se od ova dva elementa mora odabrati jer su oba važna, ali smo daleko od toga da se uspostavi ravnoteža između njih.
Tradicionalni pristupi poučavanju algebre su karakterizirani kao provođenje mnogo vremena na vještinama učenja prije nego što ih primijenimo na probleme. Oni teže prema davanju prednosti znanju te na način mišljenja gledaju kao na nešto što slijedi nakon usvajanja tog znanja. Alternativa je započinjanje s problemima koji će biti povezani s određenim temama, a zatim naučiti važne ideje i vještine kroz rad na tim problemima, tako da se dolazi do toga da se na matematiku gleda kao na nešto o čemu se zapravo treba razmisliti i dati smisao prije zapamćivanja skupa pravila.
Swan opisuje neke ideje za predavanje algebre stvorene za ohrabrivanje učenika da 'konstruiraju i razmišljaju o smislu izražavanja i jednadžbi ' naročito kroz raspravu. Tipičan zadatak se sastojao od skupa kartica, od kojih neke sadrže algebarske izraze, a druge odgovarajuće pisane izjave. Namjera je bila ta da su učenici trebali raditi u manjim grupama i odabrati parove kartica te objasniti svoj odabir. U vrednovanju utjecaja ovih materijala ukazalo se na važnost stvaranja prikladne kulture razreda uspoređujući dva profesora koja su koristila iste materijale. Prvi je dao manje uputa za zadatke i učenici su 'jednostavno radili samostalno... kao da je to bila vježba zadatka i jako malo su naučili'. Drugi profesor je jasno iznio svrhu zadatka i naglasio potrebu da se uzme vremena i razmisli što stvari znače, radije nego da se samo riješe zadaci. Ovaj je profesor 'raspravio o razlikama između rada

za *tečno* rješavanje (što zahtjeva vježbu) i za *razumijevanje* značenja (što zahtjeva raspravu - da se uvidi drugačije stajalište)'. Također je objasnio svojim učenicima da se nekada treba raditi i nikada zapravo 'završiti'. Swan komentira da je tijekom vremena mnogo učenika razvilo svjesnost o drugačijim 'načinima znanja nečega' i načine kako ih razviti samo za sebe.

Cilj algebre je uravnotežiti ova dva važna elementa tečnosti i razumijevanja u svrhu toga da algebra postane pristupačnija i bliža. Ona se temelji na čvrstom vjerovanju da će učenici učiti i koristiti algebru učinkovito ako su stalno izazvani na to da sami razmišljaju. Ovo ukazuje na to da problemi i objašnjavanje uloga dokaza trebaju biti uključeni na svakom stupnju učenja algebre i da rasprava i osvrt imaju važnu ulogu zajedno sa konvencionalnim pisanim zadacima. Bilo bi možda prikladno organizirati kurikulum i poučavanje na esencijalno linearan način, ali ne smijemo se zavaravati da će učenje slijediti isti put. Nesigurnost i nepredvidljivost puteva kojim učenje može krenuti je ono što čini poučavanje frustrirajućim i zahtjevnim zadatkom, ali je i jedan od razloga zašto ono može biti poticajno i beskrajno zapanjujuće.

# 2 Smisao i besmisao algebre

## 2.1 Razumijevanje

Mnogi učenici ne pronalaze puno smisla u algebri te im je nedostatna kako u značenju tako i u svrsi. Motivacija opada kada učenici ne razumiju ideje te jedina svrha predmeta postaje riješiti test. Pretpostavka da će im algebra biti korisna kasnije kada više nauče ne dovodi do entuzijazma ako trenutni zadaci ne pobuđuju interes. To nije ograničeno samo na one koji su neuspješni u algebri. Arcavi primjećuje da se to može primijeniti i na one uspješne: *"Čak i oni koji uspješno savladavaju tehnike, često ne vide algebru kao alat za razumijevanje, izražavanje i priopćavanje generalizacija, za otkrivanje struktura i utvrđivanje veza te formuliranje matematičkih argumenata."*

U ranoj fazi učenici krivo shvate značenje koje se pridaje slovima, izrazima i jednadžbama. Iako se proteklih godina puno radilo na pobuđivanju zanimljivih pristupa algebri, osobito istraživanjem uzoraka brojeva, to ne donosi plodove baš svaki put. Pronalaženje formule za predstavljanje uzorka ne bi trebalo biti krajnja točka zadatka, već nastavak rada na proširivanju moći algebarskih ideja te motiviranje razvoja primjerenih vještina koje učenici mogu koristiti u rješavanju zanimljivih zadataka. Mnogi udžbenici osiguravaju bezbrojne vježbe nevezane uz smisleni kontekst. To stavlja naglasak na postupke pamćenja umjesto da ostvaruje vezu između slova i brojeva i razvija razumijevanje ideja i njihovu primjenu.

Razumijevanje je važan element u učenju i poučavanju matematike te se to isto odnosi i na algebru kao osnovni dio matematike. Ideja razumijevanja nije toliko jasna koliko bi njezina svakodnevna primjena to sugerirala jer različiti ljudi razmišljaju na različite načine. Skemp kaže da treba razlikovati dvije vrste razumijevanja: instrumentalno i relacijsko razumijevanje. Instrumentalno razumijevanje je vezano uz znati kako ("pravila bez razloga"), dok relacijsko razumijevanje uključuje i znati kako, ali znati i zašto. Instrumentalno razumijevanje je relativno površna kvaliteta koju se promatra kada se rutinski zadatak uspješno riješi, dok je relacijsko razumijevanje profinjenije te nikada ne završava. Razvija se i produbljuje dok se ideja iskušava na različite načine i povezuje s drugim idejama. Za učenje matematike je bitno postići relacijsko razumijevanje, no to nije ni jednostavno ni lako.

Često dolazi do neusklađenosti učitelja i učenika kada se radi o primjerenom razumijevanju u učenju matematike. Učitelj može raspravljati o matematičkim idejama i postavljati zadatke s namjerom pobuđivanja relacijskog razumijevanja dok istovremeno učenik želi razumijeti samo instrumentacijski tako da traži da zapamti samo postupke koji daju točan odgovor na zadatke u vježbama i ispitivanjima. Često nailazimo na učenike koji na matematiku gledaju samo kao na formule i postupke koji se pamte, ali ne razumiju. Razlog tome može biti jer su im predavali učitelji koncentrirani isključivo na instrumentacijsko razumijevanje, no do toga može doći i unatoč učiteljevim naporima u poticanju dubokoumnijih odgovora jer učenje obuhvaća puno faktora. Do neusklađenosti također dolazi kada učitelj instrumentacijski podučava učenika koji želi razumijeti i relacijski, dakle, zašto je nešto tako. Algebarsko razumijevanje je povezano s prijašnjim učeničkim razumijevanjem brojeva i numeričkih operacija obzirom da se algebra na osnovnoj razini bavi s općenitim aritmetičkim vezama. Veze između simboličkih i numeričkih rezultata se stalno moraju obnavljati. Razumijevanje negativnih brojeva i razlomaka i operacije s njima su bitni pokazatelji učenja mnogih aspekata algebre. Poteškoće s njima su često dovoljna barijera napretku. Stoga je važno prepoznati neke poteškoće te istražiti načine na koje se te poteškoće mogu razriješiti.

## 2.2 Pogrešna shvaćanja i greške

Pogrešna shvaćanja i greške su vrijedni pokazatelji stanja učeničkog razumijevanja te daju važne informacije na kojima učitelji mogu nadograđivati ideje i zadatke. Poneka pogrešna shvaćanja se često pojavljuju i naširoko prepoznaju, no učenici ih često ne shvaćaju te ne razaznaju njihove uzroke. Glavna poteškoća s algebrom, osobito u ranijim fazama, leži u učenju primjerenog značenja simboličkih izjava te većina pogrešnih shvaćanja proizlazi iz toga.
Kent daje primjer učenice Margaret koju je zbunila jednadžba $3x - 7 = 5$ i nikako ju nije mogla riješiti, no tada je samouvjereno izjavila da $\frac{3x}{4} - 6 = 2$ ima rješenje 2 i da nema smisla pokušati riješiti $x + 3 = 15$. U drugom je slučaju Margaret rekla da $3x$ znači 'trideset i nešto' pa je $x = 2$ činio 32 što je po njoj bilo točno rješenje. Obzirom da je $x$ interpretirala kao znamenku na ovaj način, jasne su i njezine poteškoće s preostala dva primjera jer oduzimanje 7, od 'trideset i nešto' ne daje 5, a za rješavanje $x+3 = 15$ potreban je broj od dvije znamenke. Margaret ima savršeno dosljedan način pridavanja značenja ovdje korištenim izrazima, no ono je u sukobu s konvencionalnom interpretacijom. Poteškoće ovdje nastaju zbog nizanja brojeva. Kako objasniti dva simbola, 2 i $x$, kada stoje jedan pored drugoga? Učitelji često kažu učenicima da $2x$ znači $2 \cdot x$, ali nizanje omogućuje raznolikost različitih

interpretacija u različitim kontekstima kako unutar matematike tako i na drugim područjima te je potrebno naučiti pravila. Zbunjenost je jasna ako čitatelj promotri značenja koja mogu biti sadržana u svakom od sljedećeg:

