

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Maja Libl

# Antička računala

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Maja Libl

# Antička računala

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2013.

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Presjek računala kroz kulture</b>	<b>2</b>
1. Japanski soroban . . . . .	3
2. Rimski ručni abakus . . . . .	3
3. Ploča sa Salamisa . . . . .	5
<b>2 Razvoj abakusa</b>	<b>9</b>
<b>3 Babilonska matematika</b>	<b>15</b>
1. Seksagezimalni brojevni sustav . . . . .	16
2. Računanje u seksagezimalnom brojevnom sustavu . . . . .	18
2.1 Množenje i dijeljenje . . . . .	18
2.2 Kvadratni korijen . . . . .	19
2.3 Kvadratne i kubne jednadžbe . . . . .	20
3. Pitagorin teorem . . . . .	22
3.1 Plimpton 322 . . . . .	22
3.2 Susa pločica . . . . .	23
3.3 Tell Dhibayi pločica . . . . .	24
<b>4 Kineski abakus</b>	<b>25</b>
1. Princip rada . . . . .	29
2. Izvođenje računskih operacija . . . . .	31
2.1 Zbrajanje . . . . .	31
2.2 Oduzimanje . . . . .	32
2.3 Množenje . . . . .	33
2.4 Dijeljenje . . . . .	35
3. "Leejev unaprijedeni abakus" . . . . .	36
4. Današnja upotreba . . . . .	37
<b>Literatura</b>	<b>38</b>

# Uvod

Pokušaji konstrukcije prvih naprava za računanje sežu u daleku prošlost ljudske civilizacije. Ljudi su si od davnina nastojali olakšati svakodnevne radnje, poput brojanja i prebrojavanja. Povjesničari su dugo vremena proučavali kako su antički narodi koristili abakuse za svoje izračune i napisali su niz radova o tome. Ovaj rad obrađuje razvoj najstarije naprave za računanje i brojevne sustave drevnih civilizacija.

U prvom poglavlju dajemo kratak pregled antičkih računala kroz kulture. Abakus je preuzeo različite oblike u različitim dijelovima antičkog svijeta.

U drugom poglavlju prikazujemo povijesni slijed razvoja abakusa. Na primjeru pro-matramo kako se broj kuglica potrebnih za prikaz broja smanjuje kod svakog dizajna.

U trećem poglavlju dajemo pregled babilonske matematike.

U četvrtom poglavlju riječ je o kineskom abakusu, koji je ujedno najrasprostranjeniji abakus. Opisujemo izvođenje računskih operacija i kao posebnu vrstu abakusa navodimo "Leejev unaprijeđeni abakus". Kineski abakus pronalazimo i u današnjoj upotrebi.

# Poglavlje 1

## Presjek računala kroz kulture

Pojavom prvih civilizacija javila se potreba za brojanjem i prebrojavanjem. U početku se brojalo na prste, a razvojem trgovine i rastom poslovanja izumljene su prve naprave za računanje. Najstarija takva naprava za računanje je abakus. Abakus sam po sebi nije računalo već skup kuglica i prečki, ali ako ga koristimo za izračune onda uz pomoć korisnika postaje brzo i točno računalo.

Prva vrsta abakusa je bila brojača ploča, zasnovana na ravnoj kamenoj ploči koja je bila posuta pijeskom ili prašinom gdje su se prstom ili perom upisivala slova i riječi. Brojevi su se dodavali uz pomoć kamenčića i tako su se izvodile računske operacije. Od tada su se razvile različite vrste abakusa koje su sadržavale kuglice.

Povjesničar Georges Ifrah<sup>1</sup> zaključuje: *"Računanje na abakusu s brojilima bio je... dugotrajan i težak postupak i korisnici abakusa su morali proći dugo i temeljito školovanje."* U ovom radu ćemo se uvjeriti da to nije istina i saznat ćemo kako su abakusi izgledali i kako su se koristili.

Profesor matematike Stephen Kent Stephenson u [5] navodi: *"Dokazi o stvarnim strukturama i metodama antičkih brojačkih ploča su sadržani u tri postojeća artefakta: japanski soroban, rimski ručni abakus i ploča sa Salamisa."* Brojača ploča se koristila u astronomskim, kalendarskim i geodetskim izračunima i izračunima vezanim za ljudsko djelovanje. Pjesmica<sup>2</sup> koja potvrđuje razmjer korištenja glasi: *"Kontrolira četiri godišnja doba i upravlja trima zakonima, nebesima, zemljom i ljudima."*

---

<sup>1</sup>Georges Ifrah, francuski povjesničar matematike i autor rada "The Universal History of Numbers".

