

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike

Marina Križić

Planarni grafovi

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike

Marina Križić

Planarni grafovi

Diplomski rad

Voditelj: Prof. dr. sc. Antoaneta Klobučar

Osijek, 2013.

Sadržaj

UVOD	4
1. Osnovni pojmovi o grafovima	5
2. Planarnost i neplanarnost	10
2.1. Algebarski dokazi neplanarnosti	11
2.2. Neplanarnost bipartitnih grafova	12
2.3. Neplanarni podgrafovi	14
3. Rastezanje planarnih prikaza	16
3.1. Stapanje planarnih grafova	18
3.2. Dodatci o podgrafu	21
3.3. Preklapanje dodataka	22
4. Teorem Kuratowskog	23
4.1. Korak 1. Minimalni kontraprimjer je jednostavan i 3 - povezan	25
4.2. Korak 2. Traženje ciklusa s 3 dodatka koji se međusobno preklapaju	27
4.3. Korak 3. Analiza konfiguracije ciklusa i dodataka	29
5. Planarni algoritam	32
5.1. Blokirani i prisiljeni dodatci podgrafu	32
5.2. Uvodni algoritam	34
5.3. Odabir staze koja se iduća dodaje	34
5.4. Algoritam	35
6. LITERATURA	36
7. SAŽETAK	37
8. SUMMARY	37
9. ŽIVOTOPIS	38

UVOD

Postoji nebrojeno mnogo skupova s konačnim brojem elemenata među kojima postoje neke relacije. Takve i mnoge druge konačne skupove i strukture proučava matematička disciplina koja se zove kombinatorna i diskretna matematika. Vrlo važan dio kombinatorike su grafovi. Grafovi su matematički objekti koje proučava moderna grana matematike - teorija grafova. Teorija grafova spada u kombinatoriku i predstavlja njezin najrazvijeniji dio. Graf je jedna od osnovnih matematičkih struktura koja omogućuje modeliranje relacija između elemenata konačnih skupova. Grafovima se jednostavno mogu modelirati, tj. analizirati i rješavati, složeni problemi u različitim područjima. Ta područja su : ekonomija, molekularna biologija, urbano planiranje, dizajn računarskih mreža, predstavljanje prometnica u jednoj državi, planiranje rada letenja.

Zbog važnosti grafova potrebna je dobra kombinatorna karakterizacija posebne vrste grafova, a to su planarni grafovi. Poljski matematičar Kazimierz Kuratowski(1896.-1980.) dao je najveći doprinos razvitku planarnih grafova. Teorem Kuratowskog dvostrani je test koji kaže da je graf planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf homomorfan s potpunim grafom K_5 ili potpunim bipartitnim grafom $K_{3,3}$. Izveden je i jednostrani test koji pokazuje da je graf s prevelikim brojem bridova neplanaran. Ako nema prevelikog broja bridova to ne implicira planarnost grafa.

1. Osnovni pojmovi o grafovima

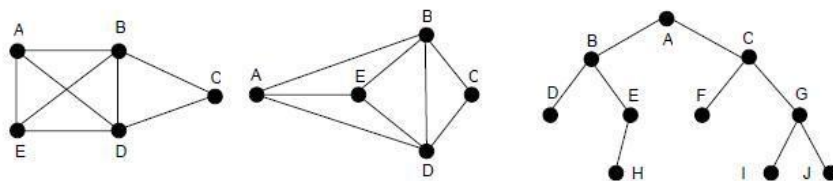
Teorija grafova jedna je od grana koja nalazi veliku primjenu na području mreža računala, primjerice na područjima algoritama usmjeravanja, traženje puteva kroz mrežu te opisanju topologije mreže. Teorija grafova bavi se grafovima, tj. objektima koji se mogu prikazati određenim brojem točaka (tzv. vrhovi) povezanih određenim brojem linija (tzv. bridovi).

Grafove definiramo kao jednu od osnovnih matematičkih struktura. Pojavljuju se u raznim oblicima i situacijama. Pritom nije bitan izgled prikaza grafa, nego samo vrhovi koji su bridovima međusobno povezani. Mnoge pojave možemo modelirati grafovima koji se sastoje od točaka i njihovih spojnica. Primjerice vrhovi mogu predstavljati ljude iz neke skupine, a bridovi parove prijatelja. Isto tako graf može predstavljati električnu mrežu, čiji su vrhovi električne komponente, a spojnice električne veze.

U daljnjem tekstu navest ćemo neke osnovne pojmove teorije grafova.

Definicija 1.1 *Graf* je uređeni par $G = (V, E)$ koji se sastoji od nepraznog skupa vrhova $\emptyset \neq V = V(G)$ i skupa bridova $E = E(G)$ koji je disjunktan s V , a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu krajevi od e . Tada su vrhovi u i v susjedni. Vrh v je izoliran ako mu je stupanj jednak nuli, tj. vrh v nije kraj niti jednom bridu.

Na Slici 1.1 prikazano je nekoliko primjera grafova.

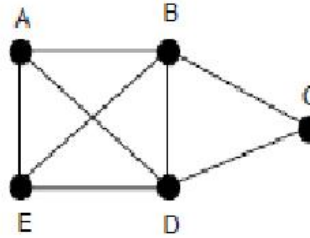


Slika 1.1: Primjeri grafova

Grafovi su zanimljivi jer pomoću njih možemo jednostavno modelirati složene probleme, kao što su predstavljanje prometnica u jednoj državi, predstavljanje električnih mreža, te mreža računala.

Tablicom susjedstva je najjednostavnije prikazati graf. To je tablica u kojoj redovi i stupci predstavljaju vrhove grafa. Polje u tablici koje dobijemo križanjem retka i i stupca j predstavlja broj bridova koji spajaju vrhove i i j .

Na Slici 1.2 imamo prikazan graf za koji ćemo ispisati pripadnu tablicu susjedstva.



Slika 1.2: Graf

Za graf na Slici 1.2 pripadna tablica susjedstva glasi:

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	1
B	1	0	1	1	1
C	0	1	0	1	0
D	1	1	1	0	1
E	1	1	0	1	0

Za ovakvu vrstu grafa tablica susjedstva je simetrična obzirom na glavnu dijagonalu. Na glavnoj dijagonali pojavljuju se samo nule. To znači da uzimamo da nam je udaljenost vrha od samog sebe jednaka nuli.

Kažemo da su grafovi G i H izomorfni ako postoje bijekcije $\Theta : V(G) \rightarrow V(H)$ i $\varphi : E(G) \rightarrow E(H)$ tako da je vrh v kraj brida e u G ako i samo ako je $\varphi(v)$ kraj brida $\varphi(e)$ u H , ili jednostavnije, ako postoje bijekcije među vrhovima i među bridovima tako da susjedni vrhovi prelaze u susjedne. Uređeni par $f = (\Theta, \varphi) : G \rightarrow H$ tada se zove izomorfizam iz G u H .

Definicija 1.2 *Brid čiji se krajevi podudaraju naziva se **petlja**, ukoliko su krajevi različiti naziva se **pravi brid** ili **karika**.*

Definicija 1.3 *Dva ili više brida s istim parom krajeva zovu se **višestruki bridovi**.*

Definicija 1.4 *Graf je **jednostavan** ukoliko nema petlji, a ni višestrukih bridova.*

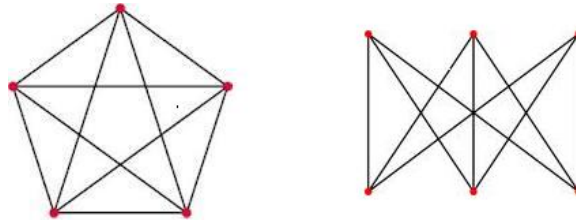
Definicija 1.5 *Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom naziva se **potpun graf**.*

Do na izomorfizam postoji jedinstveni potpuni graf s n vrhova i $\binom{n}{2}$ bridova koji označavamo K_n . Označimo s $|V_G|$ broj vrhova, a s $|E_G|$ broj bridova grafa G .

Definicija 1.6 Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je **bipartitan ili dvodjelan graf** ako se skup V može particionirati u dva skupa X, Y tako da svaki brid iz E spaja vrh iz X s vrhom iz Y . Particiju $\{X, Y\}$ skupa vrhova V zovemo biparticijom od G .

Definicija 1.7 Bipartitan graf $G = (V, E)$, pri čemu je $X \cup Y$, je potpun bipartitni graf ako je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y . Ako je $|X| = m$ i $|Y| = n$, takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označava se s $K_{m,n}$. Vrijedi $|V(K_{m,n})| = m + n$ i $|E(K_{m,n})| = m \cdot n$.

Pogledajmo na Slici 1.3 primjere grafova K_5 i $K_{3,3}$.



Slika 1.3: Grafovi K_5 i $K_{3,3}$

Potpuni graf K_5 i potpuni bipartitan graf $K_{3,3}$ zovemo grafovima Kuratowskog.

Definicija 1.8 Neka je $v \in V(G)$. Stupanj vrha v je broj $d_G(v)$ bridova od G incidentnih s v , pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida.

Definicija 1.9 Stupanj vrha je broj sjecišta male kružnice oko vrha s linijama koje izlaze iz vrha.

Ako znamo o kojem je grafu riječ, pišemo $d(v)$ umjesto $d_G(v)$.