$$27 \quad 2p \quad 2^3 \quad 2g \quad 2\tfrac{1}{2} \quad 2A$$

Primjerice, $2g$ može značiti 2 grama, $2\frac{1}{2}$ znači $2+\frac{1}{2}$, a $2A$ može značiti broj stana ili zadatka u udžbeniku.
Istraživanje koje je proveo CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), a o kojem je izvjestio Hart dokazalo je nižu razinu rješavanja algebarskih zadataka koji uključuju pojednostavljivanje. U velikom uzorku učenika pokazano je da 77% trinaestogodišnjaka i 87% petnaestogodišnjaka zna pojednostaviti $2a+5a$ dok samo 22% i 41% točno riješi zadatak $3n+4$. Učenici često misle da slova zamjenjuju neki objekt te ih to dovodi da $2a+5a$ interpretiraju kao zbrajanje dviju i pet jabuka što im daje točan odgovor od $7a$. No, ta im vrsta interpretacije ne pomaže kod $3n+4$, a izraz $bc$ je posve beznačajan ako $b$ i $c$ smatraju bananama i ciklama. Dakle, povezivanje slova s nazivima predmeta nije dobra strategija u ranijim fazama učenja algebre.
Na jednom satu je 12-godišnji učenik napisao da je $7k$ rezultat pojednostavljivanja $2k+k+4$. Učitelj je imao poteškoća pokazati što je pogrešno. Ako učenici tumače $k$ kao klokane onda im je instinktivna misao '4 čega' što daje odgovor 4 klokana, a sve zajedno $7k$. Kada je to povezano sa činjenicom da $3k+4$ ne izgleda kao učenikov odogovor to možda i ne čudi da se pojavljuju takve greške. Međutim, ako se $k$ podrazumijeva kao broj tada zamjenjujući neke vrijednosti u izrazima $2k+k+4$, $3k+4$ i $7k$, na Slici 2. jasno se vidi da prva dva izraza nisu ekvivalentna posljednjem.

| $k$ | $2k+k+4$ | $3k+4$ | $7k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 | 7 |
| 2 | 10 | 10 | 14 |
| 3 | 13 | 13 | 21 |
| 4 | 16 | 16 | 28 |
| 5 | 19 | 19 | 35 |

Slika 2: Zbrajanje za otkrivanje pogreške

Nije dovoljno jednostavno reći učeniku da je njegov odgovor pogrešan pa onda pokazati način postupka. Učenici moraju shvatiti zašto rješenje nema smisla te razviti razne načine provjere kako bi odlučili je li odgovor točan ili u najmanju ruku uvjerljiv. Pogrešna shvaćanja i greške su važne za napredak učenika pokaže li im se da su u sukobu s rezultatima dobivenim različitim pristupima zadatku. Na najnižoj razini to podrazumijeva poticanje učenika na preispitivanje razumnosti rješenja. No, vješt učitelj može namjerno odabrati sukob kako bi potaknuo učeničko razmišljanje.

Do zbunjenosti interpretiranjem slova kao predmeta može doći na više načina. Često citirani primjer dolazi od Clementa, koji je zamolio studente da naprave jednadžbu koja se odnosi na $s$, broj studenata, i na $p$, broj profesora uz izjavu: *Na ovom sveučilištu je* 6 *puta više studenata nego profesora.* Učestala pogreška je bila $6s = p$ umjesto točnog oblika $s = 6p$. Još jedan primjer pogrešnog shvaćanja je kada su na jednom tečaju studenti zamoljeni da napišu formulu koja povezuje $m$, broj milja, sa $k$, brojem kilometara, imajući na umu da 5 milja odgovora 8 kilometara. Dva najučestalija odgovora su bila $5m = 8k$ gdje je $m = \frac{8}{5}k$ i $k = \frac{5}{8}m$ (ili njihov ekvivalentan decimalni zapis). Nakon toga im je postavljeno pitanje koliko bi to iznosilo za 8 milja nakon čega ih je odgovor 5 kilometara zabrinjavao. Dakle, nužno je razmišljati o vezi između skupova brojeva, a ne između riječi. Tvrdnja da je 1 kilometar ekvivalentan $\frac{5}{8}$ milje ključ je dolaska do točne veze u obliku $m = \frac{8}{5}k$.

Još jedno pogrešno shvaćanje ilustrira Slika 3. Nakon što je učiteljica navela razred da primjeti da je svaki broj zdesna manji od odgovarajućeg slijeva, upitala je kako se veza može zapisati ako $x$ predstavlja brojeve slijeva. Umjesto $x \to x - 1$ prvi je odgovor bio $x \to w$ primijenivši činjenicu da slovo $w$ prethodi $x$ u abecedi.

$$\begin{array}{c} x \to ? \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \\ 4 \to 3 \\ 5 \to 4 \\ 6 \to 5 \end{array}$$

Slika 3: Pronađi uzorak

Problem je što učenik mora shvatiti da numerička vrijednost svakog slova slijedi abecedni poredak.

Upotreba znaka jednakosti je još jedan izvor problema. Provedeno je istraživanje koje pokazuje da učenici znak jednakosti interpretiraju kao uputu za određivanje rezultata, a ne kao simbol koji pokazuje jednakost dva izraza. To proizlazi iz prirodnog načina upotrebe znaka jednakosti u mnogim izračunima. To također potiče i prisutnost tipke znaka jednakosti na mnogim kalkulatorima. U aritmetičkom kontekstu, uobičajeno je da učenici zapisuju činjenicu poput $5 + 3 = 8 \cdot 4 = 32$ kako bi izrazili oba koraka, i zbrajanje i množenje, kada im je rečeno da zbroje 5 i 3 i zatim rezultat pomnože sa 4. Točno rješenje zadatka je pronađeno $8 \cdot 4 = 32$, no pisana izjava je netočna jer $5+3$ ne iznosi 32. U algebarskom kontekstu uobičajeno je vidjeti ovakve pogrešne izjave:

$$3x - 5 = 7 = 3x = 12 = x = 4 \text{ i } \cos\theta = \tfrac{3}{5} = 0.6 = \theta = 53.1^\circ.$$

Ovdje znak jednakosti povezuje različite korake. Nije teško razumijeti da se taj znak koristi za pokazivanje da su dva izraza ekvivalentna, no pogreške u njegovoj primjeni su učestale čak i kada učiteljeve pisane izjave i udžbenici daju dobre modele koje učenici trebaju slijediti.
Ove ilustracije jasno pokazuju zbunjenost oko jednostavnih algebarskih ideja koje su vidljive kod učenika kada se testira njihovo razumijevanje. Ne samo da oni zaborave pravila za postupak već im nedostaje i adekvatna i sigurna podloga razumijevanja simbola s kojima rade te temelj za njihove odluke o onome što ima smisla. Problem nije ograničen samo na slabije učenike već i oni napredniji dolaze do ozbiljnih nesporazuma.

## 2.3 Nepoznanice i varijable

Küchemann, kao dio CSMS-a projektu prikazanom u Hartu (1981.), je istraživao različite učeničke interpretacije slova te je proizveo šestodijelnu kategorizaciju koju je opisao kao:

- evaluirano slovo
- neprimijenjeno slovo
- slovo kao objekt
- nepoznato slovo
- slovo kao generaliziran broj

- slovo kao varijabla.

U evaluiranom slovu broj se odmah pripisuje slovu, kao u određivanju da je $a = 3$ kada se da zadatak $a + 5 = 8$. Nisu potrebne nikakve operacije jer se zna da je $3 + 5 = 8$. U drugom slučaju se slovo ignorira kada se pita za vrijednost $a + b + 2$ podrazumijevajući da je $a + b = 43$. Pažnja se tu usmjerava na to da se 2 mora dodati pa se slova mogu ignorirati. U oba slučaja ima smisla da slova zamjenjuju neke brojeve, no ne postoji zamisao da se na slovima mogu vršiti druge operacije osim one da ih se zamijeni brojevima. Treća kategorija, slovo kao objekt, odnosi se na uobičajenu pogrešnu interpretaciju slova kao skraćenice za neki predmet, a ne za broj. Upotreba $b$ i $c$ kao skraćenice za banane i cikle te $m$ i $k$ za milje i kilometre su tipični primjeri ovog fenomena. U ovom slučaju je moguće vršiti operacije na izrazima koje obuhvaćaju slovo, no često će rezultati biti besmisleni. Korisno je koristiti prvo slovo naziva objekta u mnogim algebarskim situacijama, no mora biti jasno da se slovo odnosi na broj koji je na neki način vezan uz taj objekt, a ne odnosi se na sam objekt. Slovo kao nepoznanica se veže uz rješavanje jednadžbi te je u tom smislu točno. No, do sukoba dolazi kada se učenici susretnu s jednadžbama koje imaju više rješenja. Primjerice, Wagner je otkrio da određen broj učenika od 12 do 17 godina nije odmah uvidio da jednadžbe $7w + 22 = 109$ i $7n + 22 = 109$ imaju identična rješenja. Slovo kao generaliziran broj proširuje ideju nepoznanice. Küchemann je pitao: "Što možete reći o $c$ ako je $c + d = 10$, a $c$ je manji od $d$?" Najučestaliji odgovor je bio dati jednu vrijednost, obično 4, no neki su dali i sistemsku listu $1, 2, 3, 4$ što prikazuje slovo kao generaliziran broj. Profinjeniji odgovor je bio $c < 5$, što pokazuje veće razumijevanje ideje o varijabli, iako nije jasno je li svaki broj manji od 5 ili ga se gleda kao nekoliko određenih brojeva. Dan je i odgovor da je $c = 10 - d$ što ponovno implicira da može biti uključeno nekoliko brojeva, no ne uzima u obzir da je $c < d$. Razlika između generaliziranog broja i varijable se čini manje jasnom i manje važnom od one između nepoznanice i varijable. U određenim algebarskim kontekstima dovoljna je ideja slova kao nepoznanice, no ako do učenika dolazi samo ta interpretacija, bit će očita barijera za smislen rad s izrazima i funkcijama. Mnogi učenici otprije imaju barijeru stvorenu prvim trima kategorijama, osobito onim o slovu kao objektu. Na to se treba obratiti pažnju već u ranijim stadijima učenja predmeta te stalno naglašavati ideju slova kao broja, bilo da je nepoznanica ili varijabla.