<sup>2</sup>Ovu pjesmicu je zapisao Hsu Yo u knjizi "Mathematical Treatises by the Ancients".

## 1. Japanski soroban

Japanski soroban se sastojao od okvira s okomitim šipkama na kojima su se kuglice pomicale prema gore i prema dolje. Gornje i donje polje je dijelila prečka. Pred kraj 19. stoljeća soroban je imao jednu kuglicu iznad prečke i pet kuglica ispod prečke. Pojednostavljena verzija sorobana je napravljena oko 1920. godine kada se broj kuglica u donjem polju smanjuje sa pet na četiri. Slika 1.1. prikazuje obje verzije japanskog sorobana.



Slika 1.1. Japanski soroban

Svaka od kuglica u donjem polju ima vrijednost 1, dok kuglica u gornjem polju ima vrijednost 5. Svaka šipka na sorobanu predstavlja jedno decimalno mjesto.

Učinkovitost japanskog sorobana je najbolje dokazana na natjecanju u Tokiju 12. studenog 1946. kada je natjecatelj s abakusom pobijedio natjecatelja koji je koristio elektronski kalkulator.

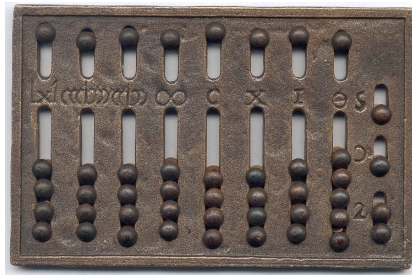
## 2. Rimski ručni abakus

Rimski ručni abakus je bio napravljen od metalne ploče s otvorima u kojima su se nalazile kuglice. Sastojao se od osam dužih i osam kraćih otvora. Veličina je bila takva da ga se moglo staviti u džep hlača. Uobičajena metoda računanja je bila pomicanje kuglica na glatkoj ploči.

Postoji lingvistički dokaz koji ukazuje na to da su Rimljani koristili kuglice na svojim abakusima: *"Rimski izraz za "računati" je "calculos ponere" - što doslovno znači postaviti kuglice. Kada su Rimljani željeli s nekim podmiriti račune, koristili su izraz "vocare aliquem ad calculos" - što znači "pozvati nekoga na kuglice"."*

Svako od 7 decimalnih mjesta ima 4 kuglice u donjem otvoru i jednu kuglicu u gornjem otvoru. Posljednja dva reda abakusa na desnoj strani koriste rimsko dijeljenje na bazi broja 12 i svaki broji do 12, ali na različite načine. Lijevi stupac broji do 5 u donjem otvoru i prelazi u gornji otvor kada dođe do broja 6 i ponavlja brojanje do 11 te kada dođe do broja 12 prelazi u red s decimalnim mjestima. Krajnje desni red lomi svako brojanje

do broja 6 u tri različita reda. Replika rimskog ručnog abakusa od bronce prikazana je na Slici 1.2.



Slika 1.2. Replika rimskog ručnog abakusa

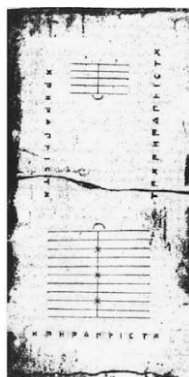
Postojanje rimskog ručnog abakusa japanski povjesničari potvrđuju pozivajući se na citat iz knjige "Mathematical Treatises by the Ancients" koju je napisao Hsu Yo pred kraj vladavine starije dinastije Han početkom trećeg stoljeća a kasnije ju je doradio Chen Luan. Ta knjiga je bila jedna od deset knjiga o matematici uključenih u udžbenike koje su morali pročitati vladini službenici u Kini i Japanu kroz dugi niz stoljeća. Chen Luanov opis naprave za računanje je glasio: *"Abakus je podijeljen u tri dijela. Gornji i donji dio sadrže brojače. U srednjem dijelu se obavlja računanje. Svaki stupac u srednjem dijelu može imati 5 brojača, jedan brojač koji se sastojao od pet jedinica i nalazio na samom vrhu te četiri različito obojena brojača koji su predstavljali jednu jedinicu."*

Postojala je veza između kineskog abakusa (o kojem ćemo više saznati u poglavlju 4) i rimskog abakusa. Osim sličnosti u konstrukciji i metodama rada, dokazi koji su japanske povjesničare naveli da razviju napredne teorije o tome kako je rimski abakus preteča kineskog suan pana su i: tragovi izračuna pomoću broja 5 koju su sličili rimskim znamenkama, npr. broj 6: VI (5+1), te suradnja u trgovini između ova dva carstva. Kineski povijesni dokumenti sadrže opise kopnenih ruta - *Putevi svile* na kojima su trgovali s Rimljanima. Tijekom tih trgovanja Kinezi su kopirali rimski abakus. Kasnije su ga odbacili smatrajući da taj primitivni kalkulator jedva može obavljati operacije množenja i dijeljenja. Ignorirali su ga tisuću godina, sve do porasta trgovine i potrebe za bržim izračunom.