Definicija 1.10 Graf G je k -regularan ako je $d(v) = k$, za svaki $v \in V$.

Definicija 1.11 Regularan graf je onaj koji je k -regularan za neki k .

Potpun graf K_n i potpun bipartitan graf $K_{n,n}$ su regularni. Očito da izomorfni grafovi imaju u odgovarajućim vrhovima jednake stupnjeve.

Definicija 1.12 Šetnja u grafu G je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ čiji su članovi naizmjenice vrhovi v_i i bridovi e_i , tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i , $1 \leq i \leq k$.

Kod jednostavnog grafa šetnja je potpuno određena samo nizom svojih vrhova $v_0v_1 \cdots v_k$, gdje je v_0 početak, a v_k kraj šetnje W .

Vrhovi v_1, v_2, \dots, v_{k-1} su unutarnji vrhovi šetnje, pri čemu se k naziva duljina šetnje W .

Definicija 1.13 Ako su svi bridovi e_1, \dots, e_k u šetnji $W = v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ međusobno različiti, onda se W zove **staza**.

Definicija 1.14 Ako su na stazi W svi vrhovi v_1, \dots, v_k međusobno različiti, onda se šetnja naziva **put**.

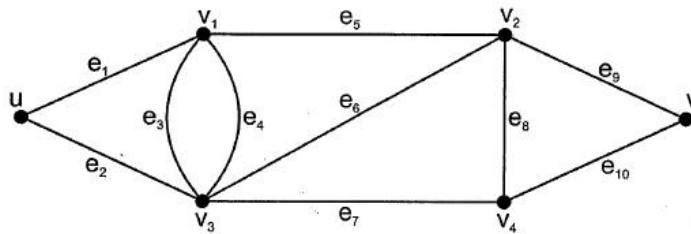
Definicija 1.15 Dva vrha u, v grafa G su povezana ako postoji (u, v) -put u G .

Definicija 1.16 Zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi (osim krajeva) međusobno različiti naziva se **ciklus**.

Ciklus C_k , duljine k , naziva se k -ciklus.

Ukoliko je k paran onda je i k -ciklus paran, odnosno neparan ukoliko je k neparan.

Definicija 1.17 Duljina najkraćeg ciklusa u grafu zove se **struk**, a struk je nula ako ciklusa nema.



Slika 1.4: Graf s prikazanom šetnjom, stazom i putem

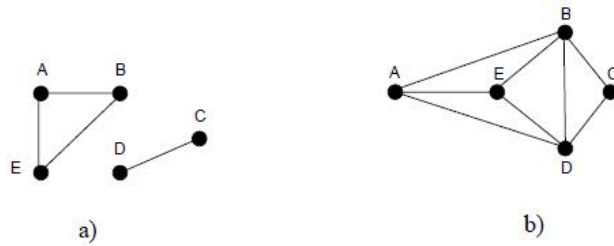
Šetnja (u, v) : $ue_1v_1e_3v_3e_7v_4e_7v_3e_6v_2e_9v$,

Staza (u, v) : $ue_2v_3e_3v_1e_4v_3e_7v_4e_{10}v$,

Put (u, v) : $ue_2v_3e_4v_1e_5v_2e_9v$,

Struk : 2.

Kažemo da je graf povezan ako se svaka dva njegova vrha mogu povezati nekim putem. Ukoliko postoje vrhovi koji se ne mogu povezati, graf je nepovezan te se sastoji od dva ili više odvojenih dijelova koji se nazivaju komponente povezanosti grafa.



Slika 1.5: Nepovezan (*a*) i povezan graf (*b*)

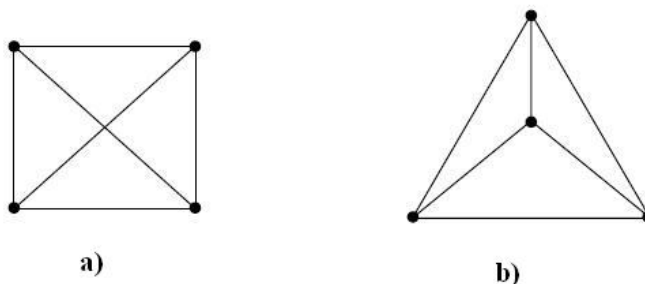
2. Planarnost i neplanarnost

Definicija 2.1 *Graf je planaran ili smjestiv u ravnini ako se može nacrtati, tj. realizirati u ravnini, tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima.*

Takva realizacija zove se ravninsko smještenje grafa. Također, graf koji je tako smješten naziva se i ravninski.

Postoji funkcija f koja svakom vrhu v od G pridružuje točku u ravnini \mathbb{R}^2 tako da se $f(e_1)$ i $f(e_2)$ sijeku u točki T ako i samo ako je $T = f(v)$, za neki vrh koji je kraj bridova e_1 i e_2 u G . Graf koji nije planaran zove se neplanaran.

Na Slici 2.1a je graf K_4 , tj. tetraedar, koji izgleda kao neplanaran, ali ga možemo nacrtati kao ravninskog (Slika 2.1b).



Slika 2.1: Primjeri planarnih grafova

Ravninski prikaz grafa G dijeli komplement od G u ravnini na neka područja. Zatvorenje tih područja zovu se strane.

2.1. Algebarski dokazi neplanarnosti

Nemoguće je nacrtati potpuni graf K_5 ili potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ bez presjecanja bridova, tj. grafovi K_5 i $K_{3,3}$ su neplanarni.

Ukoliko to želimo algebarski dokazati trebaju nam neke formule izvedene iz Eulerove formule

$$|V_G| - |E_G| + |F_i| = 2, \quad (2.1)$$

gdje je $|F_i|$ broj strana od G .

Teorem 2.1 (Euler, 1750.) *Neka je G ravninski prikaz povezanog planarnog grafa, te neka su s $|V_G|$, $|E_G|$ i $|F_i|$ redom označeni brojevi vrhova, bridova i strana od G . Tada je*

$$|V_G| - |E_G| + |F_i| = 2.$$

Dokaz. Provest ćemo dokaz matematičkom indukcijom po broju bridova $|E_G|$. Baza indukcije je jasna, jer ako je $|E_G| = 0$, onda je nužno $|V_G| = 1$, te $|F_i| = 1$ (imamo samo izolirani vrh i beskonačnu stranu), pa jednadžba iz teorema vrijedi. Pretpostavimo da teorem vrijedi za sve grafove s $|E_G| - 1$ bridova, te neka je G graf s $|E_G|$ bridova. Ako je G stablo, onda je $|E_G| = |V_G| - 1$ i $|F_i| = 1$, dakle je $|V_G| - |E_G| + |F_i| = 2$. Ako pak G nije stablo, onda u njemu postoji ciklus, pa neka je e brid iz nekog ciklusa od G . Pogledajmo graf $G - e$. To je povezan planarni graf s $|V'_G| = |V_G|$ vrhova, $|E'_G| = |E_G| - 1$ bridova, te $|F'_i| = |F_i| - 1$ strana. Kako $G - e$ zadovoljava pretpostavku indukcije, to za njegove parametre vrijedi $|V'_G| - |E'_G| + |F'_i| = 2$, iz čega slijedi da je $|V_G| - (|E_G| - 1) + (|F_i| - 1) = 2$, tj. da je $|V_G| - |E_G| + |F_i| = 2$, što je i trebalo dokazati. ■

Teorem 2.2 *Neka je G povezan graf koji nije stablo i neka je $\iota : G \rightarrow S$ neko smještanje tog grafa. Tada vrijedi brid - strana nejednakost*

$$\text{struk}(G) \cdot |F_i| \leq 2|E_G|. \quad (2.2)$$

Teorem 2.3 *Neka je G bilo koji povezan jednostavan graf sa smještanjem $\iota : G \rightarrow S_0$ u sferu ili ravninu. Za $v \geq 3$, vrijedi*

$$|E_G| \leq 3|V_G| - 6.$$

Dokaz. Znamo da vrijedi (2.1) i (2.2). Budući da je G jednostavan, vrijedi $3 \leq \text{struk}(G)$. Primjenimo li to na (2.2), dobivamo

$$|F_i| \leq \frac{2|E_G|}{3}. \quad (2.3)$$

Uvrstimo li (2.3) u (2.1) dobivamo

$$|V_G| - |E_G| + \frac{2|E_G|}{3} \geq 2 \quad (2.4)$$

odnosno sređivanjem

$$|E_G| \leq 3|V_G| - 6. \quad (2.5)$$

■

Korolar 2.1 *Neka je G bilo koji povezan jednostavan graf takav da vrijedi*

$$|E_G| > 3|V_G| - 6. \quad (2.6)$$

Tada graf G ne dopušta smještanje u sferu ili ravninu, tj. G je neplanaran.

Dokaz. To je kontrapozicija s Teoremom 2.3. ■

Teorem 2.4 *Potpuni graf K_5 je neplanaran.*

Dokaz. Kako je $3|V| - 6 = 9$ i $|E| = 10$, nejednakost $|E| > 3|V| - 6$ je zadovoljena pa je po Korolaru 2.1 graf K_5 neplanaran. ■

Nejednakost (2.6) izvedena algebarskim načinom može se koristiti za dokaz neplanarnosti beskonačno mnogo različitih grafova. Primjenit ćemo je još jednom.

