

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Kolarić

Razvoj koncepta funkcije kroz povijest

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Kolarić

Razvoj koncepta funkcije kroz povijest

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić
Komentor: dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2012.

Sadržaj

Uvod	4
1 Povijesni pregled pojma funkcije	5
2 Pojam funkcije	12
3 Elementarne funkcije	15
1 Opća potencija	15
2 Polinomi	16
3 Racionalna funkcija	20
4 Eksponencijalna funkcija	22
5 Logaritamska funkcija	24
6 Trigonometrijske funkcije	26
7 Ciklometrijske funkcije	29
8 Transformacije grafova	31
4 Neelementarne funkcije	34
1 Apsolutna vrijednost $ \cdot : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$	34
2 Dirichletova funkcija	36
3 Heavisideova funkcija	38
Heavisideova stepenasta funkcija	39
Pravokutna funkcija	40
Kvadratni val	41
4 Funkcije najveće i najmanje cijelo	41
5 Funkcije u nastavi matematike	44
1 Funkcije u školskoj matematici nekad i sad	44
2 Mišljenja matematičara vezana za pojam funkcije	44
3 Prijedlozi za razmatranje i prirodniji način uvođenja pojma funkcije	46
4 Prednosti tabličnog i grafičkog zadavanja funkcije	48
Literatura	50

Uvod

Pojam funkcije je jedan od temeljnih matematičkih pojmova značajan unutar same matematike kao i u njezinoj primjeni. Funkcije se uvode i izučavaju već krajem osnovne škole i tijekom cijele srednje škole. Velika važnost pridodaje im se i na fakultetima. U ovom radu promatrat će se samo realne funkcije jedne realne varijable kroz primjere prilagođene i primjenjive u nastavi matematike. U prvom dijelu rada prati se povijesni pregled pojma funkcije. Začeci sežu već u 14. stoljeću gdje se kao prva značajna osoba koja se bavila ovom tematikom ističe Oresme (1323.-1382.). Osim njega važan doprinos imaju i Decartes i Galileo. U samim začecima infinitezimalnog računa uočena je potreba za označavanjem funkcije kao individualne matematičke jedinice i ovdje ističemo Newtona i Leibniza i njihovo poimanje pojma funkcije. Prvi koji je pojam funkcije postavio kao centralni matematički pojam bio je švicarski matematičar Euler (1707.-1783.), iako je problem kod njegove definicije pojma funkcije bio u tome što nije razlikovao funkciju od njenog zapisa formulom. U ovom poglavlju navest ćemo još neke utjecajne osobe za razvoj pojma funkcije i njihov značaj. U drugom dijelu rada kroz primjere primjenjive učenicima u osnovnoj i srednjoj školi prikazane su elementarne funkcije, njihova svojstva i grafovi. Posebno su obrađene: opća potencija, polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalne funkcije, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije. Na različitim primjerima pokazane su transformacije grafova. Također posebno su izdvojene i neke značajne neelementarne funkcije kao što su: apsolutna vrijednost, Dirichletova funkcija, Heavisideova funkcija i Funkcije najveće i najmanje cijelo. Važan naglasak je na posljednjem poglavlju gdje su iznesena mišljenja različitih matematičara vezana za sam pojam funkcije i njegovu primjenu u školskoj matematici. Navedeni su određeni prijedlozi kako da se na prirodniji i učeniku shvatljiviji način uvodi sam pojam funkcije.

Poglavlje 1

Povijesni pregled pojma funkcije

Pojam funkcije jedan je od temeljnih pojmova u matematici koji je zapravo relativno moderan. Začeci sežu u 14. stoljeće kada je **Nicole Oresme** (1323.-1382.) grafički prikazao promjenjive varijable nanoseći jednu horizontalno, a drugu vertikalno, no on ne spominje ovisnost jedne o drugoj. Sam pojam funkcije bio je jasan i **René Descartesu** (1596.-1650.) koji zorno tvrdi da jednadžba s dvije varijable, geometrijski prikazana krivuljom, indicira zavisnost između njezinih vrijednosti.

Paralelno, potrebu za nekim matematičkim alatom učio je i **Galileo Galilei** (1564.-1642.) prilikom proučavanja prirodnih fenomena. Proučavajući slobodan pad tijela, putanje planeta i općenito krivolinijska kretanja mjerio je različite vrijednosti varijabli. Proučavao je njihovu povezanost i uočio da sve naposljetku vodi ka proporcionalnosti promatranih varijabli. Iz navedenog slijedi da je Galileo prilikom spominjanja "nekakvog matematičkog alata" mislio na funkciju.

U začecima infinitizimalnog računa uočena je potreba za označavanjem funkcije kao individualne matematičke jedinice, gdje se ističu **Isaac Newton** (1642.-1727.) i **Gottfried Leibniz** (1646.-1716.). Newton je prilikom određivanja brzine iz puta i obrnuto uočio međusobnu inverznost te dvije operacije. Njegova pretpostavka kreće od ideje da postoji zamišljena čestica koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu. Njezine brzine (horizontalnu x i vertikalnu y) zove fluksijama tekućih veličina (fluensa) x i y pridruženim toku vremena. Leibniz je prvi upotrijebio pojam "*funkcija*" 1673. godine u svom djelu "*Methodus tangentum inversa, sui de functionibus*". U vrlo općenitom smislu upotrijebio je pojam funkcije da opiše zavisnost geometrijskih vrijednosti subtangente i subnormale na krivulju. Također je uveo i pojmove "*konstanta*", "*varijabla*" i "*parametar*".



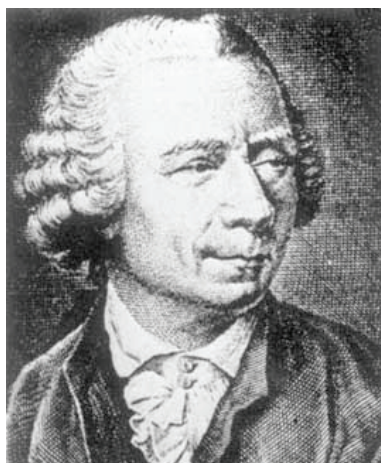
Slika 1. Isaac Newton (1642.-1727.)

Slika 2. Gottfried Leibniz (1646.-1716.)

Također u ovom razdoblju je istaknuti matematičar i **Johann Bernoulli** (1667.-1748.) koji u jednom svom pismu Leibnizu kaže da je *funkcija veličina koja je na neki način formirana iz neodređenih i konstantnih veličina*. To svoje poimanje funkcije objavljuje u članku 1718. godine, što ujedno predstavlja i prvu pojavu pojma funkcije u javnosti. Funkciju kao takvu, označava grčkim slovom f (φ), ali bez zagrada.

Prvi koji je pojam funkcije postavio kao centralni matematički pojam bio je švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707.-1783.) koji je ujedno bio i Bernoullijev student. U djelu "*Introductio in analysin infinitorum*" (1748.) funkciju definira ovako: *Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina*. Nije definirao što misli pod "analitički izraz", već je podrazumijevao da će čitatelj shvatiti da se radi o izrazu formiranom pomoću uobičajenih matematičkih operacija. Prvi je tvrdio da je matematička analiza područje koje se bavi analitičkim izrazima i posebno funkcijama. Funkcije je razvrstao po raznim kriterijima, primjerice, na algebarske i transcendentne. Euler je dozvoljavao da se u njegovim analitičkim izrazima operacije pojavljuju i beskonačno mnogo puta, te koristi redove, beskonačne produkte i verižne razlomke. Predložio je da se transcendentne funkcije proučavaju preko njihovog razvoja u red, s tim što ne tvrdi da je takav razvoj uvijek moguć, već kaže da ga treba dokazati za svaki pojedinačni slučaj. Najveći problem s njegovim pojmom funkcije, iz današnje perspektive, je što ne razlikuje funkciju od njenog zapisa formulom. Ipak, tek od njegovog djela "*Introductio in analysin infinitorum*" trigonometrijske funkcije više nisu duljine vezane za trokute i kružnicu, već funkcije. U navedenom djelu spominje i neprekidne funkcije i funkcije s prekidima, no u značenju drugačijem od suvremenog - Eulerove neprekidne funkcije su one koje se mogu predstaviti samo jednim analitičkim izrazom, dakle donekle bi se mogle shvatiti kao ono što danas zovemo elementarnim funkcijama.

Većina matematičara zadovoljavala se s Eulerovom identifikacijom funkcije pomoću analitičkih izraza, pa je samim time koncept funkcije ostao gotovo nepromijenjen tijekom cijelog 18. stoljeća.



Slika 3. Euler (1707. - 1783.)

Značajan pomak prema potrebi proširenja pojma funkcije dogodio se prilikom razmatranja problema vibrirajućeg niza. Problem se može prikazati jednadžbom :

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

gdje y (zavisna varijabla) pokazuje pomak od ravnoteže položaja, x predstavlja udaljenost od ishodišta, a t označava vrijeme. Rasprava, koju je potaknuo **Jean-Baptiste le Rond d'Alembert** (1717.-1783.), odnosila se na činjenicu da definiciju funkcije treba tražiti kao rješenja ovog problema.

d'Alembert je i iznio opće rješenje ovog problema, koje se može prikazati u sljedećem obliku

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]$$

gdje φ predstavlja proizvoljnu funkciju prikazanu pomoću jedinstvenog analitičkog izraza.



Slika 4. d'Alembert (1717. - 1783.)

Iduće godine, Euler je ponudio novo rješenje ovog problema. Složio se sa d'Alembertovim rješenjem uz iznimku poimanja funkcije φ . On smatra da φ ne mora biti predstavljena u obliku jednostavnog analitičkog izraza, nego da treba uključivati polazni oblik niza predstavljen pomoću višestrukih analitičkih izraza definiranih na različitim podintervalima.

Razmatranje ovog problema navelo je Eulera da promijeni svoje shvaćanje funkcije tako da je 1755. napisao:

Ako neka veličina ovisi o drugoj na takav način da promjena posljednje veličine uzrokuje da se prethodna sama po sebi mijenja tada prethodna veličina predstavlja funkciju.

Eulerova razmišljanja dovela su do šireg razmatranja pojma funkcije.

Daniel Bernoulli 1753. godine razmatrao je i Eulerovo i d'Alembertovo rješenje problema vibrirajućeg niza. Budući da je bio više fizičar nego matematičar, smatrao je da sa strane fizike njihova rješenja nisu primjenjiva, i na osnovu toga je izjavio:

Prekrasna matematika, ali kakve to ima veze sa vibrirajućim nizom.

Bernoulli temelji svoje rješenje problema vibrirajućeg niza na znanjima o glazbenim vibracijama. Znao je da vibrirajući niz sadrži beskonačno mnogo temeljnih vibracija i ako tome još pridoda konstante b_n i a na krajnju točku niza $(0, l)$ rješenje problema bi se moglo prikazati kao:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{l}\right)$$

Bernoullia nije zanimala rasprava koja se vodila oko pojma funkcije, no ukoliko se u njegovo rješenje uvrsti početni uvjet $t = 0$ dobivamo da se bilo koja proizvoljna funkcija može opisati nizom:

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Euler i d'Alembert odbili su Bernoullijevo rješenje. Euler je smatrao da Bernoulli razumije fiziku koja se nalazi u pozadini problema, ali što se matematike i same funkcije tiče da nije bio u pravu, jer nije uzeo u obzir sve implikacije. Euler je vjerovao da svi sinus nizovi moraju biti neparni i periodični, pa samim time postojanje parnih i neperiodičnih sinus nizova opovrgava Bernoullijevo rješenje.



Slika 5. Daniel Bernoulli (1700. - 1782.)

Rasprava oko vibrirajućeg niza na kraju prestaje, no vjera u krivu pretpostavku da svaka analitička funkcija koja ima istu vrijednost unutar nekog intervala mora biti svugdje jednaka, zadržala se još nekoliko godina.

Drugi važan doprinos razvoju funkciju dao je **Joseph Fourier** (1768.-1830.), koji se bavio problemom toka topline u materijalnim tijelima. Fourier promatra temperaturu kao funkciju dviju varijabli, vremena i prostora. Izveo je teorem o funkcijama koji se temelji na sinus i kosinus redovima.