Budući da su Rimljani bili odlični inženjeri i arhitekti, abakuse su koristili za inženjerske izračune.

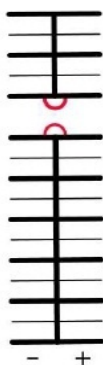
### 3. Ploča sa Salamisa

Ploča sa grčkog otoka Salamisa je najstarija otkrivena ploča namijenjena računanju. Dattira iz 300. godine prije Krista. Sastojala se od bijelih mramornih kuglica i bila je polomljena na dva nejednaka dijela, ali je inače dobro očuvana i sada se nalazi u muzeju u Ateni.



Slika 1.3. Ploča sa Salamisa

Gornji dio ploče sadrži 5 paralelnih linija jednako podijeljenih okomitom crtom ispod koje se nalazi polukrug, dok donji dio ploče sadrži 11 paralelnih linija također jednako podijeljenih okomitom crtom iznad koje se nalazi još jedan polukrug kako se može vidjeti na Slici 1.4. Ta dva polukruga ukazuju na to da se broj sastoji od dva dijela (koeficijenta i eksponenta). Prvi dio broja (koeficijent) se prikazuje u donjem dijelu, a drugi dio broja (eksponent) se prikazuje u gornjem dijelu. Krajevi polukruga ukazuju na pozitivni i negativni dio koeficijenta i eksponenta.



Slika 1.4. Strukturni dizajn ploče sa Salamisa

Na svaku stranu središnje linije se mogao postaviti jednak broj kuglica, ali povjesničari najčešće tu činjenicu ignoriraju kada izrađuju teorije kako je ploča korištena. Ilustracija Aritmetike<sup>3</sup> (Slika 1.5.) iz knjige "Margarita Philosophica" autora Gregoriusa Reischera

<sup>3</sup>Aritmetika je prikazana kao lijepa djevojka koja drži knjigu u svakoj ruci.

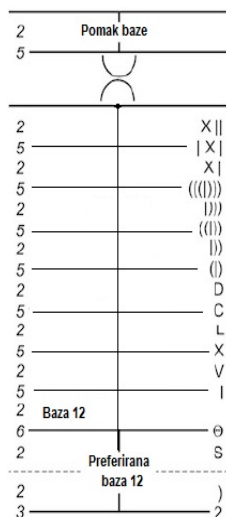
prikazuje da se s desne strane abakusa nalazi kuglica u prostoru između linija dok se sve ostale kuglice nalaze na linijama. Prostor između linija se koristio kako bi se smanjio broj kuglica u ukupnom rezultatu.



Slika 1.5. Ilustracija Aritmetike

Razne karakteristike ploče sa Salamisa ukazuju na to da su njeni dizajneri bili Babilonci (ili njihovi preci Sumerani), a Grci i Rimljani su ju posudili za decimalne i duodecimalne izračune.

Rimski ručni abakus je bio ključ za rimsko korištenje ploče sa Salamisa. Slika 1.6. prikazuje ucrtani rimski ručni abakus na ploču sa Salamisa.



Slika 1.6. Ucrtani rimski ručni abakus na ploču sa Salamisa

Brojevi s desne strane predstavljaju faktore određivanja koji nastaju pomoću rimskih brojeva ucrtanih na linije i prostore. Faktor određivanja broja 5 znači da 5 kuglica na toj

liniji može biti zamijenjeno jednom kuglicom u prostoru iznad. Svi prostori između linija imaju faktor određivanja 2. Kod Babilonaca je svaki slijed linija, uključujući i isprekidanu liniju, imao pripisane faktore određivanja 5-2-3-2. No Rimljani su morali koristiti manje preferiranu konstrukciju baziranu na broju 12. Na toj konstrukciji neće biti više od 2 kuglice po liniji, dok na drugoj konstrukciji baziranoj na broju 12 za brojanje 3 ili 9 će biti 3 kuglice po liniji.

Rimski ručni abakus ima samo dvije decimalne točke na bazi broja 12, tako da su Rimljani kompliciranije izračune obavljali na tri spojene ploče sa Salamisa gdje bi svaka ploča bila spojena s 5 znamenki na preferiranoj bazi broja 12. Promjenom promotivnog faktora koji je na babilonskom abakusu iznosio 5 na vrijednost 1, Rimljani su stvorili duodecimalni abakus. Grci su ploču sa Salamisa koristili oko 300. prije Krista na bazi broja 10, ali su ju posudili od Babilonaca koji su ju koristili oko 2700. prije Krista. Babilonci su koristili seksagezimalni brojevni sustav, a Rimljani su koristili podsustav sustava baziranog na seksagezimalnom sustavu za svoj sustav baziran na broju 12.