Propozicija 2.1 *Neka je G bilo koji jednostavan graf takav da je $|V_G| = 8$ i $|E_G| \geq 19$. Tada graf G ne dopušta smještanje u sferu ili ravninu.*

Dokaz. Račun $3|V_G| - 6 = 18$ i pretpostavka $|E_G| \geq 19$ povlače da je $|E_G| > 3|V_G| - 6$. Po Korolaru 2.1 slijedi da je graf G neplanaran. ■

2.2. Neplanarnost bipartitnih grafova

Teorem 2.5 *Neka je G bilo koji povezan bipartitan jednostavan graf sa smještanjem $\iota : G \rightarrow S_0$ u sferu ili ravninu. Tada vrijedi*

$$|E_G| \leq 2|V_G| - 4.$$

Dokaz. Ovaj dokaz izvodimo na isti način kao i Teorem 2.3. Znamo da vrijede (2.1) i (2.2). Budući da je G jednostavan bipartitni graf, vrijedi $4 \leq \text{struk}(G)$. Primjenimo li to na (2.2) i sredimo, dobivamo

$$|F_i| \leq \frac{2|E_G|}{4}. \quad (2.7)$$

Uvrstimo li (2.7) u (2.1) dobivamo

$$|V_G| - |E_G| + \frac{2|E_G|}{4} \geq 2 \quad (2.8)$$

odnosno, sređivanjem

$$|E_G| \leq 2|V_G| - 4. \quad (2.9)$$

■

Korolar 2.2 *Neka je G bilo koji povezan bipartitan jednostavan graf takav da vrijedi*

$$|E_G| > 2|V_G| - 4. \quad (2.10)$$

Tada graf G ne dopušta smještanje u sferu ili ravninu, odnosno G je neplanaran.

Dokaz. Ovo je kontrapozicija s Teoremom 2.5. ■

Teorem 2.6 *Potpuni bipartitan graf $K_{3,3}$ je neplanaran.*

Dokaz. Kako je $2|V| - 4 = 8$ i $|E| = 9$, nejednakost $|E| > 2|V| - 4$ je zadovoljena pa je po Korolaru 2.2 graf $K_{3,3}$ neplanaran. ■

Primjedba 2.1 *Ako znamo da je $K_{3,3}$ jednostavan graf i zanemarimo činjenicu da je i bipartitan, onda dobivamo slabiju nejednakost, tj. iz $|E_G| = 9$ i $3|V_G| - 6 = 12$ slijedi da je $|E_G| \leq 3|V_G| - 6$.*

2.3. Neplanarni podgrafovi

Definicija 2.2 Neka je $G = (V, E)$, a $V' \subseteq V$. Podgraf od G čiji je skup vrhova $V \setminus V'$, a skup bridova se sastoji od bridova iz G čija su oba kraja u $V \setminus V'$ označavamo s $G - V'$. To je podgraf od G dobiven tako da "iščupamo" V' zajedno sa svim bridovima kojima je jedan kraj u V' . Ako je $V' = v$, pišemo $G - v$. Isto tako za $E' \subseteq E$, podgraf od G čiji je skup vrhova V , a skup bridova $E \setminus E'$, označavamo s $G - E$, a ako je $E = e$ s $G - e$. U oba slučaja kažemo da smo uklonili V' , tj. E' .

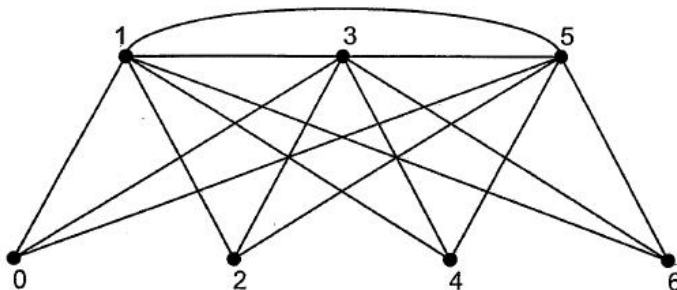
Definicija 2.3 Neka je $\emptyset \neq E' \subseteq E$. Graf dobiven iz G dodavanjem skupa bridova E' , zapisujemo kao $G + E'$. Ako je $E = e$ pišemo $G + e$.

Neplanarnost grafa možemo dokazati i traženjem neplanarnog podgraфа.

Teorem 2.7 Ako graf sadrži neplanarni podgraf, onda je taj graf neplanaran.

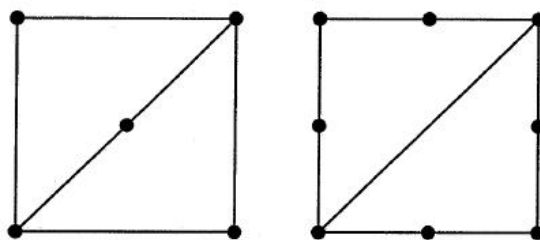
Dokaz. Ako grafu odstranimo neki skup bridova i vrhova, njegov planarni prikaz neće imati bridove koji se sijeku, tj. biti će planaran. Ovo također dokazuje kontrapoziciju da je svaki podgraf planarnog graфа planaran. ■

Primjer 2.1 Odstranimo li šest bridova spojenih s bilo koja četiri označena vrha u K_7 , dobivamo graf $G = K_7 - E(K_4)$. Budući da je $|V_G| = 7$ i $|E_G| = 21 - 6 = 15$, slijedi $15 = |E_G| \leq 3|V_G| - 6 = 15$. Dakle, planarna formula ne isključuje planarnost graфа $K_7 - E(K_4)$. Na Slici 2.2 vidimo da graf $K_7 - E(K_4)$ sadrži graf Kuratowskog i zbog toga je neplanaran.



Slika 2.2: Graf $K_7 - E(K_4)$ sadrži graf $K_{3,3}$

Definicija 2.4 Kažemo da su dva grafa homeomorfna ako se jedan graf može dobiti iz drugoga umetanjem jednog ili više vrhova stupnja 2.



Slika 2.3: Homeomorfni grafovi

Propozicija 2.2 Planarnost je invarijanta homeomorfizma.

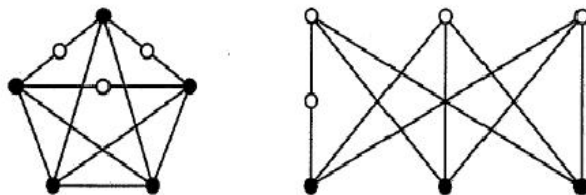
Dokaz. Pretpostavimo da je G planaran i da je H homeomorfan grafu G . Da bi transformirali G u H moramo u planarnom prikazu grafa G ili "izgladiti" vrh ili napraviti subdiviziju bridova. Ove operacije transformiraju planarni prikaz grafa G u planarni prikaz grafa H . ■

Propozicija 2.3 Pretpostavimo da graf G sadrži podgraf H koji je homeomorfan neplanarnom grafu. Tada je G neplanaran.

Dokaz. Slijedi iz Teorema 2.6 i Propozicije 2.2. ■

Prilikom konstruiranja neplanarnog, nebipartitnog grafa s određenim brojem vrhova i bridova, počinjemo s grafom Kuratowskog, dodajemo vrhove i bridove te vršimo subdiviziju bridova.

Primjer 2.2 Konstruiramo neplanaran, nebipartitan graf takav da je $|V| = 8$ i $|E| \leq 13$ na način da pravimo subdiviziju grafa K_5 ili $K_{3,3}$



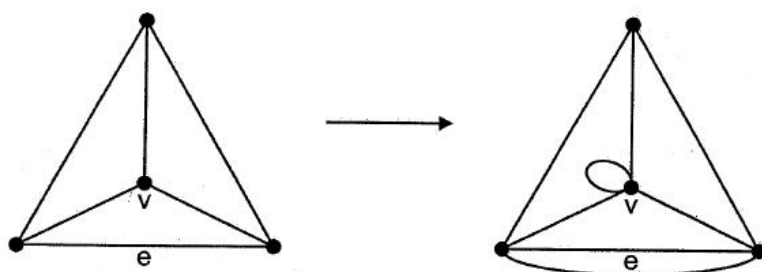
Slika 2.4: Konstrukcija neplanarnog, nebipartitnog grafa

3. Rastezanje planarnih prikaza

Ovo poglavlje dat će osnovne rezultate o planarnim rastezanjima podgrafa. Konstrukcija planarnog grafa izgleda ovako: nacrtamo podgraf u ravnini te ga rastegnemo dodavanjem preostalih dijelova grafa.

Propozicija 3.1 *Planaran graf G ostaje planaran ako mu dodamo višestruki brid ili petlju.*

Dokaz. Nacrtajmo graf u ravnini kao na Slici 3.1.



Slika 3.1: Dodavanjem višestrukog brida ili petlje grafu, čuva se planarnost

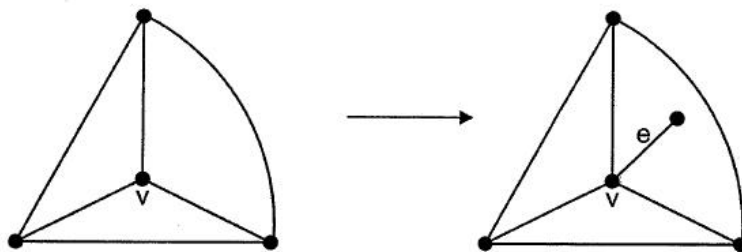
Na bilo kojem postojećem bridu e na prikazu možemo nacrtati drugi brid između krajeva brida e , tako da novi brid ne presjeca niti jedan drugi. Isto tako, na bilo kojem vrhu v moguće je nacrtati petlju s krajem u v , dovoljno malu da ne presjeca druge bridove.