Teorem

Bilo koja funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(-l, l)$ se može prikazati kao

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right],$$

gdje su koeficijenti a_n i b_n predstavljeni sa

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dt$$

i

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dt$$

On pretpostavlja da je moguće dobiti razvoj bilo koje funkcije u trigonometrijski red u odgovarajućim intervalima. Fourier, međutim, nikada nije dao matematički dokaz svoje tvrdnje.



Slika 6. Joseph Fourier (1768. - 1830.)

Problem je kasnije preuzeo Dirichlet (1805.-1859.) koji je formulirao dovoljno uvjeta da se funkcija može prikazati na Fourierov način (Fourierovi redovi).

Dirichlet je odvojio koncept funkcije od njenog analitičkog prikaza (1837.). Definirajući je kao proizvoljnu korespondenciju između varijabli koje predstavljaju numerički skup. Funkcija je zatim počela predstavljati zavisnost između dviju varijabli, tako da je na bilo koju vrijednost nezavisne varijable povezana jedna i samo jedna vrijednost zavisne varijable. Dirichlet je dao sljedeći primjer funkcije koja je isprekidana u svim točkama domene $[0, 1]$ i dodjeljuje jednu vrijednost za sve racionalne, a drugu za sve iracionalne brojeve:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \text{ racionalan broj} \\ 1, & \text{inace} \end{cases}$$



Slika 7. Dirichlet (1805. - 1859.)

Cantor (1845.-1918.) je inicirao razvoj teorije skupova, a time i daljnji razvoj pojma funkcije. U 20. stoljeću, pojam funkcija je proširen i na sve proizvoljne korespondencije (zavisnosti) koje zadovoljavaju uvjet jedinstvenosti između brojčanih i nebrojčanih skupova.

Grupa matematičara koja je djelovala pod pseudonimom **Nicolas Bourbaki**, 1939. godine definirala je funkciju na sljedeći način:

Neka su E i F dva skupa, koji mogu i ne moraju biti različiti. Odnos između promjenjivog elementa x skupa E i promjenjivog elementa y skupa F zove se funkcijska veza u , ako za svaki x iz E postoji jedinstven y iz F koji je u zadanom odnosu sa x .

Bourbaki su postali prvi koji su definirali funkciju u smislu uređenih parova. Ovakav način poimanja funkcije prihvatili su mnogi matematičari smatrajući ga sažetim i sveobuhvatnim. Zapravo, mnogi matematički udžbenici iz algebre uzimaju ovu definiciju kao primarnu.

Pojam funkcije tokom 300 godina, od kada ga je Leibniz prvi put spomenuo, doživio je drastičnu promjenu. U svojim počecima, pojam funkcije je korišten za označavanje korespondencija između geometrijskih entiteta tj. promatran je samo kao skup riječi kojima se opisuju geometrijske ideje. Kroz svoje udruživanje s istraživanjem analitičkih izraza, funkcija je evoluirala u jedan od temeljnih pojmova primjenjiva u gotovo svim matematičkim područjima.

Poglavlje 2

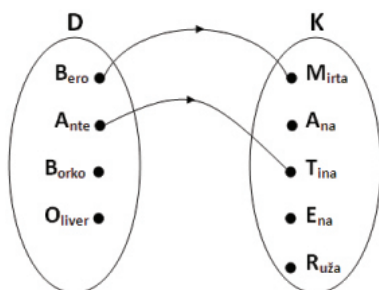
Pojam funkcije

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih matematičkih pojmova koji se uvodi i izučava već krajem osnovne i tijekom cijele srednje škole. U ovom radu razmatrat ćemo samo realne funkcije jedne realne varijable kroz primjere prilagođene i primjenjive u nastavi matematike.

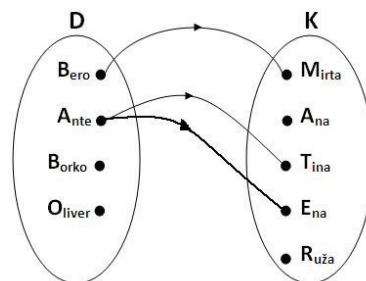
Definicija 01. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo funkcija ili preslikavanje sa D u K i pišemo*

$$f : D \rightarrow K \text{ ili } x \mapsto f(x), \quad x \in D.$$

Primjedba 01. *Izraz točno jedan iz Definicije 1. znači da svakom elementu $x \in D$ mora biti pridružen jedan, ali ne smiju biti pridružena dva ili više elemenata iz skupa K .*



Slika 8. Funkcija



Slika 9. Nije funkcija

Skup D iz Definicije 1. zovemo **domena** ili **područje definicije**, a skup K **kodomena** ili **područje vrijednosti funkcije** f . Domenu D funkcije f često označavamo i s $D(f)$. Svakom $x \in D$ odgovarajući (jedinstveni) pridruženi element $y \in K$

označavamo s $f(x)$ i zovemo **slika elementa** x ili **vrijednost funkcije** f u točki x . Skup svih vrijednosti funkcije f , tj. skup

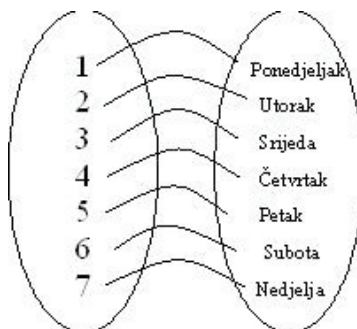
$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

zovemo slika funkcije f . Prema Definiciji 1. je $\mathcal{R}(f) \subseteq K$. Simbol x , koji označava proizvoljni element iz D zovemo **nezavisna varijabla** ili **argument**, a $f(x)$ **zavisna varijabla**.

Graf Γ_f funkcije $f : D \rightarrow K$ je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in D$, tj.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq DK$$

Primjer 1. Jedan tjedan ima 7 dana. Svaki dan nosi svoje ime i propisani redoslijed koji možemo napisati na sljedeći način:



Slika 10. Primjer 1.

Na slici je prikazano da je svakom broju od 1 do 7 pridruženo točno po jedno ime dana i time je zadana funkcija. Brojevi su objekti kojima nešto pridružujemo i oni čine domenu, a imena dana u tjednu su objekti koje pridružujemo i oni čine kodomenu.

Primjer 2. Promotrite i zaključite je li prikaz funkcija?

$$\begin{aligned} 3 &\mapsto 9 \\ 4 &\mapsto 12 \\ 7 &\mapsto 21 \\ 9 &\mapsto 27 \\ 10 &\mapsto 30 \end{aligned}$$

Svakom broju iz lijevog stupca pridružen je točno jedan njemu odgovarajući trostruki (tri puta veći) broj, po čemu možemo zaključiti da je prikaz funkcija. Matematički zapis navedenog objašnjenja glasio bi $f(x) = 3x$, pri čemu f predstavlja ime funkcije. Elemente domene čini skup brojeva $\{3, 4, 7, 9, 10\}$, a elemente kodomene skup $\{9, 12, 21, 27, 30\}$. Dakle, funkciju u potpunosti možemo zadati s

$$f : \{3, 4, 7, 9, 10\} \rightarrow \{9, 12, 21, 27, 30\}$$

U kodomeni su brojevi koje pridružujemo brojevima iz domene, ali u njoj smiju biti i brojevi koji ničemu nisu pridruženi. Dakle, kodomenu možemo zadati i "šire". Tako bismo u nju mogli dopisati i brojeve npr. 57 i 200 i time ne bismo učinili ništa pogrešno.

Definicija 02. Kažemo da je funkcija $f : D \rightarrow K$ *injekcija* (ili 1-1 preslikavanje), ako

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in D)$$

Definicija 03. Kažemo da je funkcija $f : D \rightarrow K$ *surjekcija* ako je $\mathcal{R}(f) = K$.

Definicija 04. Kažemo da je funkcija $f : D \rightarrow K$ *bijekcija* (ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je ona i injekcija i surjekcija.

Definicija 05. Neka je $f : D \rightarrow K$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : K \rightarrow D$ definirana formulom $f^{-1}(y) = x$ gdje je $x \in D$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} zovemo *inverzna funkcija* funkcije f .

Primjer 3. Je li funkcija $f(x) = -2x + 1$ bijekcija? Ako jest, nađite njen inverz.

Da bismo dokazali da je funkcija $f(x) = -2x + 1$ bijekcija, treba pokazati da je injekcija i surjekcija:

(i) f je *injekcija*: mora vrijediti da za sve x_1 i x_2 takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi da je i $x_1 = x_2$. Računamo:

$$-2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

i funkcija je očito injekcija.

(ii) f je *surjekcija*: mora vrijediti da za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, što znači $-2x_0 + 1 = y_0$. No, odavdje možemo lako izračunati x_0 :

$$-2x_0 + 1 = y_0 \Rightarrow -2x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}$$

Provjeravamo da je $f(x_0) = y_0$:

$$f(x_0) = -2x_0 + 1 = -2\left(-\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\right) + 1 = y_0 - 1 + 1 = y_0$$

Ovu operaciju možemo obaviti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$, pa je f očito surjekcija.

Dakle (jer je i injektivna i surjektivna) f je bijekcija, pa ima inverznu funkciju f^{-1}

$$f(x) = -2x + 1 \Rightarrow x = -2f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Poglavlje 3

Elementarne funkcije

Mnoge funkcije koje se javljaju u različitim primjerima sastavljene su od osnovnih elementarnih funkcija:

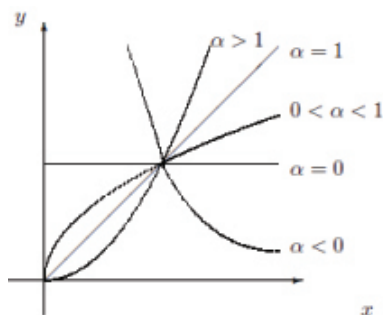
- opća potencija $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
- eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x, a > 0$
- logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x, a > 0$
- trigonometrijske funkcije: $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
- ciklometrijske funkcije: $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$

1 Opća potencija

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkciju $f(x) = x^\alpha, x > 0$, nazivamo **općom potencijom**.

U nekim slučajevima (naprimjer $\alpha = 2$) domena opće potencije može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$. Specijalno, ako je:

- $\alpha \in \mathbb{N}$, opća potencija može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$
- $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$, opća potencija može se proširiti na čitav skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, prirodno područje ovisi o tome da li su p, q parni ili neparni



Slika 11. Graf opće potencije

2 Polinomi

Funkciju $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu sa:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_n, \dots, a_1, a_0$ realni brojevi i $a_n \neq 0$ nazivamo **polinomom** n -tog stupnja nad $\mathbb{R}$.

Brojevi $a_0, a_1, \dots, a_n$ su **koefficienti** polinoma.

Ako je $a_n \neq 0$, onda za polinom kažemo da je n -tog stupnja. U tom slučaju kažemo da je a_n **najstariji** ili **vodeći koefficient** tog polinoma.

Ako je $a_n = 1$, onda kažemo da je polinom **normiran**.

Vrijednost polinoma $P_n(x)$ u nekoj točki $x = a$ računamo pomoću **Hornerove sheme**.

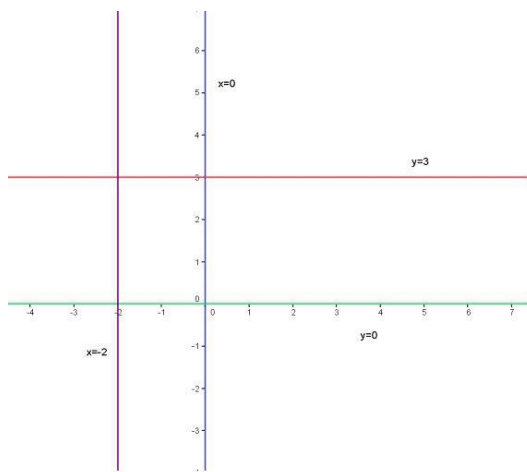
	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = a \cdot b_1 + a_1$	$f(a) = a \cdot b_0 + a_0$

Na isti način polinom $P_n(x)$ dijelimo polinomom $(x - a)$, samo što se onda u zadnjem stupcu umjesto $P_n(a)$ dobije ostatak pri dijeljenju r . Ako je ostatak $r = 0$ onda su navedeni polinomi **djeljivi**.