## 2.4 Izrazi

Ranije smo se osvrnuli na probleme stvorene izrazima poput $3k+4$. Tall i Thomas govore da postoje četiri prepreke u davanju smisla algebraskim izrazima:

- prepreka analiziranja
- prepreka očekivanog odgovora
- prepreka nedostatka zaključka
- prepreka postupak rezultat.

Do prepreke analiziranja dolazi zbog čitanja s lijeva na desno. To dovodi do toga da učenici čitaju $ab$ kao "$a$ i $b$" pritom misleći da ima isto značenje kao $a+b$. Isto tako je prirodno interpretirati $3+4k$ kao $7k$ jer se $3+4$ što je 7 čita prije $k$. Razmišljanje koje vodi od $3+4k$ do $7k$ obuhvaća i druge prepreke. Svo njihovo ranije iskustvo s jednostavnom aritmetikom zahtijeva od učenika određeno računanje kad oni vide operacijski znak poput + pa očekuju odgovor kad vide izraz $3+4k$ - prepreka očekivanog odgovora. Vezano uz to, nisu zadovoljni s $3+4k$ kao odgovorom jer izgleda nepotpun - prepreka nedostatka zaključka. Glavni problem ovdje leži u prirodi izraza poput $3+4k$ što ujedno predstavlja i postupak rezultat. Daje i upute za računanje i predstavlja rezultat tog izračuna u odsustvu određene vrijednosti za varijablu.
Ako se na algebarski izraz gleda samo kao na proces ili recept, tada njihova manipulacija ili povezivanje nema puno smisla te dolazi do nerazumijevanje algebre. To je često razlog neuspjeha mnogih učenika u matematici.

## 2.5 Tečnost

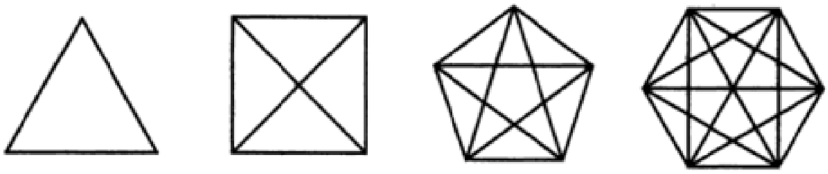
U školskoj algebri se puno vremena troši na uvježbavanje rutinskih vještina poput supstitucija, pojednostavljivanja i jednadžbi kroz stalna ponavljanja. Oni kojima ideje vježbanja nemaju smisla brzo gube tečnost, a oni koji već razumiju kroz stalne vježbe ne produbljuju razumijevanje. Zabrinutost zbog nedostatka tečnosti u algebarskim vještinama među studentima višeg obrazovnja u UK su nedavno izrazili predavači matematike i tehničkih znanosti. Primjerice, izvješće *Tackling the Mathematics Problem* govori o "ozbiljnom nedostatku najbitnije tehničke tečnosti - nesposobnosti tečnog i točnog numeričkog i algebarskog izračuna". Ta zabrinutost je odraz

dugoročnih poteškoća koje imamo u učinkovitom podučavanju matematike općenito, i točnije, algebre. Neki pokušaji da se algebru učini dostupnijom i privlačnijom svim učenicima su rezultirali manjim pridavanjem vremena uvježbavanju vještina nauštrb onih koji su ranije stekli viši stupanj tečnosti. Tečnost u vještinama podrazumijeva da ih mogu koristiti bez svjesne pažnje tako da se um oslobodi za bolje razmišljanje koje je potrebno za rješavanje zadatka. Ako su rutinski detalji u algebarskoj raspravi teški za učenike, teško je usredočiti se na sveukupnu strategiju. Vježba je svakako potrebna za postizanje tečnosti, no ne smije se odvajati od svrha kojima služi.
Hewitt obraća pozornost na "impresivno učenje" do kojeg dolazi kada malo dijete uči hodati te uočava da to traži puno vježbe no većim je dijelom vježba koja se događa dok pokušava postići druge ciljeve kao što je dohvaćanje igračke s druge strane ili istraživanje u parku ili na igralištu. Kao što kaže, vježba je "podređena" glavnom cilju: dijete prohoda dok pridaje pažnju postizanju nečeg drugoga. Usporedo, sati algebre se često fokusiraju na manipuliranje izrazima i rješavanje jednadžbi. Učenika vještine ne osposobljavaju da učini išta što on smatra značajnim. Posljedično, oni ih zaboravljaju te moraju prolaziti kroz beskrajan ciklus ponovnog podučavanja i ponavljanja. Vještine se najbolje uče u smislu viših ciljeva, gdje je fokus pažnje na rješavanju važnih zadataka i istraživanju zanimljivih numeričkih i geometrijskih svojstava.

## 2.6 Osiguravanje konteksta

Jedan od razloga zašto je matematika tako moćna je taj što se može odvojiti od neposrednog konteksta i njegovih elemenata manipuliranih i transformiranih u apstraktnu modu. Kako apstrakcija može djelovati kao određena barijera za mnoge učenike, važno je povezivati ideje sa stvarima koje se čine stvarnima i konkretnima kao i osigurati razloge za predstavljanje svijeta u algebarskom obliku. Algebru treba sagledati kao način rješavanja zadataka koji učenicima imaju neku važnost. Algebra i zapravo cijela školska matematika bi trebala biti predstavljena u kontekstu "zadataka stvarnog svijeta". Ono što je bitno je povezivanje ideja i zadataka s nečim konkretnim i poznatim te da to nešto proizlazi iz matematike. Svi učenici dođu na sate algebre s poznavanjem i brojeva i geometrijskih predmeta te ih se može potaknuti zadacima izgrađenima na tom poznavanju bez očite primjene u stvarnom svijetu. U ranim fazama učenja algebre teško je pronaći orginalne primjere iz stvarnog svijeta koji se ne bi mogli odmah riješiti i bez algebre. To ne znači da bismo

trebali ignorirati stvarni svijet, već da ne trebamo ograničiti svoje primjere ili pomisliti da će primjena u stvarnom svijetu biti motivirajuća za učenike. Rješavanje numeričkog ili geometrijskog zadatka ili objašnjavanje iznenađujućih brojčanih svojstava također može biti motivirajuća i smislena.
Primjer jedne takve motivacije je rad 12-godišnjaka na zadatku pronalaženja veze između broja dijagonala i broja stranica u poligonu. Učenici su nacrtali svoje poligone i rezultate stavili u tablicu kao na Slici 4. Izazov tog sata je bio pronaći



| Broj stranica | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| Broj dijagonala | 0 | 2 | 5 | 9 |

Slika 4: Koliko dijagonala ima poligon?

način za određivanje broja dijagonala u dvadeseterokutu. Učenici su brzo shvatili da će im trebati previše vremena za crtanje svih dijagonala, a da bi brojanje moglo biti pomalo nepouzdano. Uočili su uzorak u razlikama između broja dijagonala te shvatili da je potrebno puno zbrajanja da bi dobili željeni rezultat. Zato su se usredotočili na jednostavniji slučaj šesterokuta te uzeli u obzir broj dijagonala koji izlazi iz jednog njegovog vrha. Postoje 3 dijagonale iz svakog od 6 vrhova pa je izgledalo da je trebalo biti ukupno $6 \cdot 3$ dijagonala, no u tablici je pisalo 9, a ne 18. Daljnja rasprava ih je dovela do saznanja da se svaka dijagonala može izbrojiti dvaput te se stoga 18 mora prepoloviti. Tada su mogli riješiti zadatak s poligonom od 20 stranica, no morali su znati koliko ima dijagonala iz svakog vrha. Pogledavši slučajeve koje su imali i shvativši da dijagonala ne može ići do dva susjedna vrha ili do točke iz koje počinje, postalo je jasno da je broj dijagonala za 3 manji od broja vrhova, što je isto kao i broja stranica poligona. Sada smo dobili formulu za svaki poligon.

$$\text{Broj dijagonalu u } n\text{-terokutu: } \frac{1}{2}n(n-3).$$

Broj dijagonala za dvadeseterokut je $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17 = 170$. Poligoni su osigurali smisleni kontekst koji su učenici razumijeli te je moć algebarskog rezultata postala očita jer su tada mogli pronaći broj dijagonala za bilo koji poligon. Na kraju sata im je rečeno, žele li, da uvijek mogu provjeriti točnost rezultata crtanjem i brojanjem njegovih dijagonala.