■

Korolar 3.1 *Neplanaran graf ostaje neplanaran ako odstranimo petlju ili jedan brid višestrukog brida.*

Propozicija 3.2 *Planaran graf G ostaje planaran ako na bilo kojem bridu napravimo subdiviziju ili ako je novi brid e dodan na vrh $v \in V_G$ (drugi kraj od e je dodan kao novi vrh).*

Dokaz. Stavljanje nove točke u brid u ravnini planarnog prikaza grafa G , da bi napravili subdiviziju, ne dovodi do presjecanja bridova. Štoviše, lako je umetnuti brid e tako da mu v bude vrh. ■

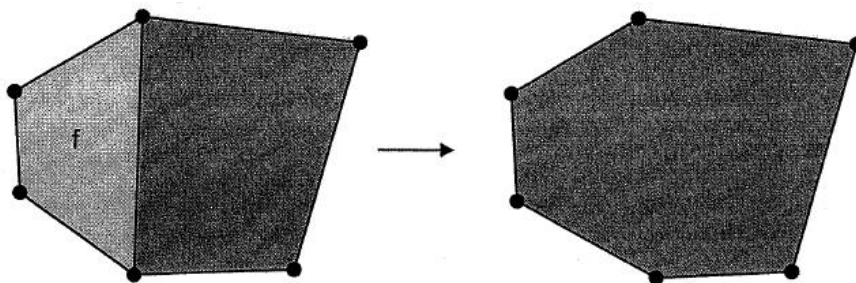


Slika 3.2: Subdivizija brida, dodavanje brida u vrhu v čuva planarnost

Propozicija koja slijedi primjenjuje se na smještanje u sve površine, a ne samo na smještanje u ravninu.

Propozicija 3.3 *Neka je $\iota : G \rightarrow S$ smještanje grafa. Neka je d brid grafa G s krajevima u i v . Tada smještanje grafa $G-d$ dobiveno odstranjivanjem brida d smještanja $\iota : G \rightarrow S$ ima stranu koja u svojim granicama sadrži vrhove u i v .*

Dokaz. Neka f bude strana čija granica sadrži brid d u smještanju $\iota : G \rightarrow S$. Kada odstranimo brid d , strana f se stapa sa stranom koja se nalazi desno od brida d , kao što vidimo na Slici 3.3. ■



Slika 3.3: Stapanje dvaju područja odstranjivanjem brida

Na strani S , granica stopljenih područja je unija granica područja koja sadrže brid d minus interior brida d . Ovo vrijedi čak i kada strana f leži s obje strane brida d . Vrhovi u i v leže na granici stopljenih strana, što vidimo na Slici 3.3.

3.1. Stapanje planarnih grafova

Definicija 3.1 *Stapanje dvaju grafova je ljepljenje podgrafa u jednom grafu na izomorfan podgraf u drugom grafu.*

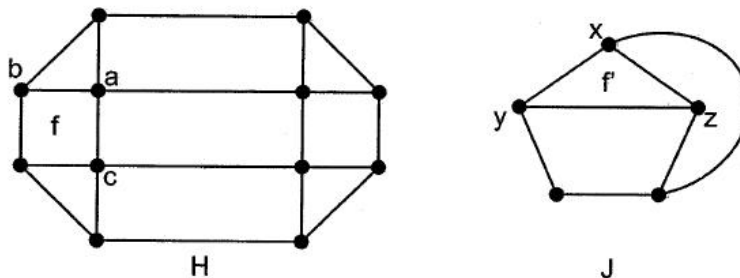
Lema 3.1 *Neka je f strana u ravninskom prikazu povezanog grafa G . Tada postoji neki drugi ravninski prikaz grafa G u kojem ciklus što je obilazio tu stranu f sada omeđuje (zatvara) dio ravnine u kojem će biti cijeli graf G .*

Propozicija 3.4 *Neka su H i J dva grafa s planarnim prikazima. Neka je f strana u prikazu od H , neka je u_1, \dots, u_n podniz vrhova u rubnom ciklusu strane f . Neka je f' strana u prikazu od J , a w_1, \dots, w_n podniz vrhova u rubnom ciklusu strane f' . Tada je stopljeni graf*

$$(H \cup J) \mid \{u_1 = w_1, \dots, u_n = w_n\}$$

planaran.

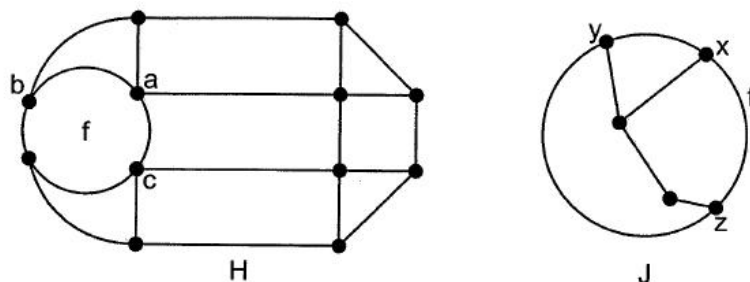
Dokaz. Na Slici 3.4. nalaze se planarni prikazi grafova H i J za $n = 3$.



Slika 3.4: Prikazi planarnih grafova

Ponovno nacrtamo smještanje grafa H u ravninu tako da jedinični disk leži potpuno unutar strane f . Također, ponovno nacrtamo i graf J tako da rubni ciklus strane f' okružuje ostatak grafa J , a to je moguće po Lemi 3.1.

Slika 3.5 pokazuje ponovna crtanja smještanja planarnih grafova H i J .

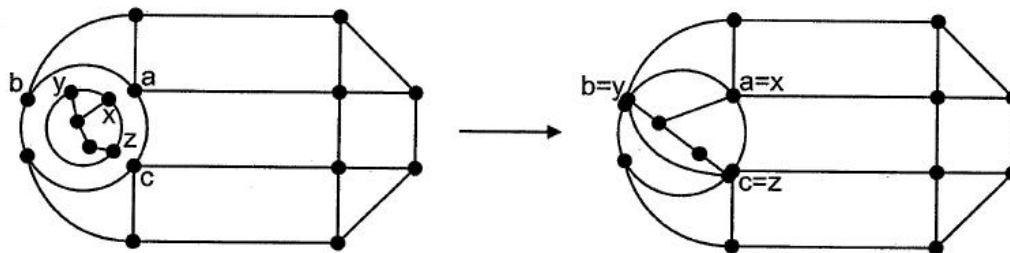


Slika 3.5: Ponovna crtanja smještanja planarnih grafova

Pretpostavimo da je ciklički uređaj vršnog niza $\{u_1, \dots, u_n\}$ i $\{w_1, \dots, w_n\}$ međusobno konzistentan jer crtanje grafa J možemo zrcaliti da bi dobili cikličku konzistentnost. Smanjimo prikaz grafa J tako da stane unutar jediničnog diska u strani f kao što je prikazano lijevo na Slici 3.6. Zatim rastegnemo malu kopiju od J prema van kao što je pokazano desno na Slici 3.6. Time dobivamo prikaz stapanja

$$(H \cup J) \mid \{a = x, b = y, c = z\}$$

bez presijecanja bridova. ■



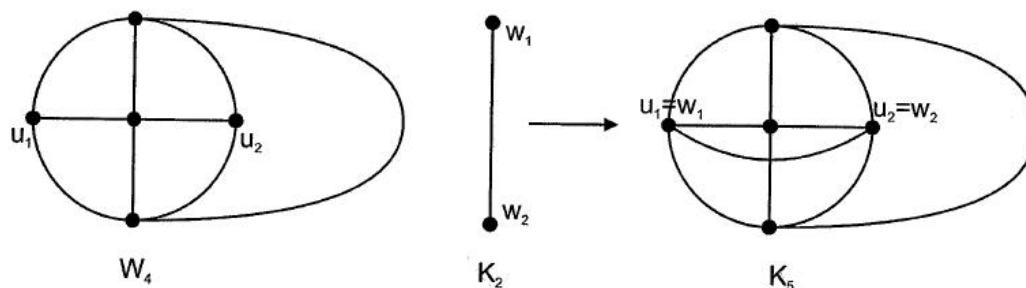
Slika 3.6: Položaj dvaju grafova i stapanje rastezanjem

Korolar 3.2 *Neka su H i J planarni grafovi. Neka je U skup od jednog, dva ili tri vrha u granici strane f prikaza grafa H i neka je W skup istog broja vrhova u granici strane f' prikaza grafa J . Tada je stopljeni graf $(H \cup J) \mid \{U = W\}$ planaran.*

Dokaz. Uvijek kada postoje najviše tri vrha u vršnom podnizu koji se mogu stopiti, tada su moguća samo dva ciklička uređaja. Kako je moguće zrcaliti oba prikaza, vrhovi u skupovima U i W u granicama strana f i f' mogu se poredati tako da odgovaraju nekoj bijekciji. ■