Definicija 21. Polinom nultog stupnja $P_0(x) = a_0$ nazivamo konstantna funkcija, odnosno vrijedi

$$f(x) = a_0 = \text{const}$$

Primjer 1. Funkciju ukupnih troškova T možemo promatrati kao funkciju vremena t , $T = T(t)$. Promatramo li tu funkciju u razdoblju u kojem se ne odvija proizvodni proces, ukupni su troškovi upravo jednaki fiksnim troškovima c , tj. tada je $T(t) = c$. Dakle, u navedenom slučaju funkcija ukupnih troškova je konstantna funkcija.

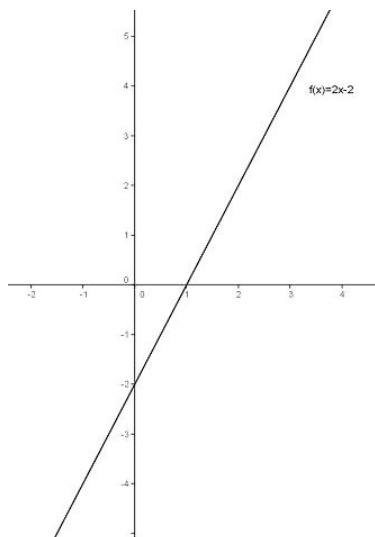


Slika 12. Grafovi konstantnih funkcija

Linearna funkcija (polinom prvog stupnja)

Polinom prvog stupnja ili linearne funkcije ima opći oblik $f(x) = kx + l$. Njezin graf je **pravac**.

Koeficijent k nazivamo **koeficijent smjera** i predstavlja tangens kuta što ga pravac zatvara s pozitivnim smjerom apscise. Ako je $k > 0$ taj kut je šiljasti, a ako je $k < 0$ taj kut je tupi. Slobodni koeficijent l predstavlja **odsječak na ordinati**.



Slika 13. Graf linearne funkcije

Odsječak na osi x dobijemo ili izjednačavanjem funkcije s nulom ($y = 0$), tj. $a \cdot x_0 + b = 0$ ili direktnim uvrštavanjem $x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$.

Primjer 2. Pretvaranje jedinica

- a) ako je y vrijednost mase u gramima, a x vrijednost iste mase u kilogramima, onda je

$$y = 1000x$$

Jezikom funkcije: Linearna funkcija $f(x) = 1000x$ "Pretvara kilograme u grame"

- b) ako je x vrijednost temperature u Celzijusovim stupnjevima, a y vrijednost iste temperature u Fahrenheitovim stupnjevima, onda je

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

Jezikom funkcije: Linearna funkcija $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ "Pretvara Celzijusove stupnje u Fahrenheitove".

Primjer 3. Na benzinsku crpku stigla je puna cisterna benzina. Iz nje se, brzinom od 6 hektolitara u minuti, istaće gorivo u tank benzinske crpke u kojem je već bilo 80 hektolitara benzina.

a) linearna funkcija koja opisuje količinu goriva u tanku nakon x minuta glasi

$$f(x) = 6x + 80$$

b) ukoliko nas zanima koliko će goriva biti u tanku nakon deset minuta, jednostavnim računom dolazimo do odgovora

$$x = 10 \Rightarrow f(x) = 6 \cdot 10 + 80$$

$$f(x) = 140$$

Dakle, u tanku će nakon 10 minuta biti 140 hektolitara goriva

c) Postavimo li problem malo drugačije, tj. da se pitamo nakon koliko vremena je u tanku bilo točno 350 hektolitara benzina račun neće biti ništa složeniji

$$f(x) = 350 \Rightarrow 350 = 6x + 80$$

$$x = 45$$

Odgovor glasi, u tanku je 350 hl benzina bilo nakon 45 minuta.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

Polinom drugog stupnja

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

nazivamo **kvadratna funkcija**. Njezin graf je **parabola**. Tjeme parabole je točka $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.

Nultočke kvadratne funkcije mogu se dobiti rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe

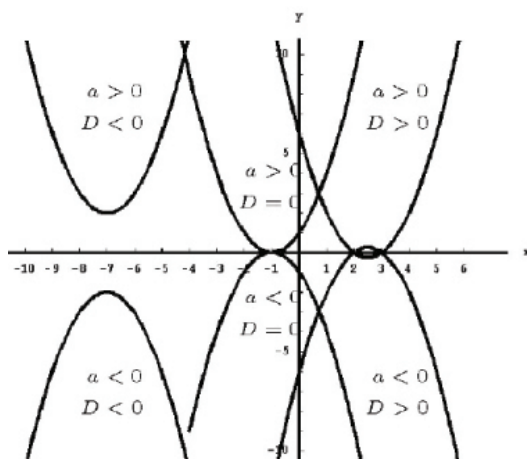
$$ax^2 + bx + c = 0$$

čija se rješenja eksplicitno mogu izraziti formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac$$

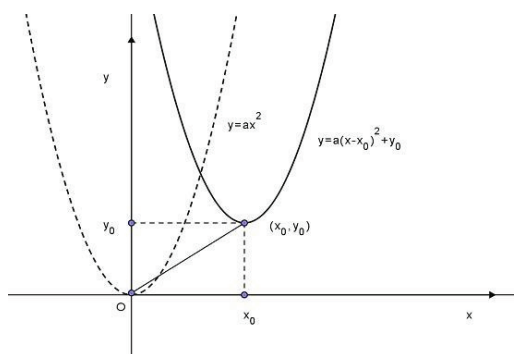
Rješenja x_1, x_2 mogu biti realna i međusobno različita ($D > 0$), realna i međusobno jednaka ($D=0$) ili kompleksno konjugirana ($D < 0$). Broj D nazivamo **diskriminanta** kvadratne jednadžbe.

Kako će parabola izgledati ovisi o diskriminanti ($D = b^2 - 4ac$) i o **predznaku** od a . Za $D > 0$ kvadratna funkcija ima dvije realne nultočke, za $D = 0$ postoji samo jedna realna nultočka, a za $D < 0$ nema realnih nultochki nego konjugirano kompleksne nultočke. Ako je $a > 0$ parabola je okrenuta prema gore (konveksna), a ako je $a < 0$ tada je parabola okrenuta prema dolje (konkavna).



Slika 14. Graf kvadratne funkcije

Primjer 4. Graf parabole $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ dobivamo translacijom grafa parabole $y = ax^2$ tako da njezino tjeme iz ishodišta prijeđe u točku (x_0, y_0)

Slika 15. Graf parabole $y = a(x - x_0)^2 + y_0$

Primjer 5. Avion može prevesti 100 putnika. Avionska kompanija za let od Zagreba do Dubrovnika naplaćuje 540 kn po putniku. Za svako prazno mjesto na letu po prodanoj karti kompanija dobiva subvenciju od 10 kuna na cijenu karte. Odredimo za koji broj putnika na letu je prihod prijevoznika najveći, te koliki je najveći prihod?

Označimo s x broj praznih mjesta. Tada je broj putnika na letu $100 - x$, a prihod koji svaki od njih (s uračunatom subvencijom) donosi prijevozniku je $540 + 10x$ kn. Ukupni prihod na letu je

$$f(x) = (100 - x)(540 + 10x)$$

Naš problem se svodi na određivanje vrijednosti x za koju je vrijednost funkcije f najveća. Raspišemo li izraz za $f(x)$ i sredimo po potencijama od x , vidimo da je riječ o kvadratnoj funkciji

$$f(x) = -10x^2 + 460x + 54000$$

Određivanje vrijednosti argumenta za koju se neka funkcija minimizira ili maksimizira je u pravilu složen problem, no u specijalnom slučaju kvadratne funkcije možemo ga lako riješiti. Koristimo se znanjem o koordinatama tjemena parabole. Naime, za parabolu okrenutu prema dolje, tjeme je najviša točka i njegova y koordinata predstavlja najveću vrijednost funkcije, a njegova x koordinata predstavlja odgovarajuću vrijednost argumenta. Iz formule

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$

uvršćavanjem $b = 460$ i $a = -10$ dobivamo $x_T = 23$. Dakle, tvrtka ima najveći prihod ako ostanu neprodana 23 mjesta. Vrijednost prihoda dobivamo uvršćavanjem $x_T = 23$ u formulu za $f(x)$ (ili korištenjem formule za y koordinatu tjemena). Maksimalni prihod je $f(23) = 59290kn$.

3 Racionalna funkcija

Funkciju

$$Q(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_mx^m + \dots + b_1x + b_0}{a_nx^n + \dots + a_1x + a_0}$$

nazivamo racionalna funkcija. Ako je $m < n$ onda govorimo o pravoj racionalnoj funkciji, a ako je $m \geq n$ o nepravoj funkciji. Ako je $n = 0$, funkcija Q postaje polinom.

Svaku nepravu racionalnu funkciju možemo zapisati dijeljenjem u obliku zbroya jednog polinoma i prave racionalne funkcije:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_s(x)}{P_n(x)}, s < n$$

Za pravu racionalnu funkciju $Q(x) = \frac{r(x)}{p(x)^k}$ ($k \geq 1$) kažemo da je parcijalni razlomak ako je p ireducibilan polinom nad $\mathbb{R}$. Vrijedi:

Teorem 31. Svaku pravu racionalnu funkciju moguće je na jedinstven način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.

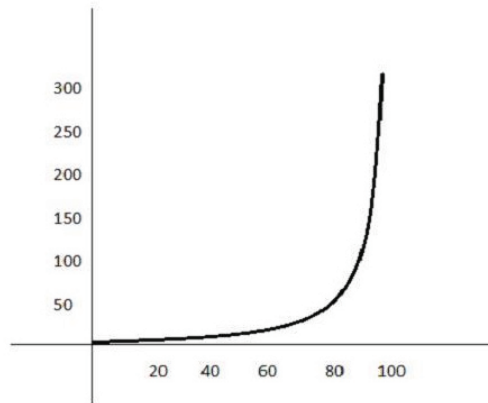
Primjer 1. Funkcija cijene i koristi

Cijena uklanjanja x postotaka zagađenja iz zraka dana je funkcijom

$$Z(x) = \frac{18x}{106 - x}$$

Izračunajmo koliko košta smanjenje zagađenja za 50%. Graf funkcije $Z(x)$ prikazan je na sljedećoj slici.

Cijena smanjenja zagađenja za 50% je 10000 $Z(50) = 160714.29kn$. Iz grafa se može vidjeti da se glavnina zagađenja može otkloniti za razumnu cijenu, no da je potpuno uklanjanje zagađenja vrlo skupo.



Slika 16. Primjer 1.

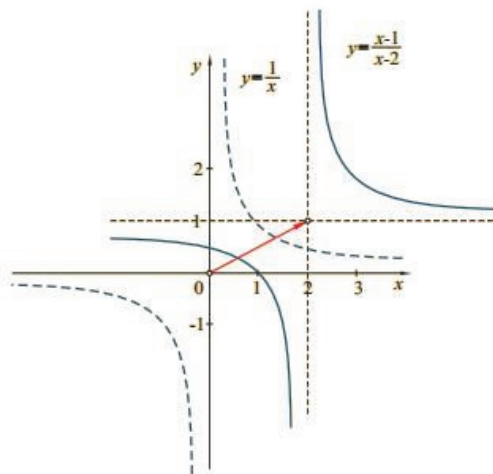
Primjer 2. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$ racionalna funkcija. Napišimo tu vezu u obliku

$$F(x, y) = y - \frac{1}{x} = 0$$

Translacijom grafa za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$ dobiti ćemo graf funkcije

$$F(x-2, y-1) = y-1 - \frac{1}{x-2} = 0$$

$$y = \frac{1}{x-2} + 1 = \frac{x-1}{x-2}$$



Slika 17. Graf kvadratne funkcije

Graf funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ dobivamo translacijom hiperbole $y = \frac{1}{x}$ za vektor $2\vec{i} + \vec{j}$.