## 2.7 Poveznice i veze

Lagano je u učeničkom umu algebru povezati sa nizom postupaka poput pojednostavljivanja, supstitucije i pronalaženja faktora te s nizom tema poput istovremenih jednadžbi, grafova, algebarskih razlomaka od kojih se svaka nalazi u zasebnom odjeljku. Postupci i teme često nemaju poveznicu jedna s drugom ili s drugim područjima matematike. Askew je promatrao učitelje koji su bili učinkoviti u podučavanju male djece brojanju. Njihovo istraživanje je identificiralo tri orijentacije temeljene na vjerovanju učitelja u podočavanju matematike. Ti "idealni tipovi" su opisani kao "oni koji povezuju, prenose i otkrivaju" iako se nijedan učitelj ne uklapa u jednu kategoriju već kombinira elemente svih. Učitelji koji "otkrivaju" su naglasili praktične aktivnosti koje su osmišljene kako bi učenici otkrili metode samo za sebe. Učitelji koji "prenose" su koristili verbalna objašnjenja kako bi učenici mogli naučiti standardne postupke, a učitelji koji "povezuju" gledaju podučavanje kao dijalog između "učitelja i učenika u istraživanju razumijevanja" s naglaskom na crtanje veza i poveznica. Šest od šesnaest učitelja u studiji su ocijenjeni kao "visoko učinkoviti", a petero od njih su oni čija je orijentacija opisana kao "onaj koji puno povezuje". Značajno je da su baš ti učitelji najučinkovitiji jer je čest problem u učenju algebre upravo nesposobnost stvaranja veza. Stvaranje veza između brojeva i algebre i poveznice sa slikovitim reprezentacijama uz grafove i dijagrame od ključne su važnosti.
Osnovna algebra se opisuje kao uopćena aritmetika i ima korijenje u rješavanju prvotno numeričkih problema te u predstavljanju i objašnjavanju veza između brojeva. Brojevi su relativno poznati i dostupni učenicima te stoga pomažu dati smisao algebarskim izrazima. Važno je zadržati tu poveznicu tako da učenici stalno budu svjesni numeričke veze s algebarskim idejama jer služi za ponovno pronalaženje značenja simbola te provjere da ti rezultati imaju smisla.

Na Slici 6. vidimo dva algebarska identiteta s nekim vezanim numeričkim primjerima. Simbolički oblik je jezgrovit način predstavljanja općih svojstava prikazanih u numeričkim izjavama, ali su isto tako i posebni slučajevi dobiveni zamjenom određenih svojstava moćan način na koji se uspostavlja odnos između tih dviju ideja,

$$2a + 3a = 5a$$
$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 14 + 21 = 35 = 5 \cdot 7$$
$$2 \cdot 143 + 3 \cdot 143 = 5 \cdot 143$$
$$2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.25 = 5 \cdot 0.25$$

$$n^2 + n = n(n+1)$$
$$3^2 + 3 = 12 = 3 \cdot 4$$
$$19^2 + 19 = 380 = 19 \cdot 20$$
$$40^2 + 40 = 1640 = 40 \cdot 41$$

Slika 5: Ostvarivanje veza između brojeva i algebre

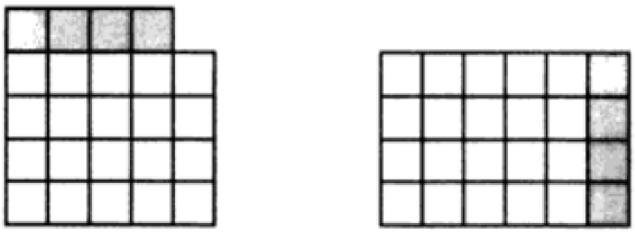
generalizacije i specijalizacije. Ako uočena ideja nema smisla tada je promatranje posebnog slučaja dobra strategija, no isto tako, unutar svakog posebnog slučaja uvijek postoji mogućnost generalizacije. Jednostavan primjer koji to pokazuje je kad se odgovori $8 \cdot 8 = 64$ i $7 \cdot 9 = 63$ razlikuju za jedan. To se može smatrati slučajnošću sve dok se ne uzmu u obzir drugi slučajevi koji pokazuju nastajući uzorak prikazan na Slici 7., a koji se mogu prikazati kao $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Nadalje, iako je početna točka algebarski identitet, numerički rezultati su jedan od načina davanja smisla.

| | |
|---|---|
| $2 \cdot 2 = 4$ | $1 \cdot 3 = 3$ |
| $3 \cdot 3 = 9$ | $2 \cdot 4 = 8$ |
| $4 \cdot 4 = 16$ | $3 \cdot 5 = 15$ |
| $5 \cdot 5 = 25$ | $4 \cdot 6 = 24$ |
| $6 \cdot 6 = 36$ | $5 \cdot 7 = 35$ |
| $7 \cdot 7 = 49$ | $6 \cdot 8 = 48$ |
| $8 \cdot 8 = 64$ | $7 \cdot 9 = 63$ |
| $9 \cdot 9 = 81$ | $8 \cdot 10 = 80$ |

Slika 6: Nastajući uzorak

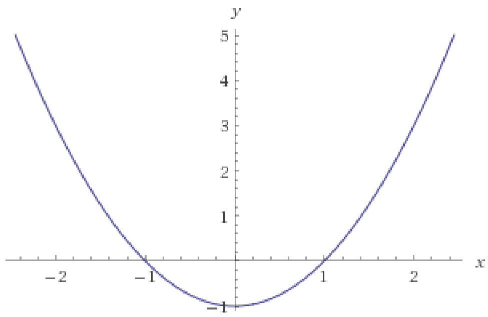
Slike su još jedan način predstavljanja ideja. Slika 7. koristi kvadrate za prikazivanje potpune jednakosti $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ u slučaju kada je $x = 5$. Lijevi dijagram pokazuje kvadrat s jednim kvadratićem koji nedostaje. Gornji dio zasjenjenih kvadratića je maknut i smješten na jedan kraj da bi se stvorio pravokutnik na desnoj strani. Slike lijepo prikazuju vezu za svaku pozitivnu vrijednost $x$-a te za daljnje uopćavanje uzevši u obzir $x^2 - y^2$, razliku između dva kvadrata.

Grafovi funkcija su specijalizirani oblici slika koji imaju ključnu ulogu u algebri, no njihov potencijal povezivanja i razvijanja razumijevanja se ne iskorištava uvijek u potpunosti. Graf funkcije $y = x^2 - 1$ prikazan na Slici 9. može se gledati graf $y = x^2$



Slika 7: Povezivanje jednakosti sa slikom: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

translatiran prema dolje za 1. Izraz $x^2 - 1$ zapisan kao $(x-1)(x+1)$ daje ekvivalentan oblik koji odmah pokazuje da krivulja presijeca $x$ os u $x = 1$ i $x = -1$. Nakon toga je dobro upitati učenike što misle kako će izgledati graf $y = (x+1)(x-1)$. Iskustvo pokazuje da ne odgovaraju odmah iako su upoznati s jednakosti koja povezuje ta dva grafa. Standardni algebarski postupci koji obuhvaćaju množenje dva

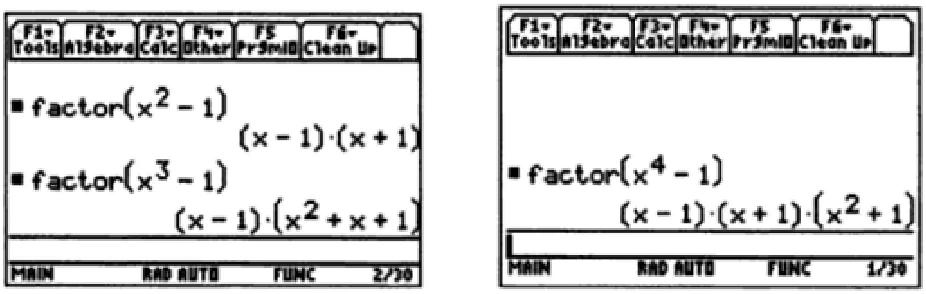



Slika 8: $y = x^2 - 1$ i $y = (x-1)(x+1)$

linearna izraza ili pronalaženje kvadratnih izraza se mogu oživjeti i postaviti u širi kontekst pronalaženjem veza s numeričkim faktorim i grafičkim i drugim slikovnim reprezentacijama, no isto se odnosi i na sve druge aspekte algebre gdje se učeničko razumijevanje može unaprijediti naglašavanjem poveznica i veza te različitim načinima sagledavanja iste ideje.

## 2.8 Uloga tehnologije

Tijekom proteklih tridesetak godina koliko su kalkulatori dostupni, postoji puno kontroverzi o njihovoj ulozi u učenju aritmetike. To ostaje i dalje tako zbog naprednijih, tzv. grafičkih kalkulatora. Kao i s jednostavnim kalkulatorima, zabrinjava utjecaj takve tehnologije na učeničko razumijevanje i vještine te do koje mjere bi se kurikulum trebao promijenti kako bi se uzela u obzir i moć koju takvi alati omogućuju. Važno je dobro razlikovati primjenu tehnoloških uređaja kao brzo i točno sredstvo koje olakšava rad, što se može iskoristiti pri primjeni algebre u zadacima, te kao svestranog sredstva s čitavim nizom sposobnosti koje se mogu iskoristiti za unaprijeđivanje načina na koji učenici uče algebru. Hergel razlikuje ciljeve izvedbe neke operacije za koju bi bilo primjereno koristiti kalkulator te odabir strategije za rješavanje zadatka koji se ne može riješiti kalkulatorom. Na sposobnost odabira strategije će utjecati poznavanje algebarskih ideja i postupaka te iskustvo u njihovom rješavanju. Iako sposobnost ručnog izvođenja operacije nije najbitnije pri samom rješavanju zadatka, dodatno iskustvo u tome je nužno za osiguravanje poznavanja i razumijevanja ideja potrebnih za izbor strategije. Važno je razlikovati algebarske vještine koje primijenjujuemo u jednostavnim primjerima koji se rade umno i kompliciranije primjere gdje bi primjena kalkulatora bila primjerena. Od učenika očekujemo da $x^2 - 1$ ili $x^2 - 3x + 2$ rastavi na faktore računanjem u glavi, no kalkulator će biti primjereniji u rješavanju $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$. Prvi primjer je razumijevanje prirode algebarskih faktora, no drugo je složeniji zadatak koji nužno ne razvija daljnje razumijevanje niti sposobnost primjene ideje rastavljanja na faktore. Lijevi ekran na Slici 10. pokazuje uzorak u faktorima dva izraza za poticanje objašnjenja i generalizacije. Faktori od $x^2 - 1$ jesu poznati no od $x^3 - 1$ baš i nisu. Stoga se preporučava proširivanje zagrade da bi se vidjelo zašto su ekvivalentni s $x^3 - 1$. Očito daljnje pitanje je razmotriti $x^4 - 1$ te će to vjerojatno dovesti do prijedloga da su faktori $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$. Desni ekran pokazuje da ima još stvari koje moramo uzeti u obzir. Kad se one porješavaju, vrijedi pogledati $x^5 - 1$ i $x^6 - 1$ kako bi se dalje generaliziralo.