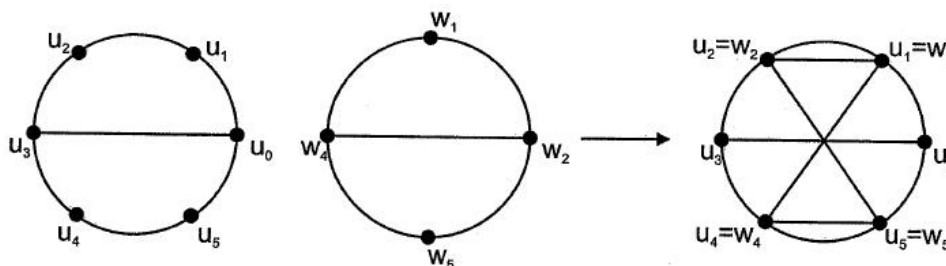
Primjedba 3.1 *Stapanje dvaju planarnih grafova pomoću dva svojevóljno odabrana vrha može dovesti do neplanarnog grafa. Zato vrhovi stapanja moraju biti odabrani sa granica pojedinih strana grafova.*

Primjer 3.1 *Stapanjem planarnih grafova W_4 i K_2 možemo dobiti neplanaran graf K_5 , kao što vidimo na Slici 3.7. To nije kontradikcija Korolaru 3.2 jer dva vrha stapanja u W_4 ne leže na istom dijelu strane bilo kojeg planarnog prikaza od W_4 .*



Slika 3.7: Stapanje planarnih grafova W_4 i K_2 u graf K_5

Primjedba 3.2 *Stapanje dvaju planarnih grafova pomoću skupa od četiri ili više vrhova na nekoj strani može dovesti do neplanarnog grafa, kao što je pokazano na Slici 3.8. Dobiveni graf je $K_{3,3}$ s dva dupla brida.*



Slika 3.8: Stapanje dvaju planarnih grafova u graf $K_{3,3}$

3.2. Dodatci o podgrafu

Definicija 3.2 Neka je H podgraf povezanog grafa G . Dva brida e_1 i e_2 od $E_G - E_H$ su neodijeljena podgrafom H ako postoji šetnja u G koja sadrži bridove e_1 i e_2 , ali nijedan unutarnji vrh šetnje nije u H .

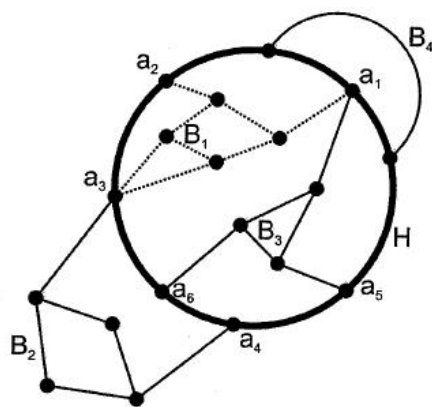
Primjedba 3.3 Relacija neodijeljen podgrafom H je relacija ekvivalencije na $E_G - E_H$, odnosno ona je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Definicija 3.3 Neka je H podgraf grafa G . Tada je dodatak podgrafu H izvedeni podgraf iz klase ekvivalencije bridova $E_G - E_H$ za koju vrijedi relacija neodijeljen podgrafom H .

Definicija 3.4 Neka je H podgraf grafa G . Dodatak podgrafu H zovemo tetiva ako ima jedan brid i to takav da spaja dva vrha iz H , ali ne leži u H .

Definicija 3.5 Neka je H podgraf grafa G . Neka je B dodatak podgraфа H . Tada vrh iz $B \cap H$ zovemo kontaktna točka podgraфа H .

Primjer 3.2 Na Slici 3.9 podgraf H je podebljani ciklus. Dodatak B_1 je podgraf (iscrtkani bridovi) s kontaktnim točkama a_1, a_2 i a_3 . Dodatak B_2 je podgraf s kontaktnim točkama a_3 i a_4 . Dodatak B_3 je podgraf s kontaktnim točkama a_1, a_5 i a_6 . Dodatak B_4 je tetiva. Uočimo da je unutar svakog od tri netetivna dodatka moguće doći od bilo kojeg vrha do bilo kojeg drugog brida šetnjom u kojoj ni jedna unutarnja točka nije kontaktna točka.



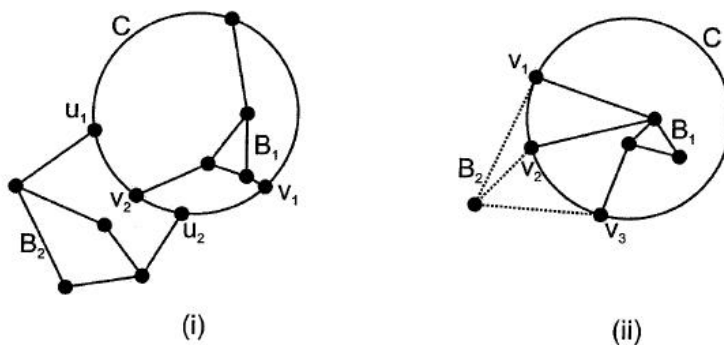
Slika 3.9: Podgraf H s dodacima B_1, B_2, B_3 i B_4

3.3. Preklapanje dodataka

Prilikom konstrukcije planarnog prikaza povezanog grafa moramo odabrati ciklus koji će biti podgraf, čiji dodatci tvore ostatak grafa G . Vezu između dva dodatka dobivamo preko njihovih kontaktnih točaka.

Definicija 3.6 *Neka je C ciklus u grafu G . Dodatci B_1 i B_2 preklapaju se ako vrijedi bar jedan od ovih uvjeta:*

- (i) *Dvije kontaktne točke od B_1 alterniraju (izmjenjuju se) s dvije kontaktne točke B_2 na ciklusu C .*
- (ii) *B_1 i B_2 imaju tri zajedničke kontaktne točke.*



Slika 3.10: Oba slučaja preklapanja dodataka

Definicija 3.7 *Neka je C ciklus povezanog grafa G nacrtan u ravnini. Za dodatak kažemo da je unutarnji ako je nacrtan unutar C , a vanjski ako je nacrtan izvan C .*

U obje Slike 3.10 dodatak B_1 je unutarnji, a B_2 je vanjski.

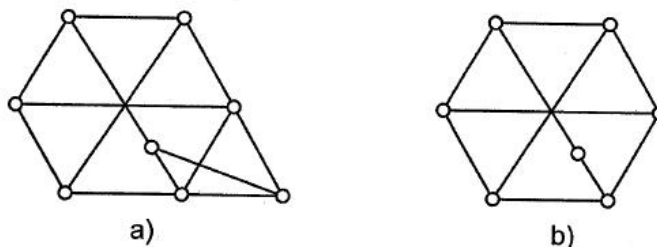
4. Teorem Kuratowskog

Iz Kuratowske karakterizacije planarnosti možemo dokazati je li neki graf planaran ili nije. Opisat ćemo jednu karakterizaciju planarnih grafova. Prvo uočimo da planarnost grafa ne ovisi o tome je li neki brid subdividiran (tj. više puta umetnut vrh stupnja 2) ili je izvršen obratan postupak uklanjanja takvih vrhova. Dva su grafa homeomorfna (ili kombinatorno ekvivalentna), u oznaci \cong , ako se jedan iz drugog mogu dobiti takvim umetanjem ili uklanjanjem vrhova stupnja 2.

Karakterizacija izgleda ovako:

Teorem 4.1 *Graf G je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od K_5 , ni subdiviziju od $K_{3,3}$.*

To je ekvivalentno s time da je graf planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$. Graf H na Slici 4.1a nije planaran, jer sadrži graf na Slici 4.1b, koji je subdivizija od $K_{3,3}$.

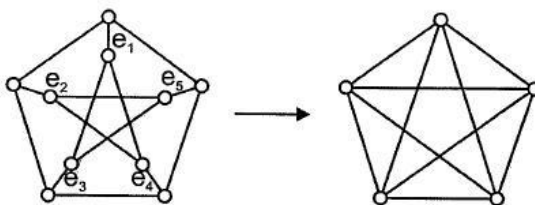


Slika 4.1:

Postoji ekvivalentna karakterizacija planarnosti.

Teorem 4.2 *Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf koji se može kontaktirati na K_5 ili $K_{3,3}$.*

Tako je npr. Petersenov graf P neplanaran jer se nakon kontrakcije bridova e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 (Slika 4.2), dobiva graf K_5 .



Slika 4.2:

Teorem 4.3 (Farý) *Jednostavan planaran graf može se realizirati u ravnini tako da su mu svi bridovi dužine.*

Dokaz Teorema 4.1 [Kuratowski]:

Neplanarnost grafova K_5 i $K_{3,3}$ pokazali su Teorem 2.4 i Teorem 2.6. Planarni graf ne može sadržavati podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$. To pokazuje Propozicija 2.3. Odatle slijedi da je postojanje nekuratovskog podgrafa u grafu nužno za planarnost.