4 Eksponencijalna funkcija

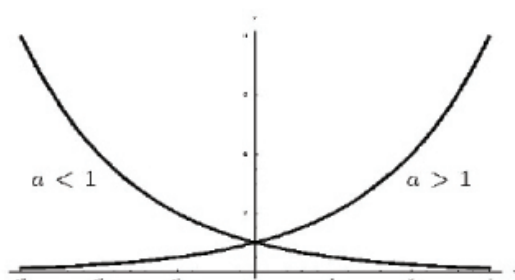
Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiranu formulom

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

nazivamo **eksponencijalna funkcija** u kojoj je x **eksponent**, a **baza**.

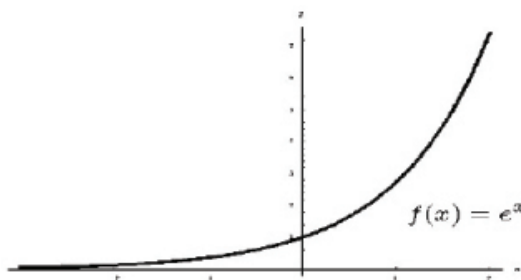
Eksponencijalna funkcija je bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+$, čiji graf uvijek prolazi točkom $(0, 1)$.

Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija je rastuća, a za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija je padajuća.



Slika 18. Graf eksponencijalne funkcije

Specijalni slučaj eksponencijalne funkcije je kada je $a = e$ ($e = 2.71828\dots$ **Eulerov broj**).



Slika 19. Graf funkcije $f(x) = e^x$

Svojstva eksponencijalne funkcije:

Za eksponencijalnu funkciju $x \mapsto a^x$ vrijedi sljedeće:

1. Definirana je za svaki realan broj x
2. Poprima sve pozitivne vrijednosti, tj. slika joj je interval $\langle 0, +\infty \rangle$
3. Ima svojstva:

$$\text{E1)} \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{E2)} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\text{E3)} \quad a^0 = 1$$

E4) ako je $a > 1$, onda za $x < y$ vrijedi $a^x < a^y$ (funkcija je rastuća)

E5) ako je $0 < a < 1$, onda za $x < y$ vrijedi $a^x > a^y$ (funkcija je padajuća)

4. Grafovi eksponencijalnih funkcija s bazama koje su recipročni brojevi, simetrični su s obzirom na y -os (npr. funkcije $f(x) = 2^x$ i $g(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ su simetrične obzirom na y -os.)

Primjer 1. Cijena rabljenog automobila ovisi o više čimbenika od kojih je najbitniji godina proizvodnje. Svake godine njegova se vrijednost umanjuje za 25% u odnosu na prethodnu. Ako je nov automobil stajao 15 000 eura, kolika mu je cijena nakon 5 godina?

Označimo s $C_0 = 15\,000$ cijenu novog automobila.

Nakon godinu dana cijena se umanjuje za 25% i iznosi

$$C_1 = C_0 - C_0 \cdot 0.25 = 11250$$

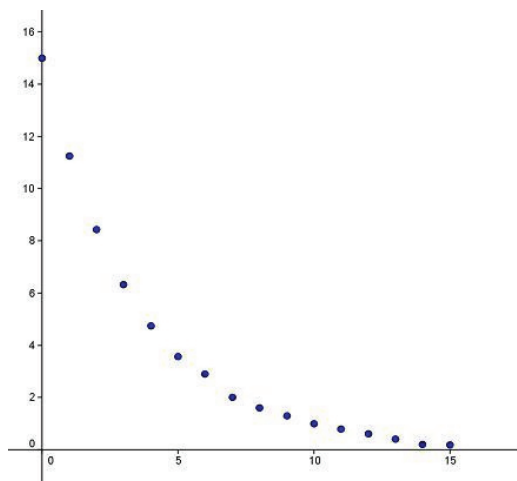
Nakon još jedne godine automobilu cijena ponovo padne za 25% i iznosi

$$C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0.25 = 8437.5$$

Analogno, nakon 3 godine vrijednost automobila je jednaka 6328 eura. Računamo dalje, a čitav račun možemo prikazati pregledno sljedećom tablicom:

Nakon godina	Vrijednost automobila
0	15 000
1	11 250
2	8437.5
3	6328
4	4746
5	3560

Prikažimo i grafički pad vrijednosti automobila ovisno o njegovoj starosti. Na os apscisu nanosimo vrijeme, na os ordinatu cijenu u tisućama eura. Možemo primjetiti da cijena puno brže pada na početku, prvih godina, a što je auto stariji njezino je umanjeње gotovo zanemarivo.



Slika 20. Primjer 1.

5 Logaritamska funkcija

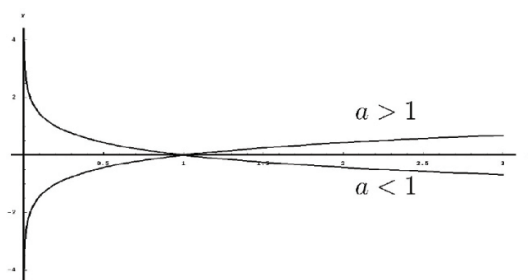
Eksponencijalna funkcija

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

je bijekcija, pa prema tome ima inverznu funkciju f^{-1} koju označavamo sa $\log_a$:

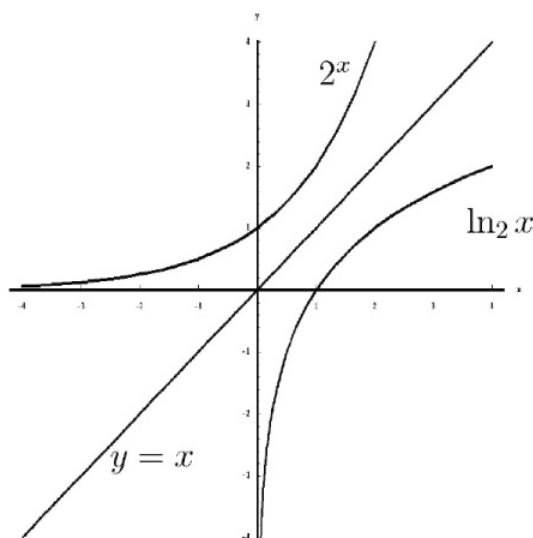
$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Pri tome $\log_a(x)$, $x > 0$, pišemo kao $\log_a x$ i zovemo logaritam broja x po bazi a .



Slika 21. Graf logaritamske funkcije

Iz slike se vidi da je logaritamska funkcija $a > 1$ strogo rastuća, a za $0 < a < 1$ strogo padajuća funkcija. Jedina nultočka logaritamske funkcije $x \rightarrow \log_a x$ je $x_0 = 1$ jer je $a^0 = 1$. Graf funkcije dobijemo tako da napravimo osnosimetričnu sliku grafa eksponencijalne funkcije obzirom na pravac $y = x$.



Slika 22. Graf eksponencijalne funkcije $y = 2^x$ i njene inverzne logaritamske funkcije $y = \log_2 x$

Osnovna svojstva logaritamske funkcije:

1. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
2. $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
3. $\log_a \sqrt[n]{x_1} = \frac{1}{n} \log_a x_1$
4. $\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$
5. $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$

Primjedba 51. Primjenjujući formule za inverznu funkciju ($f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$) na eksponencijalnu funkciju $f(x) = a^x$ i logaritamsku funkciju $f^{-1}(x) = \log_a x$ dobivamo korisne formule

$$a^{\log_a x} = x, x > 0$$

$$\log_a a^x = x, x \in \mathbb{R}$$

Primjedba 52.

- $a = e$ $f(x) = \log_e x = \ln x$ (**prirodni ili Napierovi logaritmi**)
- $a = 10$ $f(x) = \log_{10} x = \log x$ (**dekadski ili Briggsovi logaritmi**)
- $a = 2$ $f(x) = \log_2 x = \lg x$ (**diadski logaritmi**)

Primjer 1. Neka je količina ostatka radioaktivne tvari t dana nakon početka raspada dana formulu $C(t) = 1000 \cdot e^{-0.1t}$. Odredimo vrijeme poluraspada te tvari.

Vrijeme poluraspada je vrijeme potrebno da se početna količina tvari smanji na polovicu. Tražimo, dakle, vrijeme t za koje je $C(t) = \frac{C_0}{2}$. Početnu količinu radioaktivne tvari saznajemo uvrštavajući $t = 0$ u formulu za $C(t)$. Dobivamo $C_0 = C(0) = 1000$. Tražimo t takav da je

$$1000 \cdot e^{-0.1t} = 500$$

Da bismo odredili t , moramo riješiti tu jednadžbu. Prvo je podijelimo s 1000 pa logaritmiramo obje strane. Dobivamo jednadžbu

$$-0.1t = \ln \frac{1}{2}$$

a iz nje lako dobivamo $t \approx 6.9$. Dakle, vrijeme poluraspada jednako je 6.9 dana.

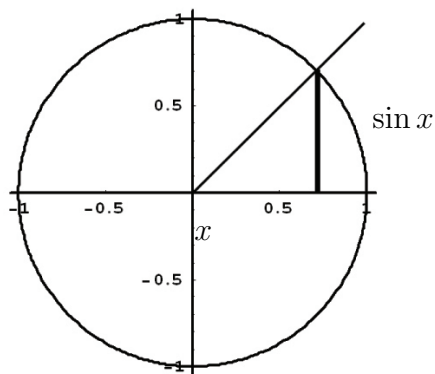
6 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrija je dobila ime po grčkim riječima (*trigonon*=trokut i *metron*=mjera), a odnosi se na dio matematike koji proučava odnose među segmentima (dužinama) i kutovima trokuta u ravnini ili na površini sfere. Pomoću trigonometrijskih funkcija moguće je odrediti nepoznatu dimenziju, kut nagiba u matematičkim i tehničkim proračunima. Trigonometrijske funkcije su **sinus**, **kosinus**, **tangens** i **kotangens**. U nastavku ćemo svaku od njih definirati preko trigonometrijske kružnice te navesti i pojasniti njihova svojstva i grafove.

U svrhu definiranja trigonometrijskih funkcija uvesti ćemo pojam trigonometrijske kružnice. Na jediničnu kružnicu naslonimo brojevni pravac tako da ishodište koordinatnog sustava na pravcu padne u točku $(1, 0)$. Pravac namatamo na kružnicu. Na svaku točku kružnice padne beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca. Jediničnu kružnicu na koju su na navedeni način nanoseni realni brojevi nazivamo trigonometrijska kružnica.

1. Funkcija $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

Funkcija koja realnom broju x pridružuje ordinatu točke $T(x)$ nazivamo **sinus**. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ $\sin x \in [-1, 1]$.



$$\sin 0 = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

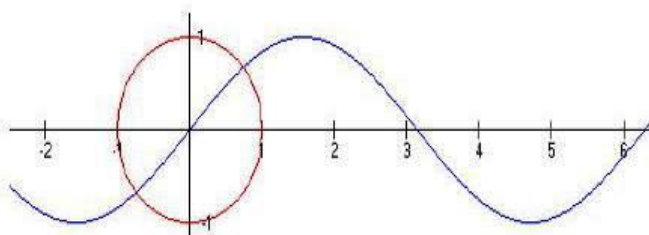
$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 270^\circ = -1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 360^\circ = 0$$

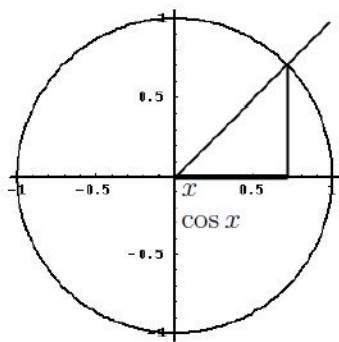
Funkcija $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ je neparna, periodična (temeljni period je 2π). Graf funkcije prikazan je u nastavku.



Slika 23. Graf funkcije sinus

2. Funkcija $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

Funkcija koja realnom broju x pridružuje apscisu točke $T(x)$ nazivamo **ko-sinus**. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ $\cos x \in [-1, 1]$.



$$\cos 0 = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

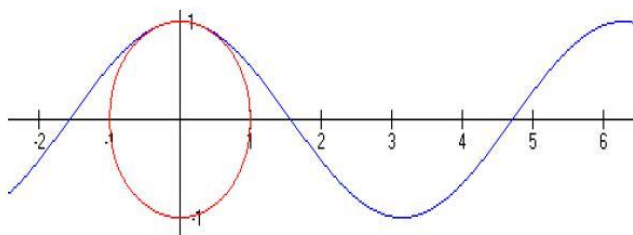
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 270^\circ = 0$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 360^\circ = 1$$

Funkcija $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ je parna, periodična (temeljni period je 2π). Graf funkcije prikazan je u nastavku.