Slika 9: Faktorizacija

Svaki učitelj matematike dobro poznaje poteškoće na koje učenici nailaze pri davanju smisla algebri. U ovom su poglavlju pokazani neki faktori koji djeluju kao barijere za davanje smisla algebri te neke strategije koje su važne za učinkovitije podučavanje i učenje. Sažmimo ih u nastavku:

- Puno trenutnog podučavanja algebre na svim razinama vodi do učenja napamet čiji je cilj instrumentalno razumijevanje. Učenje napamet se previše oslanja na pamćenje činjenica i vještina, a ne na njihovo razumijevanje i primjenu. Smisleno učenje, vezano uz relacijsko razumijevanje, smanjuje opterećenje u sjećanju tako da slaže ideje u koherentni okvir te omogućuje učenicima fleksibilno razmišljati i samostalno rješavati zadatke.

- Učenici često pogrešno interpretiraju slova kao predmete, a ne kao nepoznanice ili varijable koje imaju numeričke vrijednosti. Također im je problem interpretacija nizanja simbola i uloga znaka jednako za označavanje jednakosti.

- S pogrešnim shvaćanjima i greškama se moramo suočiti i raspraviti ih te ih koristiti za napredak. Kognitivan sukob je važan element u uvjeravanju učenika da njihovo trenutno razmišljanje nije primjereno te da moraju poraditi na relacijskom razumijevanju algebre.

- Tečnost u manipuliranju algebarskim izrazima je bitna i zahtijeva uvježbanost što se postiže stalnim ponavljanjem.

- Iako je algebra moćna jer se može razdvojiti od neposrednog konteksta, većina učenika ima potrebu povezivati ideju sa stvarnim stvarima. To ne zahtijeva nužno „kontekst stvarnog svijeta“ jer iznenađujuća svojstva brojeva i zadaci i zagonetke svih vrsta su učenicima također stvarni te daju bogato područje za primjenu algebarskih ideja.

- Tehnologija u obliku kalkulatora svih vrsta i računalnih programa ima vrijednu ulogu koristi li se primjereno tj. u svrhu promoviranja algebarskog razumijevanja. Ipak, tečnost u izvršavanju jednostavnih algebarskih izraza će zasigurno ostati najbitnija komponenta razumijevanja i učinkovite primjene algebre.

# 3 Kreiranje i rješavanje jednadžbi

## 3.1 Kreiranje i rješavanje linearnih jednadžbi

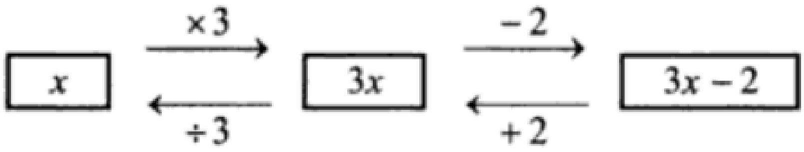
Jednostavne linearne jednadžbe često uvodimo dijalogom poput sljedećeg:
Učitelj: Zamisli broj. Udvostruči ga i zbroji sa 5. Što si dobio?
Petar: Dobio sam 11.
Učitelj: Marko, koji je broj Petar zamislio?
Marko: Zamislio je broj 3.
Učitelj: Petre, je li Marko upravu?
Petar: Da.
Učitelj: Marko, kako si to izračunao?
Marko: Oduzeo sam 5 od 11 i dobio 6, a zatim sam to prepolovio.
Učenicima je obično ovakvo rješavanje teže iako su brojevi jednostavni, a operacije i njima inverzne operacije dobro poznate. Postupak koji obično provode je "razriješiti" dvije operacije. No, čim se jednadžbe simbolički predstave i uvedu formalne metode rješavanja, mnogi učenici počnu doživljavati iduće poteškoće dobro poznate učiteljima:

- Problem pretvaranja zadatka s riječima u algebarski oblik
- Oslanjanje na neformalne metode koje su učinkovite u jednostavnim situacijama, ali su manje primjerene za jednadžbe čije su potrebe rješenja formalnijeg postupka
- Nedostatak tečnosti u zadacima s negativnim brojevima i razlomcima
- Netočan odabir poretka izvršavanja operacija
- Odabir pogrešne inverzne operacije
- Zbunjenost oko toga što se točno smatra kompliciranim pismenim postupkom.

Najteži dio rješavanja nekog zadatka je njegovo prenošenje u primjereni simbolički oblik. Taj se aspekt rješavanja zadataka lako zanemaruje te se učenici koncentriraju na učenje tehnike za rješenje. To ima dva loša učinka; učenici ne uspijevaju razviti sposobnost izvršavanja početne faze u rješavanju zadataka te je motivacija oslabljena jer nestaje razlog za učenje rješavanja zadataka. Tehnike bi se trebale razvijati uz zadatke za koje su osmišljene tako da učenici vide svrhu onoga što rade.

Privlačnost rješavanja zagonetki može biti snažan izvor motivacije. Pretvaranje konkretne situacije u algebarske pojmove zahtijeva svjesnost simboličkih značenja, tj. sposobnost povezivanja izjave riječima "udvostruči broj i dodaj 5" i njezinog simboličkog značenja $2x + 5$. Jednadžbe poput $x + 5 = 8$ učitelji često koriste kao uvod u formalni postupak rješavanja jednadžbe, no primijećuju da učenici dolaze do rješenja metodom ili primjenom poznatih brojčanih veza. Ne moraju razmišljati u okviru oduzimanja broja 3 jer im je broj koji nedostaje označen kao $x$ odmah očit jer znaju da je $3 + 5 = 8$. Uvođenje formalnih postupaka bez kojih učenici ionako znaju riješiti zadatak i nije neka razumna taktika jer učenici ionako ignoriraju teže načine rješavanja jednostavnih zadataka. Tek kada odgovor nije očit, a neformalne metode nisu dovoljne, će učenici uvidjeti da su formalni postupci korisni. U kontekstu "razmisli o broju", rješavanje $24x + 53 = 137$ je manje trivijalno od $2x + 5 = 11$, iako je jednostavniji zadatak koristan kao pokazivatelj pristupa težem zadatku. Do mnogih poteškoća s algebrom dolazi jer učenici ne posjeduju dovoljno razumijevanja za najbitnije numeričke ideje ili tečnost za njihovo korištenje, a to je primjenjivo i za rješavanje jednadžbi. Stoga bi bilo primjereno, što je moguće ranije, utvrditi principe i postupke, koristeći samo one vrste brojeva s kojima učenici tečno računaju. Zadaci s razlomcima i negativnim brojevima bi se trebali odgoditi dok se ne stvori samopouzdanje za rješavanje zahtjevnijih vrsta brojeva i algebarskih postupaka s jednostavnijim brojevima.

Do česte pogreške u rješavanju jednadžbe poput $3x - 2 = 7$ dolazi kada učenici odluče oduzeti 2 s obje strane, kako bi se riješili 2 na lijevoj strani, te pogrešno dođu do $3x = 5$. Do te greške dolazi jer učitelji često govore o rješavanju određenog broja kako bi se izolirao nepoznati element. To pretpostavlja da se nešto mora maknuti, a ne da se mora izvršiti neka operacija. Jasnoća o potrebnoj operaciji se postiže razmišljanjem o poduzetim koracima za uspostavljanje izraza na lijevoj strani jednadžbe. Pretvaranjem u riječi korake predstavljene izrazom $3x - 2$ te njegovim mogućim predstavljanjem u dijagramu (kao što je prikazano na Slici 10.), olakšavamo odluku o tome što moramo učiniti da dobijemo vrijednost $x$. Dijagram nadograđuje učeničke intuitivne ideje kako riješiti zadatak "razmisli o broju" te služi i kao priprema za predstavljanje i rješavanje zadataka u algebarskom obliku i kao pokazatelj načina prevladavanja poteškoća koje učenici imaju s formalnim metodama rješavanja linearnih jednadžbi. Razmišljanje o tome kako je jednadžba stvorena pomaže u prevladavanju poteškoća s redoslijedom izvršavanja operacija koje dovode do rješenja. Ideja da se ono što je zadnje napravljeno mora razriješiti prvo nije od-




Slika 10: Razrješavanje uz dijagram

mah očito ako učenik gleda pismeni oblik $3x - 2 = 7$. Kada čitamo izraz zapažamo "3 puta nešto" i to nesigurnog učenika može navesti da pokuša dijeliti sa 3. Iako se takve greške ne rade u jednostavnim slučajevima poput ovoga, česte su u jednadžbama riječima. Primjerice, kad $a$ postane dio formule $v = u + at$, učenici često predlože rješenje $a = \frac{v}{t} - u$.