Ostatak poglavlja posvećen je dokazivanju dovoljnosti. Ako odsutnost podgrafa Kuratowskog ne bi bila dovoljna, tada bi postojali neplanarni grafovi bez podgrafa Kuratowskog. Ukoliko bi postojali takvi kontraprimjeri, tada bi neki graf kontraprimjera imao najmanji broj bridova među svim kontraprimjerima. Ideja je izvesti neka svojstva koja bi imao taj minimalni kontraprimjer, što bi dokazalo da on ne može postojati. Glavni koraci u ovoj ideji dokazi su sljedećeg:

Korak 1 Minimalni kontraprimjer je jednostavan i 3-povezan.

Korak 2 Minimalni kontraprimjer sadrži ciklus s tri međusobna preklapanja dodataka.

Korak 3 Svaka konfiguracija koja se sastoji od ciklusa i tri međusobna preklapanja dodataka mora sadržavati podgraf Kuratowskog.

4.1. Korak 1. Minimalni kontraprimjer je jednostavan i 3 - povezan

Tvrdnja 4.1 *Neka je G neplanaran povezan graf bez podgraфа Kuratowskog i s minimalnim brojem bridova za bilo koji takav graf. Tada je G jednostavan graf.*

Dokaz. Pretpostavimo da G nije jednostavan. Po Korolaru 3.2 odstranjivanjem petlje ili jednog brida u višestrukom bridu dobivamo kontradikciju s minimalnošću od G jer dobivamo manji ne planarni graf koji još uvijek nema podgraf Kuratowskog. ■

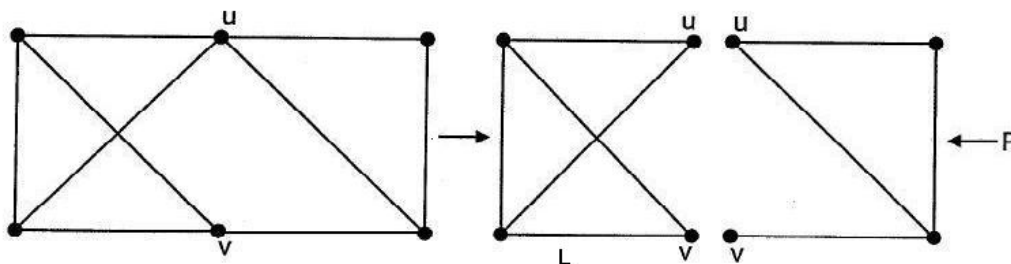
Definicija 4.1 *Vršni rez u G je podskup $S \subseteq V(G)$ tako da je $G - S$ nepovezan. Ako je $|S| = k$, kažemo da je to k -vršni rez. Rezni vrh je vršni rez koji sadrži samo jedan vrh.*

Tvrdnja 4.2 *Neka je G neplanaran povezan graf bez podgraфа Kuratowskog i s minimalnim brojem bridova za bilo koji takav graf. Tada graf G nema rezni vrh.*

Dokaz. Ako graf G ima rezni vrh v tada je svaki dodatak od v planaran na osnovu minimalnosti od G . Iterativnom primjenom Korolaru 3.2 sam graf G postaje planaran, što je kontradikcija s pretpostavkom. ■

Tvrdnja 4.3 *Neka je G neplanaran povezan graf bez podgraфа Kuratowskog i s minimalnim brojem bridova za bilo koji takav graf. Neka je $\{u, v\}$ vršni rez u G i neka je L netetivni dodatak od $\{u, v\}$. Tada postoji planarni prikaz od L sa stranom čije granice sadrže vrhove u i v .*

Dokaz. Kako je $\{u, v\}$ vršni rez grafa G , graf $G - \{u, v\}$ ima barem dvije komponente. Zbog toga skup vrhova $\{u, v\}$ mora imati bar još jedan netetivni dodatak uz L . Kako je $\{u, v\}$ minimalni vršni rez, po Tvrdnji 4.2 slijedi da vrhovi u i v moraju biti kontaktne točke drugog dodatka (koji nije L). Budući da je netetivni dodatak povezan i nema brid koji spaja u i v , on mora sadržavati $u - v$ put P duljine najmanje dva, kao što vidimo na Slici 4.3.

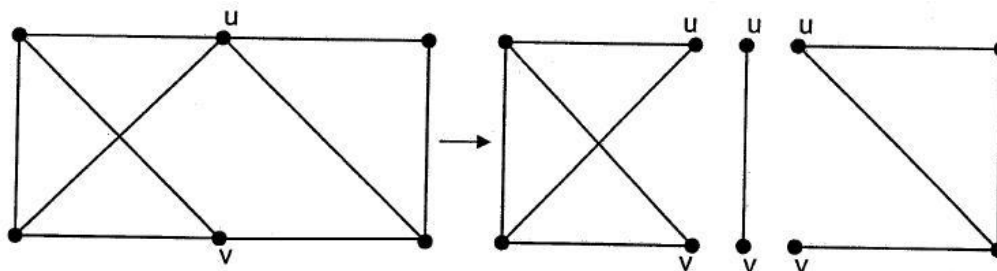


Slika 4.3: $u - v$ put P u dodatku različitom od L

Podgraf $L \cup P$ nema podgraf Kuratowskog jer je $L \cup P$ sadržan u G , a G po pretpostavci ne sadrži podgraf Kuratowskog. Neka je d brid dobiven iz puta P uklanjanjem svih unutarnjih vrhova. Tada graf $L + d$ ne sadrži podgraf Kuratowskog (jer je $L + d$ homeomorfan s $L \cup P$). Graf $L + d$ ima manje bridova od minimalnog kontraprimjera (jer P ima bar jedan unutarnji vrh). Iz toga slijedi da je graf $L + d$ planaran. U svakom planarnom prikazu grafa $L + d$ vrhovi u i v leže na granici svake strane koja sadrži brid d . Izbacivanje brida d iz bilo kojeg planarnog prikaza od $L + d$ donosi planarni prikaz dodatka L tako da vrhovi u i v leže na istoj strani (po Propoziciji 3.3). ■

Tvrđnja 4.4 *Neka je G neplanaran povezan graf bez podgraфа Kuratowskog, a ima minimalni broj bridova za bilo koji takav graf. Tada graf G nema vršni rez s točno dva vrha.*

Dokaz. Pretpostavimo da graf G ima minimalni vršni rez $\{u, v\}$. Očito tetiva od $\{u, v\}$ ima planarni prikaz sa stranom čija granica sadrži vrhove u i v . Po Tvrđnji 4.3 svaki netetivni dodatak od $\{u, v\}$ ima također planarni prikaz s vrhovima u i v na istoj granici strane. Slika 4.4 pokazuje moguće rastavljanje grafa G u dodatke. Kada se graf ponovno skupi iterativnim skupljanjem tih planarnih dodataka u vrhovima u i v , po Propoziciji 3.4, rezultat je planarni graf.



Slika 4.4: Rastavljanje grafa u vrhovima u i v

Zaključak koraka 1. Neka je G neplanaran povezan graf koji nema podgraf Kuratowskog, a ima minimalni broj bridova za bilo koji takav graf. Tada je graf G jednostavan i 3-povezan.

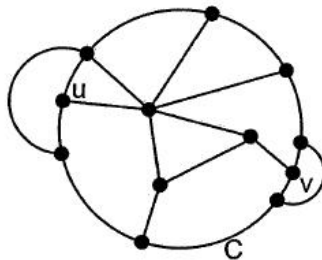
Dokaz. Ovo sažima četiri prethodne tvrdnje. Pretpostavka da je graf G povezan služi samo da bi izbjegli izolirane vrhove. ■

4.2. Korak 2. Traženje ciklusa s 3 dodatka koji se međusobno preklapaju

Propozicija 4.1 *Neka je e bilo koji brid k -povezanog grafa G , za $k \geq 3$. Tada je njegov podgraf $G - e$ $k - 1$ -povezan.*

Korolar 4.1 *Neka je G graf s najmanje tri vrha. Tada je G 2-povezan ako i samo ako dva vrha leže na zajedničkom ciklusu.*

Neka je G neplanaran povezan graf koji nema podgraf Kuratowskog, a ima minimalni broj bridova za bilo koji takav graf. Neka je e bilo koji brid grafa G , neka su mu krajnje točke u i v . Promatrajmo ravninu crteža $G - e$. Budući da je po Koraku 1 graf G 3-povezan na osnovu Propozicije 4.1 je $G - e$ 2-povezan. Po Korolaru 4.1 postoji ciklus u $G - e$ kroz vrhove u i v . Između svih takvih ciklusa odaberemo ciklus C kao na Slici 4.5 tako da je broj bridova unutar C što veći.



Slika 4.5: Što veći broj bridova unutar ciklusa C

Iduće tvrdnje dokazuju da ciklus C mora imati dva dodatka koji se preklapaju u $G - e$ i oba preklapaju brid e .