Slika 24. Graf funkcije kosinus

Primjedba 61. Iz grafova funkcija sinus i kosinus može se naslutiti veza koja postoji među njima

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right), \quad \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

Pomoću funkcija sinus i kosinus definiraju se funkcije tangens i kotangens formulama

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad i \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

3. Funkcija $\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

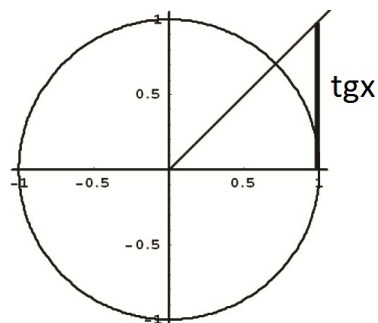
$$\operatorname{tg} 0 = 0$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

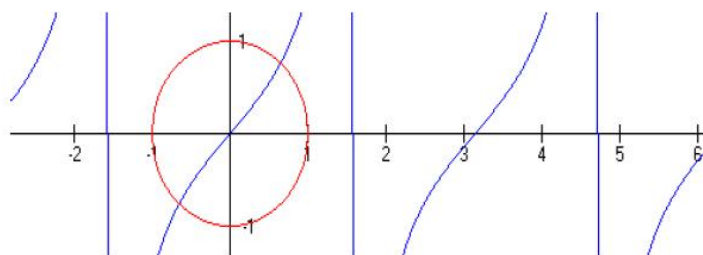
$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$$

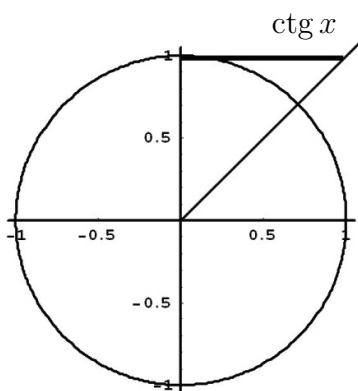


Funkcija tg neparna je, po dijelovima rastuća i periodična s temeljnim periodom π . Njezin graf prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 25. Graf funkcije tangens

4. Funkcija $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$



$$\operatorname{ctg} 0 = \infty$$

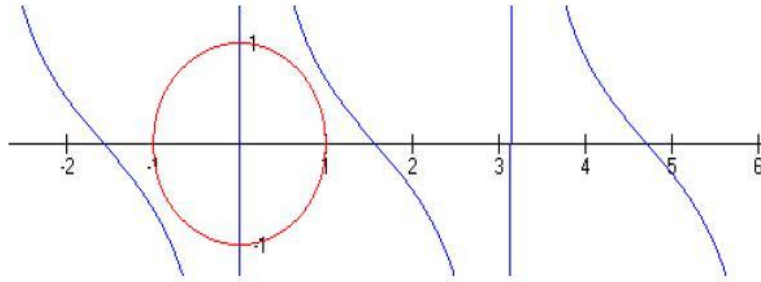
$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$$

Funkcija ctg neparna je, po dijelovima padajuća i periodična s temeljnim periodom π . Njezin graf prikazan je na slici ispod.



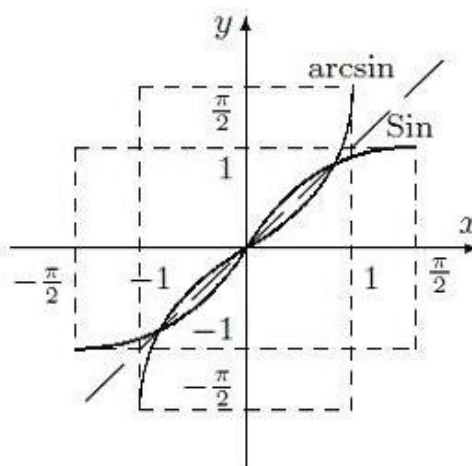
Slika 26. Graf funkcije kotangens

7 Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su funkcije inverzne trigonometrijskima. To su funkcije: **arkus sinus** ($\arcsin$), **arkus kosinus** ($\arccos$), **arkus tangens** ($\arctg$) i **arkus kotangens** (arccotg).

1. Funkcija $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

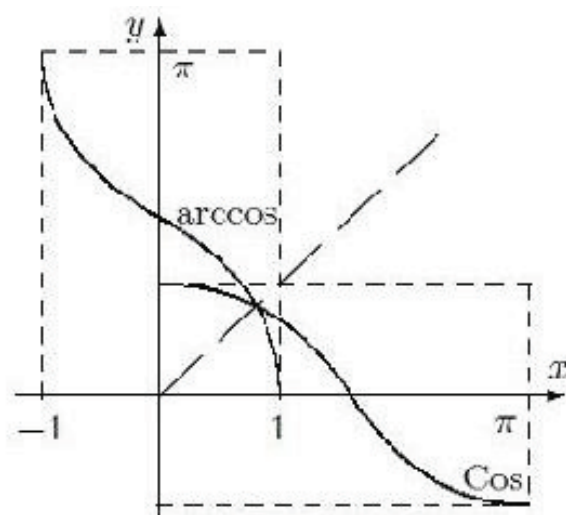
Graf funkcije $\arcsin$ dobiva se kao osnosimetrična slika grafa funkcije $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ u odnosu na pravac $y = x$.



Slika 27. Graf funkcije arkus sinus

2. Funkcija $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

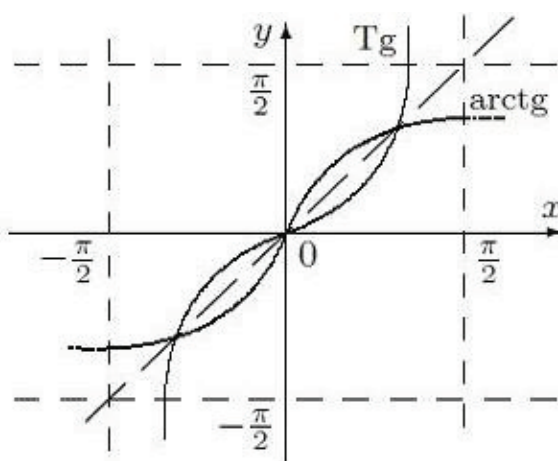
Graf funkcije $\arccos$ dobiva se kao osnosimetrična slika grafa funkcije $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ u odnosu na pravac $y = x$.



Slika 28. Graf funkcije arkus kosinus

3. Funkcija $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

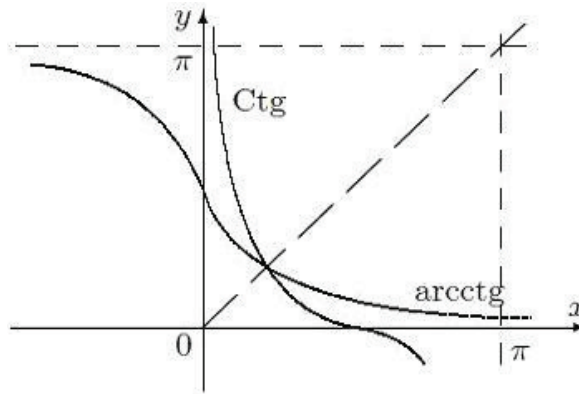
Graf funkcije $\arctg$ dobiva se kao osnosimetrična slika grafa funkcije $Tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ u odnosu na pravac $y = x$.



Slika 29. Graf funkcije arkus tangens

4. Funkcija $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

Graf funkcije $\operatorname{arccotg}$ dobiva se kao osnosimetrična slika grafa funkcije $\operatorname{Ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ u odnosu na pravac $y = x$.

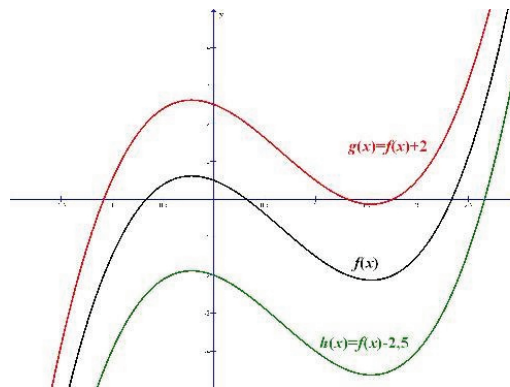


Slika 30. Graf funkcije arkus kotangens

8 Transformacije grafova

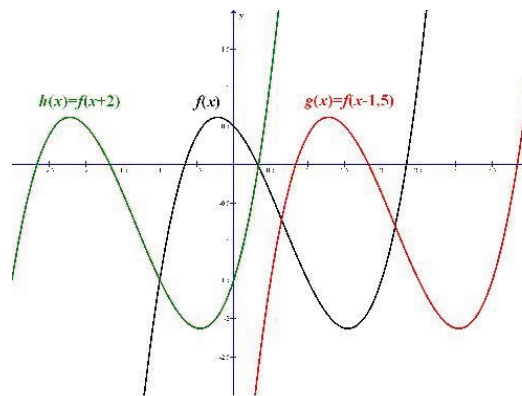
Ako znamo kako u Kartezijevom koordinatnom sustavu izgleda graf realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, lako je skicirati grafove funkcija zadanih formulama:

- $g(x) = f(x) + A$ - graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A nagore (dakle, ako je A negativan, pomak je nadolje)



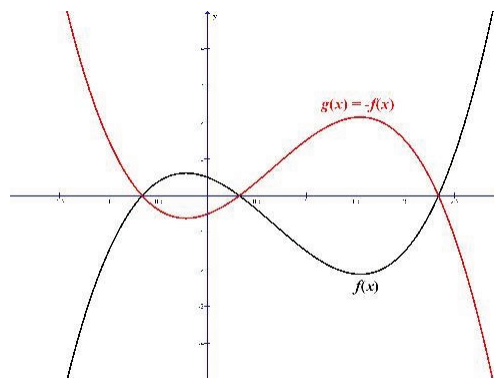
Slika 31. Vertikalna translacija grafa

- $g(x) = f(x + A)$ - graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A ulijevo (dakle, ako je A negativan pomak je udesno)



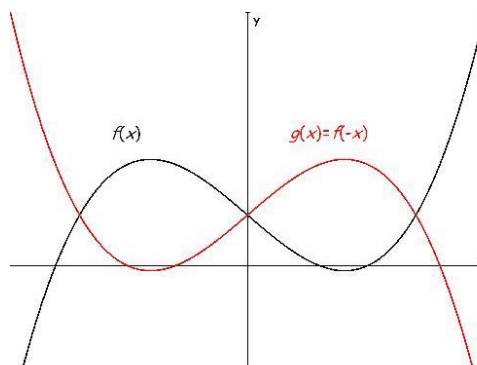
Slika 32. Horizontalna translacija grafa

- $g(x) = -f(x)$ - graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f obzirom na os apscisa



Slika 33. Promjena predznaka funkcije

- $g(x) = f(-x)$ - graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f obzirom na os ordinata



Slika 34. Promjena predznaka varijable

Na osnovu prethodno opisanih funkcija i navedenih primjera proizlazi sljedeća definicija.

Definicija 81. *Elementarnim funkcijama nazivamo one funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja) i konačnog broja komponiranja osnovnih elementarnih funkcija.*

Poglavlje 4

Neelementarne funkcije

Ponekad su potrebne i funkcije koje se zadaju "po dijelovima": na jednom dijelu domene pravilo za izračunavanje vrijednosti funkcije je jedno, na drugom dijelu drugo itd. Sve takve funkcije (i ne samo one) spadaju u neelementarne funkcije. Zadaјemo ih ovako:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x), & x \in B, \\ \dots, \dots \end{cases}$$

Takav zapis znači: ako je x iz A , onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_1 ; ako je x iz B , onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_2 itd. Unija svih skupova $A; B; \dots$ mora dati domenu funkcije f (i pritom skupovi $A; B; \dots$ moraju biti disjunktни tj. ne smiju imati zajedničkih elemenata). Graf funkcije f dobiva se "lijepljenjem" grafova funkcija $f_1; f_2; \dots$. Često kažemo da je f zadana "po dijelovima". U nastavku ćemo promotritи neke primjere neelementarnih funkcija kao što su: apsolutna vrijednost $| \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, Dirichletova funkcija, Heavisideova funkcija i funkcije najveće i najmanje cijelo.