Inzistiranje na kompliciranom pisanom obliku rješenja poput onog na Slici 11. gdje se zapisuju svi koraci, komplicira jednostavan postupak te zbunjuje umjesto da pomaže u razumijevanju. Desni bi oblik trebao biti dovoljan kao pisano rješenje, no trebala bi uslijediti rasprava kojom će se naglasiti postupak odlučivanja o dva koraka - dodavanje 2 i dijeljenje s 3. Dijagram je vrijedan način pripomaganja razmišljanju i snimanju obuhvaćenih koraka. Primjena dijagrama utvrđuje važne

| | |
|---|---|
| $3x - 2 = 7$ | |
| $3x - 2 + 2 = 7 + 2$ | $3x - 2 = 7$ |
| $3x = 9$ | $3x = 9$ |
| $\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ | $x = 3$ |
| $x = 3$ | |

Slika 11: Kompliciranje jednostavnijeg postupka

principe izvršavanja iste operacije s obje strane jednadžbe za održavanje jednakosti te određivanje reda izvršavanja tih operacija. Međutim, dijagram nije primjenjiv kada se nepoznanica pojavljuje na više mjesta u jednadžbi jer se nepoznanica mora pojaviti na samo jednom mjestu. Kad učenici postignu tečnost u rješavanju različitih linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, dodatni koraci nisu teški.

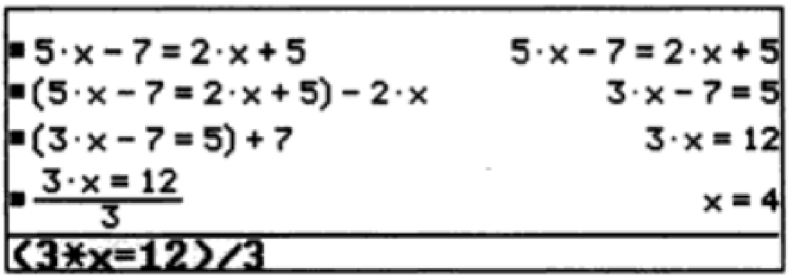
Jednadžbe se ne bi trebale pojavljivati samo u zadacima s kojima se uvježbava tehnika rješavanja; formuliranje jednadžbi je jednako važno kao i njihovo rješavanje.

Ovo je primjer zadatka o dobi koji je popraćen dijalogom s fokusom na formuliranje jednadžbe koju treba riješiti.
Marija je 27 godina starija od njezinog sina Marka, a za 5 godina će njezina dob biti 4 puta veća od Markove. Koliko im je godina sada?
Učitelj: Što pokušavamo ovdje dobiti?
Učenik: Marijinu i Markovu dob.
Učitelj: Što znamo o njim?
Učenik: Marija je 27 godina starija od Marka.
Učitelj: Ako Marko trenutno ima $x$ godina, kako možemo zapisati Marijine godine?
Učenik: $x + 27$.
Učitelj: Dakle, Marko ima $x$ godina, a Marija $x + 27$. Koliko će oni imati godina za 5 godina?
Učenik: Marko će imati $x + 5$ godina, a Marija $x + 32$ godine.
Učitelj: Što ćemo sljedeće napraviti?
Učenik: Znamo da će za 5 godina Marija biti 4 puta starija od Marka.
Učitelj: Kako ćemo to zapisati?
Učenik: Možemo zapisati $4(x + 5) = x + 32$.
Učenici mogu dodavati korake koje će poduzeti u svakoj određenoj fazi kako bi došli do rješenja:

$$\begin{aligned} 4(x+5) &= x+32 \\ 4x+20 &= x+32 \\ 3x+20 &= 32 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Zadnja faza rješavanja zadatka je prezentirati rješenje u traženom obliku te njegova provjera. U ovom slučaju Marko ima 4 godine, a Marija 31 godinu, a za 5 godina oni će imati 9 i 36 godina, tj. Marija će biti 4 puta starija od Marka. Zadatak osigurava jasan kontekst, iako treba malo promisliti o njemu.
Jednadžbe možemo rješavati kalkulatorom. To je korisno s kompliciranim jednadžbama. No, prije toga učenici moraju biti vješti u ručnom rješavanju standardnih tipova jednadžbi te primjena kalkulatora ne smije potkopavati tu vještinu. Kalkulator može pomoći u rješavanju jednostavnih jednadžbi samo kako bi fokusirao

učeničku pažnju na izbor operacija i upozorio na učinke pogrešnih odabira. Na Slici 12. prikazan je slijed operacija primijenjenih na obje strane jednadžbe tako da $x$ ostaje slijeva, a rješenje se pojavi s desna. Tri operacije koje se pojavljuju su: oduzmi $2x$, dodaj 7 i podijeli s 3. U svakoj fazi jednadžba počinje zagradama, a odabrana operacija se nalazi iza zagrade. Rezultat se tada prikazuje kao jednadžba na desnoj strani. Tajna uspijeha je u odabiru odgovarajućeg slijeda operacija. Pomoću kal-




Slika 12: Koraci u rješavanju jednadžbi kalkulatorom

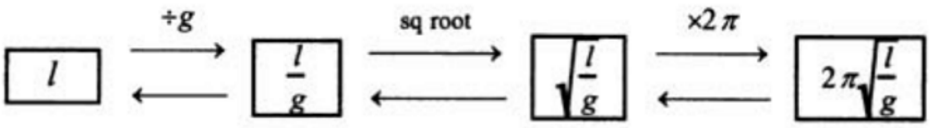
kulatora se učenik može usredotočiti na učenje te važne vještine jer odmah postaje jasno ako operacija ne dovodi do očekivanog. Primjerice, Slika 13. pokazuje što se dogodi ako se 7 oduzme umjesto da se doda kao druga operacija u primjeru na Slici 12. To ne pojednostavljuje jednadžbu pa učenik shvaća da je odabrao krivu operaciju. Primjena naprednog kalkulatora kao način razvijanja učeničkog razumi-


Slika 13: Odabir pogrešne operacije

jevanja i vještina za izvršavanje zadataka neovisno o uređaju je relativno neistraženo područje, pri čemu je potreban oprez kako učenik ne bi shvatio da kalkulator sve odrađuje pa ni nema potrebe za razumijevanje onog što se odvija. Sposobnost inteligentne primjene jednadžbi te stvaranje algebarskih argumenata ovisi o poznavanju pravila i postupaka pisane algebre. Kalkulator ne rješava sve probleme! Rješavanje jednadžbi općenito, s varijablama, bez konkretnih brojčanih vrijednosti, mijenjanje subjekta formule i pronalaženje inverzne funkcije su sve zadaci za rješavanje jednadžbi pri čemu je problem odabira točne operacije u svakoj fazi još veći izazov učenicima jer prisustvo dodatnih varijabli komplicira situaciju. Na primjer, kako bismo pronašli vrijednost $a$ iz formule $v = u + at$ kada je $v = 25$, $u = 10$ i $t = 3$, jednostavnije je zamijeniti i riješiti jednadžbu $25 = 10 + 3t$ nego izvesti formulu

$a = v - ut$ te tada izvršiti zamjenu. Kada je potrebno zadržati slovčani oblik jednadžbe, dijagrami ponovno postaju korisno sredstvo kod razmišljanja o koracima koje treba poduzeti. To je prikazano primjerom na Slici 14. koji pokazuje kako izraziti $l$ iz formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Dijagrami bi trebali učenicima pripomoći u razmišljanju na putu prema tečnosti odabira točne operacije točnim redoslijedom za postupak poput:

$$\begin{aligned}
2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} &= T \\
\sqrt{\frac{l}{g}} &= \frac{T}{2\pi} \\
\frac{l}{g} &= \frac{T^2}{4\pi^2} \\
l &= g\frac{T^2}{4\pi^2}.
\end{aligned}$$



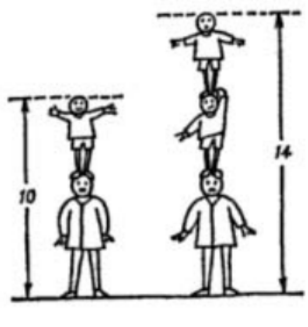

Slika 14: Primjena dijagrama za pretvaranje formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

## 3.2 Sustavi jednadžbi

Sawyer kaže da se algebra može uvesti sa zadacima koji vode do sustava jednadžbi jer su one manje trivijalne od jednostavnih linearnih jednadžbi te više motiviraju za algebarski pristup koji daje značenje simbolima i razvija važne postupke. Njegov početni primjer je u obliku zagonetke prikazane na Slici 15. što rješenje zadatka čini neposredno očitim te vodi do algebarskog prikaza.