Tvrdnja 4.5 *Ciklus C ima najmanje jedan vanjski dodatak.*

Dokaz. Brid e može se nacrtati u vanjskom dijelu, čime se može dovršiti planarni prikaz od G . ■

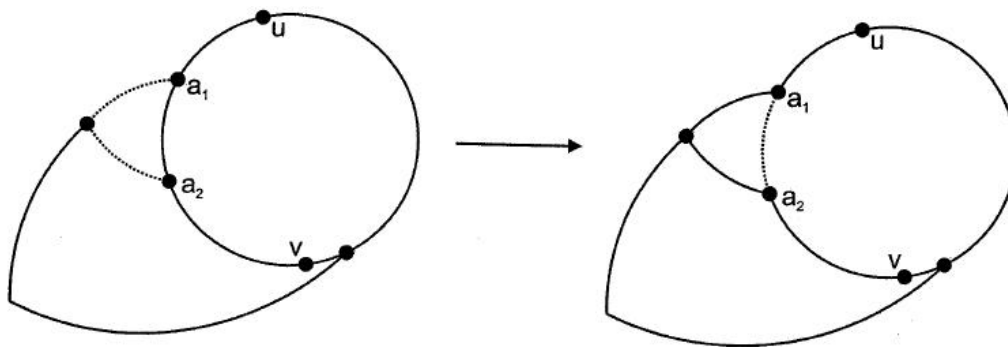
Tvrdnja 4.6 *Neka je B dodatak od C koji ima samo dvije kontaktne točke, ni jedna od njih nije u ili v . Tada je dodatak B tetiva.*

Dokaz. Ako je B netetivni dodatak, tada te dvije kontaktne točke dodatka B dijele vrhove u i v u grafu G od drugih vrhova od B . To je kontradikcija s 3-povezanošću od G . ■

Tvrđnja 4.7 *Neka je d vanjski dodatak ciklusa C . Tada je d tetiva, a njezini krajevi alterniraju s u i v na C tako da su bridovi e i d tetive ciklusa C koji se preklapaju.*

Dokaz. Pretpostavimo da dvije kontaktne točke a_1 i a_2 dodatka d ne alterniraju s vrhovima u i v ciklusa C . Tada dodatak d ima put P između vrhova a_1 i a_2 bez kontaktnih točaka u interioru (unutrašnjem dijelu) puta P . Ako je tako, ciklus C možemo povećati zamjenom luka između a_1 i a_2 putem P . Povećani ciklus još uvijek će prolaziti kroz vrhove u i v i imat će više bridova unutar sebe nego ciklus C .

To vidimo na Slici 4.6 što znači da dolazimo i do kontradikcije s izborom ciklusa C . Ako vanjski dodatak d ima tri ili više kontaktnih točaka, tada bar jedan par tih točaka neće alternirati s u i v . Slijedi da dodatak d ima samo dvije kontaktne točke i one alterniraju s u i v . Po Tvrđnji 4.6 takav dodatak je tetiva. ■



Slika 4.6: Koristimo vanjski dodatak za proširenje ciklusa

Tvrđnja 4.8 *Postoji unutarnji dodatak ciklusa C koji se preklapa s bridom e i s nekom vanjskom tetivom.*

Dokaz. Jedan ili više unutarnjih dodataka moraju se preklapati s tetivom e jer inače brid e može biti nacrtan unutar ciklusa C bez da siječe bilo koji unutarnji dodatak. Time se može dovršiti planarni prikaz od G . Štoviše, bar jedan unutarnji dodatak koji se preklapa s e , preklapa se također i s nekim vanjskim dodatkom d . Inače bi se svaki takav unutarnji dodatak mogao ponovno nacrtati izvan ciklusa C . To bi dopustilo bridu e da bude nacrtan unutar ciklusa C bez da siječe bilo koji unutarnji dodatak. Time se može dovršiti prikaz od G . Prema Tvrđnji 4.7 vanjski dodatak d je sigurno tetiva. ■

Zaključak koraka 2. Neka je G neplanaran graf koji nema podgraf Kuratowskog, a ima minimalan broj bridova za bilo koji takav graf. Tada graf G sadrži ciklus koji ima tri dodatka koji se međusobno preklapaju, a od toga su dva tetive.

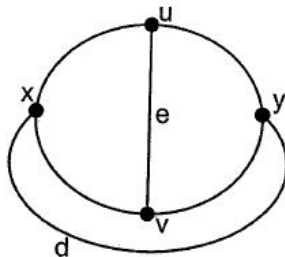
Dokaz. Na početku ovog koraka odabrali smo ciklus C . Za njega vrijedi: jedan od dodataka ciklusa C je tetiva e izabrana na početku ovog koraka; Tvrdnja 4.8 osigurava postojanje drugog dodatka B koji ne preklapa samo tetivu e , već prekapa i neku vanjsku tetivu d ; prema Tvrdnji 4.7 tetiva d također preklapa tetivu e . Iz toga slijedi da se dodatci e , B i d međusobno preklapaju. ■

4.3. Korak 3. Analiza konfiguracije ciklusa i dodataka

Posljednji je korak u dokazu Teorema 4.1 pokazati da konfiguracija ciklusa i dodataka mora sadržavati podgraf Kuratowskog. Njegino postojanje osigurano je prošlim korakom.

Korak 3. Neka je C ciklus u povezanom grafu G . Neka je brid e unutarnja tetiva, brid d vanjska, a B unutarnji dodatak i neka se e , B i d međusobno preklapaju. Tada graf G ima podgraf Kuratowskog.

Dokaz. Neka su u i v kontaktne točke unutarnje tetive e , a neka su x i y kontaktne točke vanjske tetive d . Ovi parovi kontaktnih točaka alterniraju na ciklus C , to vidimo na Slici 4.7.



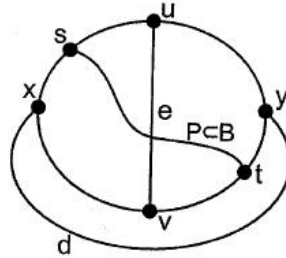
Slika 4.7: Pravljenje grafa K_4 pomoću ciklusa C i tetive e i d

Uočimo da unija ciklusa C , tetive e i tetive d tvori potpuni graf K_4 . Ovisno o položaju kontaktnih točaka dodatka B , postoje dva slučaja koje trebamo uočiti.

Slučaj 1. Pretpostavimo da dodatak B ima bar jednu kontaktnu točku, nazivamo je s . Ona se razlikuje od u , v , x i y . Simetrija $C - e - d$ konfiguracije osigurava položaj kontaktne točke s između vrhova u i x na ciklusu C . Da bi preklopio brid e , dodatak B mora imati kontaktnu točku t koja se nalazi s one strane od u i v , s koje se ne nalazi vrh s . Da bi preklopio tetivu d , dodatak B mora imati kontaktnu točku t' koja se nalazi s one strane od x i y , s koje se nalazi vrh s .

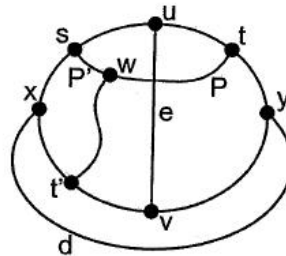
Podslučaj 1.1. Ako kontaktna točka t leži u unutrašnjosti luka između v i y na ciklusu C , možemo smatrati da je $t = t'$, kao na Slici 4.8. Neka je put P u dodatku

B između kontaktnih točaka s i t . Tada unija ciklusa C , puta P i tetiva d i e tvori homeomorfnu kopiju od $K_{3,3}$.



Slika 4.8: Podslučaj 1.1

Podslučaj 1.2. Kontaktna točka t leži na luku između uy , $t \neq u$ (tako da se dodatak B preklapa s tetivom e), a kontaktna točka t' leži na luku između xv , $t' \neq v$ (tako da se dodatak B preklapa s tetivom d) kao na Slici 4.9.



Slika 4.9: Podslučaj 1.2

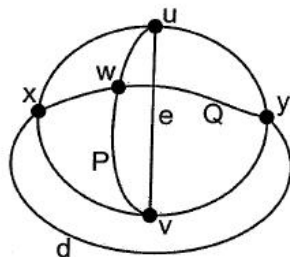
U ovom podslučaju neka je P put u dodatku B između kontaktnih točaka t i t' . Neka je w unutarnji vrh na putu P tako da postoji $w - s$ put P' u B bez unutarnjih vrhova u P . Takav put P' postoji jer je dodatak B povezan. Tada ova konfiguracija ima homeomorfizam od $K_{3,3}$ u kojem je svaki od vrhova w , x i u pridružen svakom od vrhova s , t i t' .

Slučaj 2. Dodatak B nema kontaktnih točaka različitih od u , v , x , y .

Vrhovi x i y moraju biti kontaktne točke od B tako da se B preklapa s tetivom d . Odatle slijedi da sva četiri vrha u , v , x , y moraju biti kontaktne točke dodatka B . Dodatak B ima $u - v$ put P i $x - y$ put Q čiji unutarnji vrhovi nisu kontaktne točke od B .

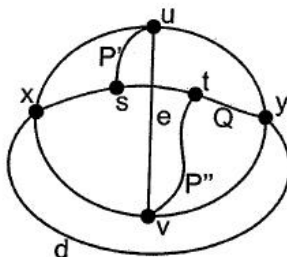
Podslučaj 2.1. Putevi P i Q sijeku se u vrhu w , kao što je prikazano na Slici 4.10. Unija $C - e - d$ konfiguracije sa putevima P i Q daje konfiguraciju homeomorfnu s K_5 u

kojoj su vrhovi u, v, x, y međusobno spojeni.



Slika 4.10: Podslučaj 2.1

Podslučaj 2.2. Putevi P i Q sijeku se u barem dva vrha. Neka je s sjecište na P najbliže kontaktnoj točki u , a neka je t sjecište na P najbliže kontaktnoj točki v , kao na Slici 4.11. Neka je P' us -podput od P , a P'' tv -podput od P . Tada je unija tetiva e i d sa putevima Q, P', P'' i lukovima vx i uy na ciklusu C podgrafa homeomorfna s $K_{3,3}$ uz biparticiju $(\{u, x, t\}, \{v, y, s\})$.