1 Apsolutna vrijednost $| \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ definira se apsolutna vrijednost $|x|$ broja x formulom:

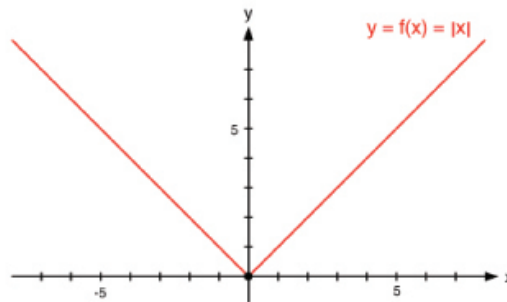
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Iz definicije apsolutne vrijednosti vidi se da je $|-x| = |x|$ i $x \leq |x|$. Nadalje, uočimo da je $|x| = \sqrt{x^2}$. Pomoću jednakosti $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, lako je provjeriti sljedeća svojstva apsolutne vrijednosti:

- 1) $|xy| = |x||y|$
- 2) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- 3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (nejednakost trokuta)
- 4) $|x - y| \leq |x| + |y|$

$$5) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$$

$$6) ||x| - |y|| \leq |x - y|$$



Slika 35. Graf funkcije $f(x) = |x|$

Primjer 1. Riješimo jednađbu $|x + 1| = 3x - 9$.

a) uz uvjet $x + 1 \geq 0$ vrijedi

$$x + 1 = 3x - 9$$

$$x - 3x = -9 - 1$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5$$

Rješenje jednađbe je $x = 5$, jer se rješenje nalazi u intervalu za koji vrijedi nejednakost $x + 1 \geq 0$.

b) uz uvjet $x + 1 < 0$ vrijedi

$$-x - 1 = 3x - 9$$

$$-x - 3x = -9 + 1$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

Rješenje jednađbe $x = 2$ ne nalazi se u intervalu za koji vrijedi nejednakost $x + 1 < 0$ pa iz toga zaključujemo da $x = 2$ nije rješenje jednađbe.

Dakle, rješenje jednađbe je $x = 5$.

Primjer 2. Riješimo nejednađbu $|3x + 1| < 2x + 5$.

a) uz uvjet $3x + 1 \geq 0$ vrijedi

$$3x + 1 < 2x + 5$$

$$3x - 2x < 5 - 1$$

$$x < 4$$

Rješenje zadane nejednađbe mora zadovoljavati nejednakost $3x + 1 \geq 0$ pa iz toga slijedi da je rješenje ovog slučaja interval $[-\frac{1}{3}, 4)$.

b) uz uvjet $3x + 1 < 0$ vrijedi

$$-3x - 1 < 2x + 5$$

$$\begin{aligned} -3x - 2x &< 5 + 1 \\ x &> -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Rješenje zadane nejednadžbe mora zadovoljavati nejednakost $3x + 1 < 0$ pa iz toga slijedi da je rješenje ovog slučaja interval $\langle -\frac{6}{5}, -\frac{1}{3} \rangle$.

Rješenje nejednadžbe je interval $\langle -\frac{6}{5}, 4 \rangle$.

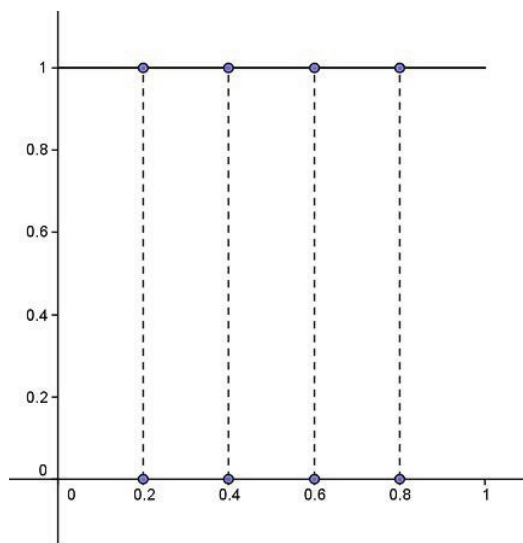
2 Dirichletova funkcija

Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Primjer 1.

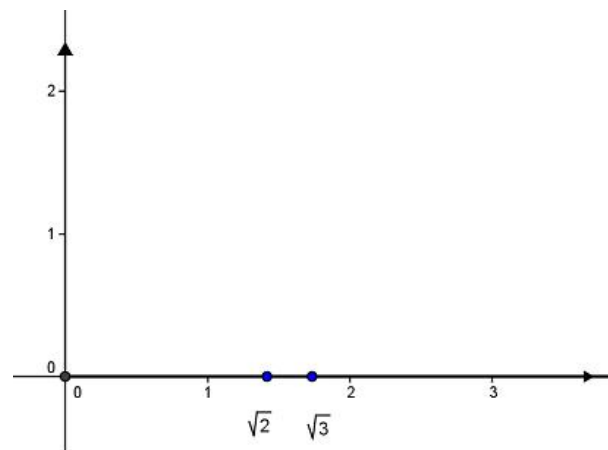
Restrikcija $f|_{\mathbb{Q}}$ je konstantna funkcija koja je neprekidna na $\mathbb{Q}$, dok f nije neprekidna nigdje.



Slika 36. Dirichletova funkcija; aproksimacija odozgo je 1, a odozdo je 0

Primjer 2.

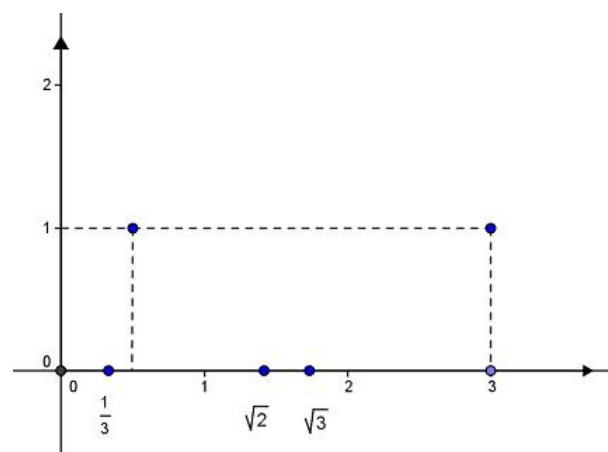
Restrikcija $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ je konstantna funkcija koja je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dok f nije neprekidna nigdje.



Slika 37. Dirichletova funkcija; aproksimacija odozdo i odozgo je 0

Primjer 3.

Prikažimo na nekoliko brojeva vrijednost funkcije za racionalne i iracionalne brojeve.



Slika 38. Za racionalne brojeve vrijednost funkcije je u 1, a za iracionalne brojeve vrijednost funkcije je u 0

3 Heavisideova funkcija

Heavisideova stepenasta funkcija je matematička funkcija koju označavamo sa $H(x)$, a poznata je i pod nazivom “jedinična stepenasta funkcija“. Stepenu ili “step“ funkciju elektroinženjer, matematičar i fizičar Heaviside primijenio je u analizi električnih krugova.



Slika 39. Oliver Heaviside (1850.-1925.)

Naziv Heavisideova stepenasta funkcija može predstavljati ili funkciju konstantnu po dijelovima ili generaliziranu (poopćenu) funkciju. U ovom radu definirat ćemo i prikazati Heavisideovu funkciju konstantnu po dijelovima.

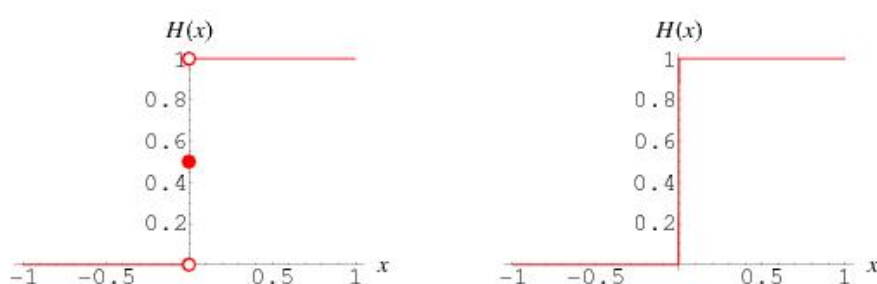
Primjeri jednodimenzionalne funkcije konstantne po dijelovima:

- Heavisideova stepenasta funkcija
- pravokutna funkcija
- kvadratna valna funkcija

Heavisideova stepenasta funkcija

Ukoliko je definirana kao funkcija konstantna po dijelovima, tada Heavisideova stepenasta funkcija ima oblik:

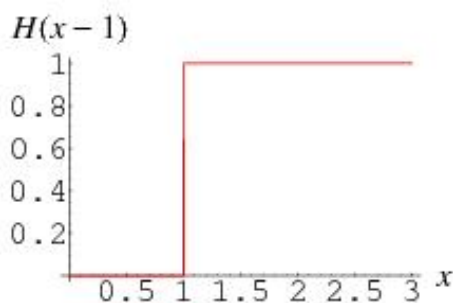
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Slika 40. Heavisideova stepenasta funkcija

Primjer 1.

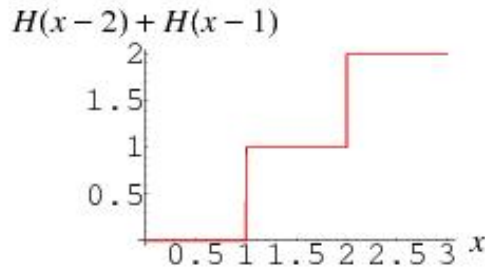
Heavisideova funkcija konstantna po dijelovima s argumentom $x - 1$, na kojoj se vidi pomak po x -osi za 1 u desno. Iz definicije se vidi da je vrijednost funkcije 1 za svaki $x > 1$, a 0 za svaki $x < 1$.



Slika 41. Primjer 1.

Primjer 2.

Linearna kombinacija dviju Heavisideovih stepenastih tih funkcija, ali s atributima $x - 1$ i $x - 2$.



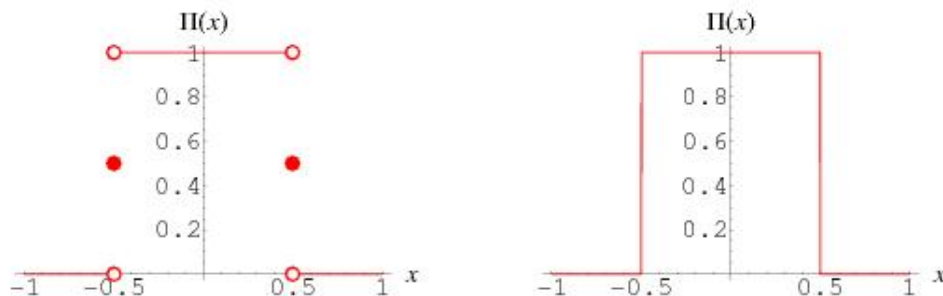
Slika 42. Primjer 2.

Iz grafa funkcije $H(x - 1) + H(x - 2)$ vidi se zašto se funkcija zove stepenasta.