Sa $m$ kao visinom muškarca, a $s$ kao visinom svakog sina, situacija se može predstaviti sa sustavom jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

$$\begin{aligned}
m + 2s &= 14 \\
m + s &= 10
\end{aligned}$$




Slika 15: Zadatak s muškarcem i sinovima: *Muškarac ima dva sina blizanca koji su iste visine. Dodamo li visinu muškarca visini jednog sina, dobijemo* 10 *stopa. Ukupna visina muškarca i oba sina je* 14 *stopa. Koje su njihove visine?*

Dijagram jasno pokazuje kako oduzimanje dviju jednadžbi odmah dovodi do rješenja $s = 4$ i $m = 6$.

Još jedan način uvođenja sustava jednadžbi je primjena dviju kockica, jedne crvene i jedne plave, pri čemu zamolimo učenika da ih baci i uoči rezultat.
Učitelj: Koji je ukupan rezultat?
Učenik: 8 (5 na crvenoj i 3 na plavoj kockici).
Učitelj: Kako to možemo zapisati?
Učenik: $c + p = 8$.
Učitelj: Što je $c$?
Učenik: Crvena kockica.
Učitelj: Dobro razmisli što znači $c$.
Učenik: Broj na crvenoj kockici.
Učitelj: Tako je, slovo predstavlja broj. A $p$ je broj na plavoj kockici. Dakle, koji je zbroj zbroja na crvenoj kockici i 3 puta broja na plavoj kockici?
Učenik: 14.
Učitelj: Kako možemo to zapisati?
Učenik: $c + 3p = 14$.
Ponovno imamo situaciju sustava jednadžbi s dvjema nepoznanicama koja izaziva učenike da predlože način pronalaska rješenja:

$$\begin{aligned} c + p &= 8 \\ c + 3p &= 14. \end{aligned}$$

Učenici odmah uoče da oduzimanje jednadžbi vodi do rješenja. U oba primjera je jasno značenje jednadžbi, a slova se jasno odnose na brojeve. Zagonetke su osmišljene kako bi privukle pažnju učenika. Njihovo rješavanje daje jednostavnu svrhu algebri. Štoviše, učenici mogu sami predložiti postupke rješavanja koji se mogu poboljšati, uvježbati, proširiti i primijeniti u mnogim primjerima.

## 3.3 Kvadratne jednadžbe

Jednostavne kvadratne jednadžbe bez linearnog člana se mogu riješiti čim se učenici upoznaju s kvadratnim korijenom. Proširivanjem metoda koje se koriste za linearne jednadžbe, učenici jednostavno mogu riješiti jednadžbe poput:

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 12 \\ (x-5)^2 &= 81 \\ 3x^2 - 8 &= 40. \end{aligned}$$

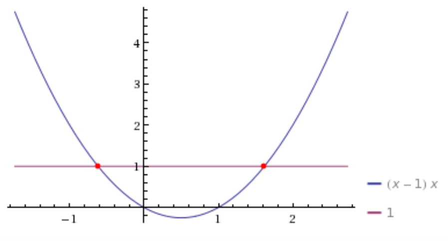
Izazovniji problem prije uvođenja formalnih postupaka bi bio pronalaženje broja koji je za 1 manji od svog kvadrata, tj. pronalaženjem rješenja za jednadžbu $x^2 - x = 1$. Iz Slike 16. je jasno da je rješenje između 1.61 i 1.62. Evaluiranjem funkcije za 1.615 tada pokazuje da je rješenje između 1.615 i 1.62 te je stoga 1.62 rješenje točno za dva decimalna mjesta. Daljnja evaluacija tada daje 1.618 kao rješenje za tri decimalna mjesta. Pokušaj i poboljšanje daje učenicima osjećaj za rješenje kao

| $x$ | $x^2 - x$ |
|---|---|
| 1.6 | 0.96 |
| 1.62 | 1.0044 |
| 1.61 | 0.9821 |
| 1.615 | 0.993225 |
| 1.618 | 0.999924 |
| 1.619 | 1.002161 |
| 1.6185 | 1.00104225 |

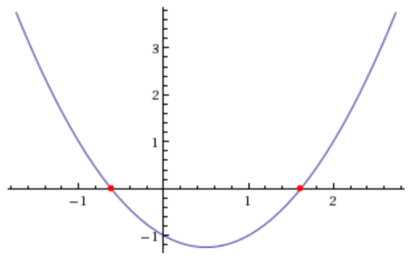
Slika 16: Pokušaj i poboljšanje rješavanja $x^2 - x = 1$

broj koji zadovoljava jednadžbu jer je to direktno traženje broja koji se u svakoj fazi testira njegovim isprobavanjem. Također je dobro za razvijanje razumijevanja decimalnog oblika brojeva te pitanje pronalaženja rješenja do prikladnog stupnja

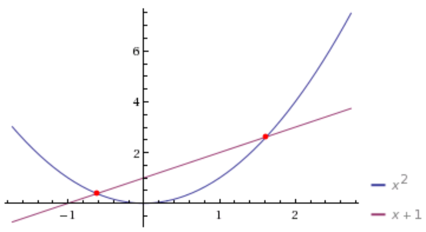
točnosti. Pokušaj i poboljšanje omogućava metodu koja je dobra za sve jednadžbe, no nije primjerena kao jedina metoda rješavanja jednadžbi jer se višestruka rješenja ne prepoznaju odmah te ne daje točan oblik rješenja tamo gdje je to moguće kao u važnom slučaju kvadratnih jednadžbi.
Grafičke metode daju vrijedan uvid u rješavanje jednadžbi i naglašavanjem broja rješenja i osiguravanjem rješenja do određenog stupnja točnosti zumiranjem točki presjeka. Skica grafa može biti dovoljna za prepoznavanje broja rješenja, no kao i s pokušajem i poboljšanjem, zumiranje rješenja dat će samo približan odgovor. Ipak, grafički pristup za rješavanje jednadžbi je dobar za razvijanje razumijevanja grafova osobito kada se uzmu u obzir alternativni načini rješavanja iste jednadžbe. Pronalaženje presjeka $y = x^2 - x$ i $y = 1$ je jedan od načina grafičkog rješavanja $x^2 - x = 1$. Druga mogućnost obuhvaća sjecište krivulje $y = x^2 - x - 1$ sa $x$ osi i sjecištem krivulje $y = x^2$ s pravcem $y = x + 1$. Te tri mogućnosti prikazane su na Slici 17., 18., 19.




Slika 17: $x^2 - x = 1$



Slika 18: $x^2 - x - 1 = 0$




Slika 19: $x^2 = x + 1$

Rješavanje jednadžbi njihovim izražavanjem kao produktom faktora je važna ideja sa širokom primjenom. Najosnovnija ideja je da jedan ili više faktora moraju biti nula ako je i umnožak nula: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ili $b = 0$. To dovodi do standardnog rješavanja kvadratne jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
(x-1)(x-3) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
x - 1 = 0 \text{ ili } x - 3 = 0 \\
x = 1 \text{ ili } x = 3.
\end{gathered}
$$

Vezano uz ovaj postupak rješavanja kvadratnih jednadžbi učenici nailaze na četiri poteškoće:

- Jednadžba poput $x^2 - 4x = 0$ se često zapisuje u obliku $x^2 = 4x$, a zajednički faktor $x$ se odbacuje dajući rješenje $x = 4$ te gubeći drugo rješenje $x = 0$. Važno je upozoriti učenike na opasnosti neprimjerenog kraćenja te ih poticati na izražavanje jednadžbi poput ove u obliku $x(x-4) = 0$ tako da se ne gube rješenja.

- Jednadžba poput $x^2 - 3x - 4 = 0$ se često zapisuje u obliku $x^2 - 3x = 4$, faktoriziranjem dobivamo jednadžbu $x(x-3) = 4$ koja se tada rješava kao $x = 4$ i $x - 3 = 4$, pogrešno primjenivši princip kada je produkt jednak nuli. Ovakve pogreške se moraju raspraviti kako bi se pojasnilo da oba rješenja moraju zadovoljiti jednadžbu te kako bi se pomoglo učenicima uvidjeti da princip u ovom obliku ne odgovara za druge brojeve osim nule. Trebalo bi istaknuti da se 4 može izraziti kao umnožak $1 \cdot 4$,$(-1) \cdot (-4)$, $2 \cdot 2$ i $(-2) \cdot (-2)$ te da samo prva dva dovode do rješenja.

- Nije uvijek moguće riješiti jednadžbu pronalaženjem faktora. Učenici ne razlikuju situacije gdje nema realnog rješenja i onih gdje se rješenja ne mogu odmah naći jer nisu racionalna. Ovakvi se primjeri moraju raspravit još dok se ideje o kvadratnim jednadžbama razvijaju: grafička interpretacija i uloga diskriminante $b^2 - 4ac$ su osobito važne.

- Kada se uvede opća formula za rješavanje kvadratne jednadžbe, učenici imaju naviku koristiti je bez obzira može li se jednadžba riješiti manjem kompliciranim postupkom, poput jednostavnog rastavljanja na faktore. Privlačnost formule je što "uvijek uspijeva" pa kad učenicima postane poznata, uvjereni su da njome mogu dobiti točne rezultate. Treba im pomoći razviti tečnost za rastavljanje na faktore jednostavne kvadratne izraze tako da to postane njihov prvi pristup.