Slika 4.11: Podslučaj 2.2

Ovime je dokazan Teorem 4.1. ■

5. Planarni algoritam

Postoji nekoliko dobrih planarnih algoritama. Algoritam koji će biti opisan, izabran je zbog jednostavnosti i praktične primjene. Njegovi tvorcii su Demoucron, Malgrange i Pertuiset. Algoritam započinje crtanjem ciklusa i dodataka sve dok prikaz ne bude gotov ili dok daljnja dodavanja ne dovedu do presijecanja bridova na prikazu.

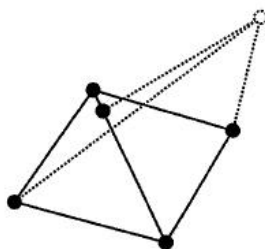
5.1. Blokirani i prisiljeni dodatci podgrafu

U glavnoj petlji planarnog algoritma pokušavamo rastegnuti podgraf nacrtan u ravnini tako da izaberemo vjerojatni dodatak tog podgrafa koji bi povećao prikaz.

Definicija 5.1 *Neka je H podgraf grafa G . Dodatak od H u ravninskom prikazu od H je necrtljiv u području R ako granica područja R ne sadrži sve kontaktne točke tog dodatka.*

Definicija 5.2 *Neka je H podgraf grafa G . Dodatak od H u ravninskom prikazu od H je blokiran ako je taj dodatak necrtljiv u svakom području.*

Primjer 5.1 *Na Slici 5.1 podgraf izomorfan s $K_{2,3}$ prikazan je crnim vrhovima i punim bridovima, a njegov jedini dodatak prikazan je iscrtkanim vrhom i iscrtkanim bridovima. Dodatak je blokiran jer ni jedno područje nema u svojim granicama sve tri kontaktne točke.*

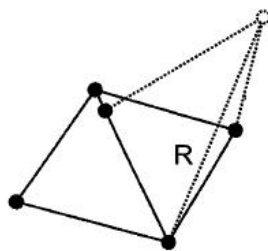


Slika 5.1: Podgraf s blokiranim dodatcima

Propozicija 5.1 *Neka je $\iota : H \rightarrow S_0$ ravninsko smještanje podgrafa H grafa G , tako da H ima blokirani dodatak B . Tada je nemoguće rastegnuti $\iota : H \rightarrow S_0$ na ravninsko smještanje G .*

Definicija 5.3 *Neka je H podgraf grafa G . U prikazu H na bilo kojoj strani dodatak od H je prisiljen u područje R , ako je R jedino područje čija granica sadrži sve kontaktne točke tog dodatka.*

Primjer 5.2 Na Slici 5.2 podgraf izomorfan s $K_{2,3}$ prikazan je crnim vrhovima i punim bridovima, a njegov dodatak prikazan je iscrtkanim vrhom i iscrtkanim bridovima. Dodatak je prisiljen u područje R jer je to jedino područje čije granice sadrže sve tri kontaktne točke.



Slika 5.2: Podgraf s prisiljenim dodacima

5.2. Uvodni algoritam

Definicija 5.4 *Povezan graf bez reznih vrhova naziva se blok. Blok s barem dva vrha je 2-povezan i obrnuto.*

Po Korolaru 3.2 graf je planaran ako i samo ako su svi njegovi blokovi planarni. Rastavljanjem u blokove oslobađamo glavni dio algoritma od nekih nepotrebnih detalja i obraćamo pažnju na slučaj u kojem je graf koji testiramo na planarnost 2-povezan. Baza tog slučaja pronalazak je ciklusa i njegovo crtanje u ravninu, a taj ciklus određen je kao baza podgrafa G_0 .

5.3. Odabir staze koja se iduća dodaje

Prije svake iteracije u glavnoj petlji postoji dvodjelni izlazni test. Jedan uvjet izlaza je da je cijeli graf već nacrtan u ravnini. U tom slučaju odlučuje se da je graf planaran.

Drugi uvjet izlaza je da je neki dodatak podgrafa G_j blokiran. Tada graf G proglašavamo neplanarnim i algoritam završava.

Ako nije zadovoljen ni jedan uvjet izlaza, postoje dva moguća slučaja za izbor dodatka.

U glavnoj petlji graf G_{j+1} dobiven je iz grafa G_j odabirom dodatka od G_j i dodavanjem puta koji spaja dvije kontaktne točke tog dodatka u ravninu prikaza od G_j . Najvažnije je odabrati prikladan dodatak u svaku iteraciju. U prvom slučaju određeno je da je neki dodatak prisiljen. Tada je put između njegove dvije kontaktne točke nacrtan u području čija granica sadrži sve kontaktne točke tog prisiljenog dodatka. Time rastežemo prikaz od G_j u prikaz G_{j+1} . Nakon rastezanja u prikaz od G_{j+1} , petlja se vraća u dvodjelni izlazni test. Moguće je nastaviti s idućim pokušajem rastezanja prikaza.

5.4. Algoritam

Ako bi tražili homeomorfnu kopiju od K_5 ili $K_{3,3}$ u grafu s n vrhova, bilo bi potrebno eksponencijalno mnogo koraka. Postoji i algoritam s linearnom složenošću. Planarni algoritam koji je ovdje izložen složenosti je $O(n^2)$.

Algoritam 5.1. Testiranje planarnosti za 2- povezan graf.

Input: 2-povezan graf G

Output: planarni prikaz od G ili odluka FALSE

{Initialize} Naći proizvoljan ciklus G_0 u G i nacrtati ga u ravnini

While $G_j \neq G$ {ovaj izlaz povlači planarnost grafa G }

If bilo koji dodatak blokiran, then return {FALSE}

If neki dodatak prisiljen, then $B =$ taj dodatak

else $B =$ bilo koji dodatak

$R =$ bilo koje područje koje sadrži sve kontaktne točke od B na granici od R

Odaberi bilo koji put između dvije kontaktne točke od B

Nacrtaj taj put u području R da bi dobili G_{j+1}

Nastavi s idućom iteracijom while-petlje

{Kraj while-petlje}

Return (planarni prikaz od G)

Ukoliko želimo dokazati točnost ovog algoritma, potrebno je dokazati da u slučaju kada ni jedan dodatak nije prisiljen, pojedini izbor dodatka i područja u kojem će se crtati ne utječe na rezultat. Odnosno, ako je graf planaran, svaki mogući izbor s neprisiljenim dodacima dovest će do planarnog prikaza.

6. LITERATURA

- [1] J. GROSS, J. YELLEN, *Graph Theory And Its Applications*, CRC Press, London, 1999.
- [2] D. VELJAN, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- [3] D. VELJAN, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
- [4] <http://www.fact-index.com/p/pl/planargraph.html>, 10.11.2011.
- [6] <http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/GraphTheory/MyGraphTheory/planarity.htm>, 28.07.2011.
- [7] <http://www.math.lsa.umich.edu/mmss/coursesONLINE/graph/graph5/>, 02.06.2011.

7. SAŽETAK

Ovaj diplomski rad sastoji se od pet dijelova. U prvom opisujemo osnovne pojmove iz teorije grafova. U drugom dijelu, neplanarnost grafova, dokazujemo algebarski ili traženjem neplanarnog podgrafa. U trećem dijelu dajemo osnovne rezultate o planarnim rastezanjima podgrafa, što nam pomaže da dokažemo teorem Kuratowskog. On daje karakterizaciju planarnosti. U četvrtom dijelu dokazujemo teorem Kuratowskog koji tvrdi: da je neplanaran povezan graf, koji nema podgraf Kuratowskog, a ima minimalan broj bridova, jednostavan i 3-povezan. Taj graf sadrži ciklus koji ima tri dodatka koja se međusobno preklapaju. U petom dijelu opisan je planarni algoritam koji započinje crtanjem ciklusa i dodataka sve dok prikaz ne bude završen ili dok dodatna dodavanja ne pokažu da se radi o neplanarnom grafu.

8. SUMMARY

This paper consists of five parts. First we give basic concepts about graphs. In the second part we prove nonplanarity of graphs by using algebra or searching for nonplanar subgraph. In the third part we give basic results considering extending planar drawing of a subgraph, which helps us to prove the Kuratowski's theorem. It gives characterization of planarity. In the fourth part we prove the Kuratowski's theorem by proving that nonplanar connected graph contains no Kuratowski subgraph and has the minimum number of edges, therefore it is simple and 3-connected. This graph contains cycle with three mutually overlapping appendages. In the fifth part the planarity algorithm is described. It starts by drawing a cycle, and additions until the drawing is completed or until further additions do not show that it is the nonplanar graph.

9. ŽIVOTOPIS

Rođena sam 28. svibnja 1985. godine u Gradačcu, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu "August Šenoa" upisala sam 1992. godine u Gundincima. Nakon završene osnovne škole upisala sam opću gimnaziju u srednjoj školi Matije Mesića u Slavonskom Brodu te maturirala 2004. godine. U Osijeku 2004. godine upisala sam Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku te nakon toga, 2007. upisala sam Diplomski studij matematike, smjer poslovna i financijska matematika.