Pravokutna funkcija

Pravokutna funkcija $\Pi(x)$ je funkcija u kojoj je 0 izvan intervala $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, kao i jedinično područje unutar intervala. Naziva se još i puls funkcija, prozor funkcija ili vrata funkcija, a definirana je sa:

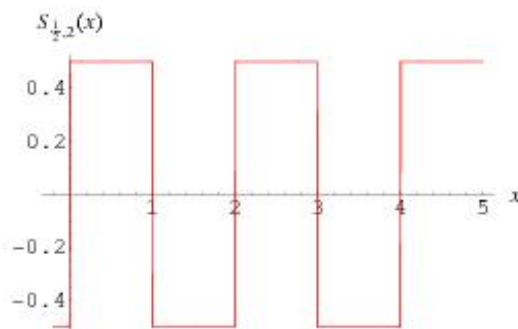
$$\Pi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 1, & |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$



Slika 43. Lijeva slika prikazuje funkciju kako je definirana, dok desna prikazuje kako izgleda ukoliko je crtamo osciloskopom

Kvadratni val

Kvadratni val je periodična forma vala koja se sastoji od trenutnih prijelaza između dva nivoa. Kvadratni val se još naziva i Rademacherova funkcija. Kvadratni val prikazan na slici ima period 2 i nivoe $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$. Uobičajeni nivoi za kvadratni val su i $(-1, 1)$ i $(0, 1)$ (digitalni signali).



Slika 44. Kvadratni val

4 Funkcije najveće i najmanje cijelo

Definicija 41. Funkcija $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x naziva se funkcija pod (eng. floor) ili najveće cijelo.

Primjer 1. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Definicija 42. Funkcija $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj koji nije manji od x naziva se funkcija strop (eng. ceiling) ili najmanje cijelo.

Primjer 2. $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil -\pi \rceil = -3$.

Primjedba 41. Funkcije najveće i najmanje cijelo su po dijelovima linearne i konstantne funkcije te imaju prekide u cijelim brojevima.

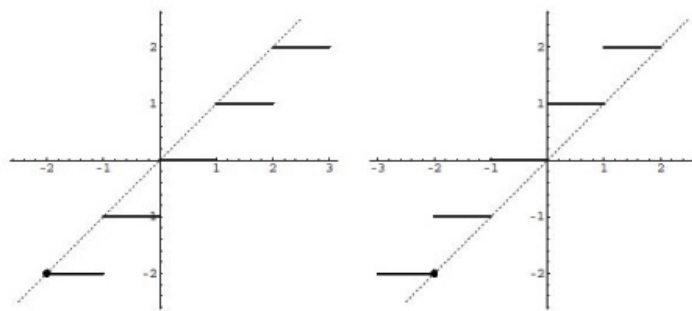
Iz definicije je očigledno

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \qquad x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad i \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

Dakako, za cjelobrojne argumente vrijednosti tih dviju funkcija su jednake

$$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lceil x \rceil = x$$



Slika 45. Funkcije pod i strop

Funkcije pod i strop možemo vrlo lako izraziti jednu pomoću druge koristeći jednakosti

$$\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$$

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

Neka je n cijeli i x realan broj. Iz definicija funkcija pod i strop izravno slijedi:

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$$

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$$

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \leq n < x + 1$$

Također vrijedi i

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

$$\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$$

što slijedi iz nejednakosti

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$$

$$\lceil x \rceil + n - 1 < x + n \leq \lceil x \rceil + n$$

i cjelobrojnosti od $\lfloor x \rfloor + n$ i $\lceil x \rceil + n$.

Međutim, ovakvo svojstvo ne vrijedi za množenje, tj. općenito je $\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$.

Također, općenito za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Primjer 3. *Petar Zrinski i Fran Krsto Frankopan pogubljeni su 30. travnja 1671. godine. Kojeg dana se to dogodilo?*

Za dobivanje odgovora na ovo pitanje potrebna nam je sljedeća formula

$$n = g + \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{g}{400} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g}{100} \right\rfloor + 3m + d + 1 - \left\lfloor \frac{2m + 1}{5} \right\rfloor$$

Pod datumom podrazumijevamo dan - d (sa vrijednostima od 1 do 31), mjesec - m (sa vrijednostima od 1 do 12) i godina - g (bilo koji prirodan broj). Ako znamo sva tri podatka: d, m, g i ako je m veće od 2 ($m > 2$) izračunajmo n prema gore navedenoj formuli.

Imamo podatke: $d = 30$, $m = 4$, znači $m > 2$, $g = 1671$. Uvrštavajući vrijednosti u formulu dobivamo:

$$n = 1671 + \left\lfloor \frac{1671}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1671}{400} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1671}{100} \right\rfloor + 12 + 30 + 1 - \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor = 2118.$$

Dijeleći dobijenu vrijednost n (2118) sa 7, imamo:

$$2118 = 3027 + 4$$

Znači, ova dva velikana hrvatske povijesti pogubljena su u četvrtak.

Primjer 4. Broj cijelih brojeva u intervalu $[x, y)$. Za cijeli broj n je $n \in [x, y)$ ako i samo ako je $x \leq n < y$, a kako je

$$x \leq n \Leftrightarrow [x] \leq n \quad i \quad n < y \Leftrightarrow n < [y]$$

to ako i samo ako je $[x] \leq n < [y]$, pa cijelih brojeva u intervalu $[x, y)$ ima $[y] - [x]$.

Poglavlje 5

Funkcije u nastavi matematike

1 Funkcije u školskoj matematici nekad i sad

Svojedobno su u osnovnoj školi učenici savladavali pojam funkcije intuitivno, bez strogih matematičkih definicija. Taj je način prihvaćanja pojma funkcije bio primjeren uzrastu i olakšavao je kasniji susret sa strogom matematičkom definicijom funkcije i njezinim zapisom. Nedostatak učenja osnova teorije skupova također je znatno otežao uvod u matematičku definiciju pojma funkcije.

Osnovni pojmovi i operacije sa skupovima u osnovnoj se školi ne uče već dugi niz godina, pa ih nema ni u najnovijem programu nastave matematike. Funkcije se uvode u 7. razredu, i to odmah preko strogo matematičkog aparata i zapisa linearne funkcije koji se odmah nakon toga povezuje s pravcem. Zato učenici pojam funkcije često i poistovjećuju s pojmom pravca.

2 Mišljenja matematičara vezana za pojam funkcije

Pojam funkcije je veoma važan u nastavi matematike zbog njegovog značaja za matematiku i njenu primjenu iz nekoliko razloga:

- funkcijsko razmišljanje daje posebnu dimenziju matematičkom obrazovanju
- omogućuje bolje razumijevanje i efikasnije postupke u drugim nastavnim sadržajima
- bolje priprema učenika za buduća matematička znanja i primjene matematike

Iako u Nacionalnom okvirnom kurikulumu stoji:

- za osnovnu školu

- prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički, opisati takve prikaze te ih prevesti s jednoga na drugi
- za strukovne škole
 - opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima; prevesti iz jednoga od navedena četiri oblika u drugi te čitati, uspoređivati i tumačiti ovisnosti (veze)
 - prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstremi, točke važne za određenu situaciju), te uspoređivati jednostavne grafove
- za gimnazije dodatno
 - prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva
 - primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu.

Stručnjaci smatraju da su ti sadržaji nedovoljni i da se prekasno uvode. Do sedmog razreda pojam funkcije gotovo da nije uopće prisutan. U sedmom i osmom razredu je možda zadovoljavajuće prisutan, ali bi se i tu mogla uraditi poboljšanja (npr. nema grafa obrnute proporcionalnosti i komponiranja geometrijskih preslikavanja i simetrija). U srednjoj školi se funkcije temeljitije usvajaju tek u 4. razredu, dakle, na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja u kojem je taj pojam itekako važan.

Većina učenika prilikom dolaska u srednju školu nema razvijeno apstraktno razmišljanje. Savladavanje Kartezijevog sustava i algebarskih izraza za mnoge učenike nije jednostavan zadatak. Učenje funkcija treba prilagoditi učenicima na način da se uravnoteženo uvode tri najvažnija oblika prikaza, a to su numerički, grafički i algebarski. Umanjiti ulogu učenja funkcija s numeričkog aspekta predstavljalo bi ozbiljno nerazumijevanje povijesne važnosti analitičkih i geometrijskim prikaza funkcije. U stvarnim životnim situacijama, konkretne brožčane vrijednosti temelj su algebarskih izraza i geometrijskih krivulja. Matematičari 17-og i 18-og stoljeća proveli su mnogo vremena računajući i istražujući kako bi došli do nekakvih zakonitosti i stalnih odnosa. Newton je, na primjer, ispunio mnogo stranica dugačkim aritmetičkim računima. Istraživanja su pokazala da pri interpretaciji funkcionalnih odnosa kroz grafove, učenici često pribjegavaju numeričkim zaključivanjima u koje su sigurniji. (Ponte, 1984.) U pedagoškom smislu, za ove učenike brojevi su glavni matematički pojmovi na koje se apstraktni matematički pojmovi postepeno svode. Može se reći da mnogi od problema koji učenici imaju s matematikom u školi proizlaze iz pritiska da se bave uglavnom sa apstraktnim pojmovima, bez obzira na njihovu prirodnu sklonost. Izgradnja i analiza tablice, računanje brožčanih vrijednosti, razvoj

u kvantitativnom smislu, stjecanje osjećaja za ono što su prihvatljive i neprihvatljive aproksimacije su važni aspekti matematičke kompetencije koje se mogu postići ako se učeniku prikažu konkretnim brojevima, koji ako je moguće dolaze iz stvarnih životnih situacija.

3 Prijedlozi za razmatranje i prirodniji način uvođenja pojma funkcije

Nije osnovno pitanje na kojem nivou obrazovanja uvesti dani matematički pojam nego što od svakog matematičkog pojma uvesti na danom nivou obrazovanja.

(W. Servais and T. Varga: Teaching School Mathematics : A UNESCO Source book, Penguin Books, 1971, UNESCO)

U ovom dijelu izdvojit ćemo nekoliko mišljenja različitih stručnjaka i prijedloga za prirodniji način uvođenja funkcije. Većina stručnjaka smatra da se pojam funkcije ne bi trebao odmah uvoditi preko linearne funkcije niti preko strogog matematičkog zapisa, već kao odnos dviju zavisnih veličina. Učenicima viših razreda osnovne škole nije teško razumjeti odnos između dviju veličina od kojih je jedna zavisna o drugoj. Lako je naći mnoštvo primjera koji su učeniku bliski i koji ukazuju na takav pojam funkcije.

Vozimo li se konstantnom brzinom, broj prijeđenih kilometara zavisi o duljini trajanja vožnje, tj. o vremenu; volumen kocke i površina kvadrata ovisni su o duljini brida odnosno stranice; ukupna cijena kupljene robe zavisio količini kupljene robe; vrijeme za obavljanje nekog posla ovisi o broju radnika koji ga obavljaju.

To je intuitivni pristup značenju funkcije s kojeg se postupno prelazi na pojam pridruživanja. Dobro je da učenici sami uoče pravilo pridruživanja, napišu ga i izračunaju nekoliko zadanih vrijednosti.

No treba isto tako istaknuti da postoje i veličine koje se ne pridružuju po nekom unaprijed zadanom pravilu kao što je to u gore spomenutim primjerima.

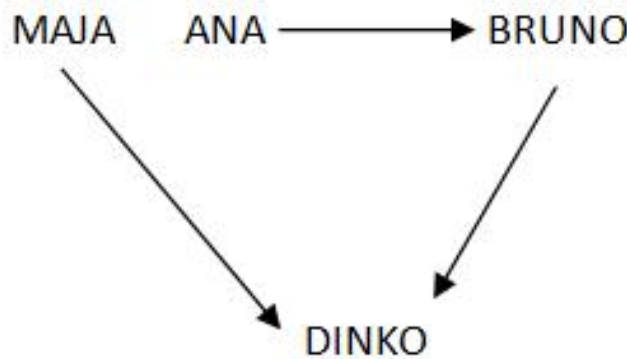
Tako npr. svakoj se europskoj državi može pridružiti njezin glavni grad, svakoj prisutnoj osobi u prostoriji može se pridružiti njezina visina ili broj godina, svakom učeniku iz razrednog odjeljenja može se pridružiti zaključna ocjena iz matematike itd.

Tu je nužno primijetiti da u svim primjerima postoje slučajevi kod kojih se različitim nezavisnim veličinama može pridružiti jedna te ista zavisna veličina. Tako npr. više različitih osoba može imati istu visinu ili broj godina, nekoliko učenika imaju istu zaključnu ocjenu iz matematike itd.