Poznavanje opće metode rješavanja kvadratnih jednadžbi je važno iz razloga što je korisno kao praktična metoda dolaska i do točnih i do približnih rješenja te kao način razlikovanja između situacija gdje postoji $0, 1$ ili $2$ rješenja. Ideja nadopune do potpunog kvadrata je dobra jer omogućava i način dolaska do formule kvadratne jednadžbe kao i jednostavan način skiciranja grafa bilo koje kvadratne funkcije. Jednadžba $x^2 - 4x + 1 = 0$ se nadopuni do potpunog kvadrata rješava ovako:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 1 &= 0 \\
x^2 - 4x + 4 &= 3 \\
x^2 - 4x + 4 &= 3 \\
(x-2)^2 &= 3 \\
x - 2 &= \pm\sqrt{3} \\
x &= 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$x \approx 3.73 \text{ ili } x \approx 0.27.$$

Učenicima često prvi korak predstavlja problem jer zahtijeva poznavanje oblika poput $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 2$. Pomaže prvotno pogledati primjere gdje je koeficijent od $x^2$ jednak 1, a koeficijent od $x$ je paran tako da se princip postupka razumije prije nego se uvedu komplikacije uzrokovane razlomcima. Postupak dobiva na važnosti kad ga se veže s grafom kvadratne funkcije jer oblik potpunog kvadrata osigurava jednostavniji način skiciranja grafova.
Nepotrebne komplikacije se ponovno mogu izbjeći dokazivanjem formule za rješavanje opće kvadratna jednadžbe. Kao i ranije, situacija se pojednostavljuje ako je koeficijent od $x^2$ ograničen na 1 tako da je promatrana jednadžba oblika $x^2 + bx + c$. Uobičajen pistup temeljen na nadopuni do potpunog kvadrata bi se trebao prezentirati uz numerički primjer naglašavajući ulogu identiteta $(x + \frac{b}{2})^2 = x^2 + 2bx + \frac{b^2}{2^2}$. S općim slučajem $ax^2 + bx + c = 0$ se može raditi zamjenjivanjem $b$ i $c$ sa $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ da bi se dobila poznata formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + bx + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} - c. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + bx + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} - c \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - c \\ &= \frac{b^2 - 4c}{4} \\ x + \frac{b}{2} &= \frac{\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \end{aligned}}$$

Slika 20: Dokazivanje formule kvadratne jednadžbe

Kao što je slučaj i sa svim drugim jednadžbama, učenju postupaka rješavanja se dodaje i značenje i svrha kada se oni primjenjuju u zanimljivim zadacima.
Zadatak 1. pokazuje zašto su 3, 4 i 5 Pitagorine trojke uzastopnih brojeva, dok Zadatak 2. prikazuje problem koji obuhvaća brzine u kojima su algebarski razlomci uključeni u rješenje.
**Zadatak 1.** *Primjena Pitagorina teorema na pravokutni trokut sa stranicama duljine $x$, $x+1$ i $x+2$:*

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= (x+1)^2 + x^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 2x + 1 + x^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ ili } x = 3.$$

$x = -1$ nije rješenje pa je $x = 3$ jedino rješenje koje dovodi do Pitagorinih trojki. Jedini uzastopni brojevi koji mogu formirati stranice pravokutnog trokuta su 3, 4 i 5.

**Zadatak 2.** *Brzina rijeke je* $3\ km/h$. *Pronađi maksimalnu brzinu broda na mirnoj vodi ako je najkraće vrijeme koje je potrebno da brod prijeđe put od* $1km$ *uzvodno i natrag jedan sat.*

Ako je najveća brzina broda na mirnoj vodi $x\ km/h$ onda je vrijeme koje je potrebno da se prijeđe $1\ km$ uzvodno i natrag dano izrazom: $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}$. Ako putovanje traje $1\ h$ rješavanjem krajnje jednadžbe dobijemo $x$.

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 + x + 3 = (x-3)(x+3) \rightarrow x^2 - 2x - 9 = 0.$$

Rješenja su $x \approx 4.16$ i $x \approx -2.16$ te nam samo prvo rješenje odgovara.

Ova dva problema ilustriraju dvije uloge algebre. U prvom slučaju je svrha objasniti ili dokazati nešto, a to je da postoji samo jedna Pitagorina trojka s traženim svojstvom, dok drugi problem zahtijeva numeričko rješenje. U oba slučaju postoje tri faze rješavanja problema:

- Izražavanje situaciju u algebarskom obliku
- Manipuliranje algebarskim izrazima koji uključuju odlučivanje što treba učiniti sljedeće u svakoj fazi procesa rješavanja
- Interpretacija rezultata.

Sposobnost izražavanja i rješavanja jednadžbi bila je glavna komponenta matematike tokom njezine duge povijesti. Unutrašnji interes rješavanja zadataka je dovoljno jaka motivacija za učenje algebre. U ranim fazama učenja algebre, zadaci osmišljeni u obliku zagonetke privlače učenike jer posjeduju neposrednost koja često nedostaje u pokušajima povezivanja algebre s praktičnim situacijama. Zagonetke se mogu odnositi na konkretne situacije, kao naprimjer brod koji ide uzvodno i nizvodno po rijeci, ali je problem pronalaženja brzine broda u biti prije zagonetka nego pravi praktični problem i najbolje je predstavljena kao takva. Vještine uključene u rješavanje jednadžbi doslovno ovise o razumijevanju i tečnosti znanja o supstituciji, pojednostavljivanju, proširivanju i faktorizaciji, kao i poznavanje uloge grafova funkcija. Postoji dobar razlog zbog kojeg se ne pridodaje velika važnost rješavanju jednadžbi u ranim fazama učenja jer to dovodi do pojačavanja ideje o slovima koja predstavljaju nepoznanice, a ne o varijablama. S druge strane, jednadžbe imaju veliku privlačnost jer se rješenja mogu provjeriti: odlučan student bi uvijek trebao biti u stanju ustrajati do postizanja ispravnog rješenja. Učenici trebaju steći početni osjećaj za rješavanje jednadžbi. Metode pokušaja i poboljšanja su ponuđene, ali učenici moraju prepoznati njihova ograničenja kada su im dozvoljene određene metode. Grafičke metode također daju približna rješenja, ali također doprinose i na druge načine kod pomaganja učenicima da razumiju jednadžbe i ponašanje raznih funkcija. Točne metode su važne dijelom zato što omogućavaju jednostavan, brz način postizanja rješenja, no i stoga što je oblik rješenja koji daju je zanimljiv. Važno je uvježbavati vještine rješavanja jednadžbi kako bi se postigla tečnost, no to treba činiti uz učenje primjene tih vještina pri rješavanju zadataka, s naglaskom na algebrasku formulaciju zadataka te provjeravanje i interpretiranje rješenja. Rješavanje zanimljivih zadataka daje smisao i svrhu učenja algebarskih vještina.

# Zaključak

Kako bi algebra postala pristupačnija i bliža učenicima, potrebno je pokušati uravnotežiti dva važna elementa algebre, tečnost i razumijevanje. Tečnost u manipuliranju algebarskim izrazima je bitna zbog tečnog i točnog numeričkog izračuna dok razumijevanje ideja i njihova primjena pobuđuju interes za učenje algebre. Bitno je da pri poučavanju učenika učitelj ima jasan pristup pri obradi novog gradiva koji će biti prilagođen učenicima. Kako većina učenika ima potrebu povezivati ideje sa stvarnim svijetom, pronalazak dobro motivirajućeg primjera ključno je za nastavni sat matematike kako bi učenici uvidjeli smisao i svrhu onog što uče. To je često dugotrajan i zahtjevan posao za svakog nastavnika matematike, ali ono što dobijemo kao rezultat je neprocjenjivo i zapanjujuće te uvelike poticajno za daljnji nastavak provođenja takve nastave matematike.

# Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2014.

[2] Doug French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

## Sažetak

U radu smo najprije istražili zašto je važno učiti algebru, što ona treba naučiti učenike te kako bi učenici trebali učiti algebru. Potom smo govorili o dva važna elementa algebre, razumijevanju i tečnosti. Istaknuli smo neka pogrešna shvaćanja i greške, različite poveznice i veze algebre s drugim nastavnim temama te ulogu tehnologije u učenju algebre. U posljednjem dijelu promatrali smo kreiranje i rješavanje linearnih jednadžbi, sustava jednadžbi i kvadratnih jednadžbi. Pokazali smo načine uvođenja jednadžbi te neke pogreške i poteškoće s kojima se učenici susreću pri njihovom rješavanju.

**Ključne riječi:** algebra, razumijavnje, tečnost, Nacionalni okvirni kurikulum, pogrešna shvaćanja i greške, nepoznanice i varijable, izrazi, osiguravanje kontekst, poveznice i veze, uloga tehnologije, linearne jednadžbe, sustavi jednadžbi, kvadratne jednadžbe.

# Summary

In this paper we investigated why is it important to learn algebra, what should it teach to students, and the way algebra should be learned by the students. Next, we discussed two important elements of algebra: understanding and fluency: we highlighted some misinterpretations and errors, different connections and relationships of algebra with other class subjects, and the role of technology in teaching algebra. In the last part of the paper we observed the creation and solving of linear equations, simultaneous equations and quadratic equations. We have shown ways of introducing equations and some errors and problems which students are confronted with while solving them.


**Key words:** algebra, understanding, fluency, National curriculum framework, misconceptions and errors, unknowns and variables, expressions, providing a context, links and connections, the role of technology, linear equations, simultaneous equations, quadratic equations.

# Životopis

Moje ime je Nikolina Jakovljević. Rođena sam 2. rujna 1991. godine u Našicama. Živim u Donjoj Motičini gdje sam pohađala prva četiri razreda osnovne škole, a potom ostatak osnovnoškolskog obrazovanja nastavljam u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Feričancima. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Opću gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavog u Našicama. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2010. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.