Također neki stručnjaci smatraju da bi puno lakše bilo uvođenje pojma funkcije od samog početka školovanja, te da bi na taj način učenici na prirodniji način shvatili sam pojam. Od prvog do četvrtog razreda nedostaje razvijanje osjećaja za strukturiranje situacije. Nešto malo od onog što je nekad pretjerano glorificirano, a sad pretjerano demonizirano moderna matematika htjela u prevelikim količinama uvesti. U svakodnevnom dječjem svijetu sve je puno skupova, odnosa i funkcija koji se mogu

jednostavno grafički prikazati (i tako strukturirati i apstrahirati na ono bitno za razmatranje).

Primjer 1. Dan je grafički prikaz neke obitelji gdje ćemo radi ilustracije izdvojiti funkciju tata (x) (svatko pokazuje svog tatu) (zanimljivije je ako istaknemo drugim bojama i druge relacije i funkcije).



Slika 46. Primjer 1.

Pitanja:

Tko je tata od Brune? Kome je tata Bruno? Tko je ovdje djeda? A tko brat?

Od petog do šestog razreda bi se funkcije mogle već simbolički i računski gledati. Mogla bi se u prethodnom primjeru uvesti oznaka $T(x)$ za biti tata od X i postaviti pitanja:

a) Izračunaj $T(T(ANA))$

b) Riješi jednadžbu $T(X) = DINKO \dots$

Od sedmog do osmog razreda dolazi do korelacije s predmetom fizika gdje se javljaju razne direktne i obrnute proporcionalnosti, linearne i kvadratne funkcije. Taj je dio već dobro zastupljen, ali se pomoću odgovarajućeg softwera (npr. *Microsoft Mathematics*) mogu crtati i složeniji grafovi. U srednjoškolskom školovanju stručnjaci smatraju da bi trebalo napraviti cjelokupnu reformu. Umjesto da se učenici iscrpljuju na sređivanju presloženih algebarskih izraza, dijeljenju polinoma, računanju koordinata točke koja dijeli dužinu u danom omjeru, posebnim formulama za tetivni četverokut, i nejednadžbama s apsolutnim vrijednostima koje se u matematici jedino sreću u udžbenicima iz matematike, bilo bi sigurno bolje napraviti prikladan modul o funkcijama. U tom bi modulu, uz primjereni nivo preciznosti i korištenjem grafova funkcija, učenik relativno jednostavno i efikasno usvojio osnovne pojmove o funkciji koje bi mogao primijeniti na bolje razumijevanje i efikasnije rješavanje jednadžbi i nejednadžbi (kakve operacije smijemo raditi s objema stranama jednadžbe, zašto može doći do gubitka ili viška rješenja, zašto su važne inverzne funkcije za jednadžbe, a monotone za nejednadžbe, kakva je veza rješenja jednadžbi i nultočaka funkcija, rješavanja nejednadžbi i ispitivanja predznaka funkcija, itd. Za bolje razumijevanje i efikasnije usvajanje složenijih funkcija (apsolutne vrijednosti, korijena, potencija, eksponencijalnih, logaritamskih, trigonometrijskih i arkus funkcija) u sljedećim godinama, te jednadžbi i nejednadžbi koje su vezane uz te funkcije. Bolje razumijevanje sadržaja iz ostalih predmeta, pogotovo fizike, tokom cijele srednje škole.

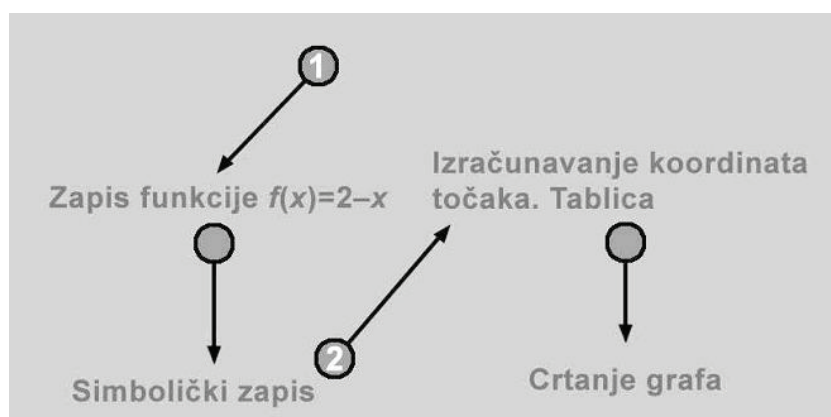
4 Prednosti tabličnog i grafičkog zadavanja funkcije

Kao bitnu prednost većina stručnih matematičara smatra uvođenje funkcija pomoću tabličnog ili grafičkog zadavanja.

Smatra se da svugdje oko nas postoje veličine koje su zavisne jedna o drugoj, tj. koje pridružujemo jedne drugima i izražavamo ih preko raznih tablica. Prilikom svladavanja svaku je novu funkciju korisno uvoditi preko tablica. Drugi način kojim možemo zadati funkciju je grafom. Ovo će u osnovnoj školi posebno doći do izražaja kod linearne funkcije. Kasnije u srednjoškolskom obrazovanju grafu se treba posvetiti posebna pažnja kod svih funkcija koje će se obrađivati i kod svih tipova zadataka gdje se možemo osvrnuti ili pozvati na graf.

Grafom možemo zorno opisati funkciju. No iskustveno je poznato da je grafički prikaz funkcije učenicima teško razumljiv i sporo ga prihvaćaju. Neki nikada u potpunosti. Možda upravo zbog toga što se prvo krenulo s pojmom i zapisom funkcije $f(x)$ koji je učeniku apstraktan, nakon čega se tom zapisu pridružuje graf kao skup svih uređenih parova $(x, f(x))$. To je još jedno apstraktno pridruživanje s kojeg se odmah preskače na crtanje skupova točaka (x, y) (pri čemu je $y = f(x)$ u koordinatnoj ravnini.) Još veći problem nastaje kod analitičke geometrije jer se uz sve opisano mora povezati i svojstvo krivulje sa zadanim grafom. Krivulje obično ne predstavljaju graf funkcije što neke učenike dodatno zbunjuje u jasnom poimanju pojma grafa. Mišljenja većine matematičara se podudaraju da bi eksplicitni zapis funkcije $f(x)$ trebalo uvoditi postupno. Također smatraju da bi bilo dobro da se iz zapisa funkcije ne prelazi odmah na crtanje grafa pridruženog toj funkciji. Učeniku bi bilo lakše krenuti obrnutim putem, usvojiti prvo crtanje grafa funkcije ili krivulje prema zadanom svojstvu ili prema implicitnom zapisu, a ne prema eksplicitnom zapisu. Kada učenik savlada crtanje grafa preko izračunavanja točaka, pravo je vrijeme da se s grafom poveže zapis pripadne funkcije. Na taj se način uz neko zadano svojstvo (kojeg lako prikažemo grafički jer povezuje dvije veličine koje se međusobno lako izračunaju jedna iz druge) posebno poveže graf, a posebno zapis funkcije. Tada se može uspostaviti korespondencija između pojma funkcije i njezinog grafa.

Primjer 1. *Uvodi se linearna funkcija $f(x) = -x + 2$, njoj se pridružuje simbolički zapis $y = -x + 2$, izračunavaju se vrijednosti točaka i crta tablica te nakon toga graf linearne funkcije. Funkcija se uvodi na apstraktan način kojeg učenik ne može zorno predložiti niti povezati s realnom situacijom. Zatim se uvodi još jedno apstraktno pridruživanje uređenih parova $(x, f(x)) = (x, y)$ na osnovu kojeg se crtaju točke grafa.*

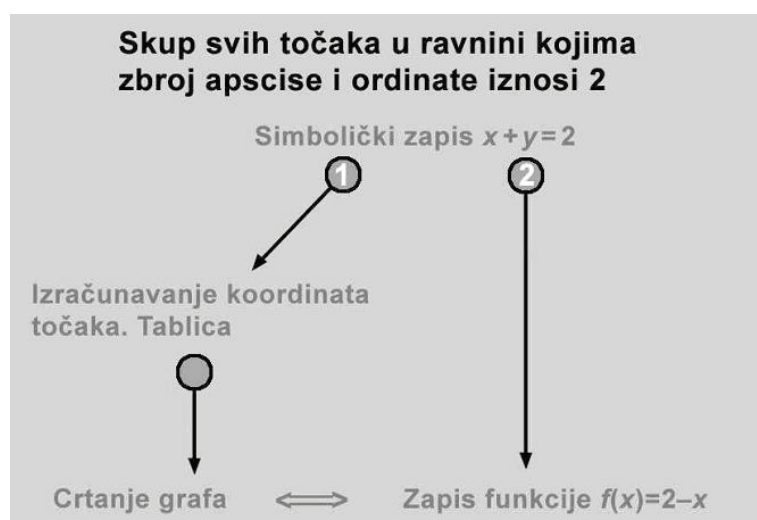


Slika 47. Primjer 1.

Alternativni prijedlog

Zadaje se svojstvo koje povezuje koordinate točaka u koordinatnoj ravnini. Odredi skup svih točaka u ravnini kojima zbroj apscise i ordinate iznosi 2.

Učenik izračunava koordinate točaka iz simboličnog zapisa $x + y = 2$ koji je prirodno vezan sa zadanim svojstvom i crta graf. Tek kada je savladao crtanje grafa može iz zadanog svojstva i simboličkog zapisa prijeći i na zapis i pojam funkcije $y = f(x)$ te uspostaviti korespondenciju između grafa i funkcije.



Slika 48. Alternativni prijedlog

Bibliografija

- [1] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.
- [2] J. P. DA PONTE, *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications*, The Mathematics Educator, 3(2), 1992, 3-8
- [3] E. R. MARINIĆ KRAGIĆ, *Funkcije u nastavi matematike*, Matematika i škola, 38, 2007, 105-110
- [4] M. JONES, *Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function*, The Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 7(2), 2006
- [5] I. KLEINER, *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*, The College Mathematics Journal, 20 (4), 1989, 282-300
- [6] I. KUZMANOVIĆ, *Neke primjene funkcija pod i strop*, Osječki matematički list, 8(2008), 77-82
- [7] Mathworld Wolfram
(dostupno na <http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html>,
travanj 2012.)

Sažetak

Pojam funkcije je jedan od temeljnih matematičkih pojmova značajan unutar same matematike kao i u njezinoj primjeni. Funkcije se uvode i izučavaju već u 7. razredu osnovne škole i tijekom cijele srednje škole. U prvom poglavlju prikazan je pregled razvoja pojma funkcije kroz povijest te tko je sve sudjelovao u njegovu stvaranju. U drugom dijelu posebno su obrađene elementarne funkcije kroz primjere primjenjive u nastavi matematike za učenike osnovnih i srednjih škola. Treći dio sastoji se od definicije i osnovnih svojstava nekih neelementarnih funkcija. U posljednjem dijelu iznesena su mišljenja različitih matematičara vezana za sam pojam funkcije i njegovu primjenu u školskoj matematici. Navedeni su određeni prijedlozi kako da se na prirodniji i učeniku shvatljiviji način uvode sam pojam funkcije.

Ključne riječi: funkcija, elementarne funkcije

Summary

The term function is one of the main mathematical terms meaningful within the core of mathematics as well as in applying maths. Functions are introduced and learnt in the seventh grade of primary school and they are throughout in all grades of high school. The first chapter gives us an overview of the term's origin and its development through history. The second chapter talks about elementary functions and provides examples applicable in teaching maths to primary and high school students. The third part contains definitions and basic properties of some non elementary functions. The last chapter provides an insight to the opinions of different mathematicians concerning the term function and its usage in school maths. Several suggestions are given on how to introduce the term function to students in a more natural and comprehensible way making it easier for the students to understand.

Key words: function, elementary functions

Životopis

Rođena sam 15.01.1985. godine u Osijeku. Osnovnu školu “Vladimir Nazor“ u Čepinu upisala sam u rujnu 1991. godine. U rujnu 1999. upisala sam III. Gimnaziju u Osijeku. U srpnju 2003. godine upisala sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, a sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike u listopadu 2007. godine. Od svibnja 2006. godine radim u Kontaktnom centru T-coma u Osijeku, a od listopada 2008. radim kao predavač matematike za osnovnu, srednju školu i određene studije u Pi centru za edukaciju.