Radi bržeg i učinkovitijeg izračuna, lijeva strana ucrtane ploče sa Salamisa se koristila za oduzimanje. Tablica 1.1. prikazuje koliko je zapravo učinkovitije korištenje negativnog dijela u zapisu. Izačun se mogao obavljati s bilo kojim racionalnim brojevima s 10 decimala ili 5 duodecimala (ili na bazi broja 60). Korištenjem lijeve strane svaki broj se mogao zapisati s ne više od dvije kuglice po liniji i jednom kuglicom po prostoru. Prije kombiniranja kuglica korisnik je bio u mogućnosti provjeriti točan položaj i razmještaj kuglica bez da poremeti dobiveni rezultat. Mogućnost provjere i promjena pridonosi točnosti tih modela. Abakusi s ugrađenim kuglicama poput kineskog suan pana i japanskog sorobana ne mogu koristiti ovaj sustav provjere dobivenih rezultata.

	Bez negativnih dijelova		S negativnim dijelovima	
k	Maksimalno redosljedno brojanje	Povećanje	Maksimalno redosljedno brojanje	Povećanje
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
3	3	1	12	10
4	8	5	22	10
5	18	10	72	50
6	28	10	172	100
7	38	10	272	100
8	48	10	772	500
9	98	50	1,772	1,000
10	198	100	2,772	1,000

	Bez negativnih dijelova		S negativnim dijelovima	
k	Maksimalno redosljedno brojanje	Povećanje	Maksimalno redosljedno brojanje	Povećanje
11	298	100	7,772	5,000
12	398	100	17,772	10,000
13	498	100	27,772	10,000
14	998	500	77,772	50,000
15	1,998	1,000	172,772	100,000
16	2,998	1,000	277,772	100,000
17	3,998	1,000	777,772	500,000
18	4,998	1,000	1,777,772	1,000,000
19	9,998	5,000	2,777,772	1,000,000
20	19,998	10,000	7,777,772	5,000,000
21	29,998	10,000	17,777,772	10,000,000
22	39,998	10,000	27,777,772	10,000,000
23	49,998	10,000	77,777,772	50,000,000
24	99,998	50,000	177,777,772	100,000,000
25	199,998	100,000	277,777,772	100,000,000
...				
31	2,999,998	1,000,000	27,777,777,772	10,000,000,000

Tablica 1.1. Zapis s negativnim dijelom ili bez negativnog dijela

Ploča sa Salamisa se i danas može koristiti u nastavi kao pomagalo za učenje aritmetike, eksponenata, određivanja mjesta decimalne točke i zapisa korištenjem potencija baze brojevnog sustava. Pozitivne karakteristike korištenja u nastavi su: provjera greške unesenog broja prije izračuna, istovremeni prikaz i obrada pozitivnih i negativnih brojeva, obavljanje aritmetičkih operacija bez učenja tablica napamet, niža cijena u odnosu na druge naprave za računanje (npr. mogu se samo nacrtati linije na papir i koristiti kovanice za obavljanje sve četiri računске operacije)...

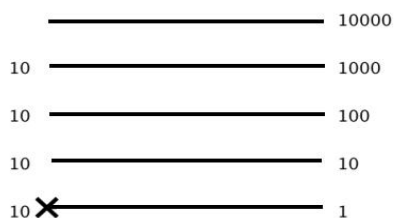
## Poglavlje 2

# Razvoj abakusa

Prikazat ćemo povijesni slijed razvoja abakusa i promotriti koliko kuglica je potrebno za zapis broja 9834 kod pojedinog dizajna i kako zapisati broj  $0.9834 \times 10^{16}$  koji ne stane na abakus. Dani pregled iznosimo prema istraživanju S. K. Stephensona. Kod svakog dizajna X označava liniju jedinice, brojevi s lijeve strane su pripisani faktori, a brojevi s desne strane su vrijednosti kuglica.

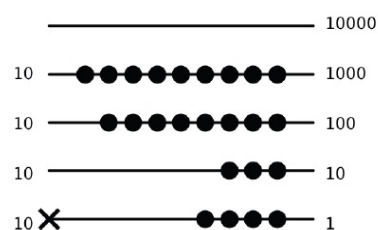
### I. dizajn abakusa

Ruke imaju 10 prstiju pa svaka prečka može imati 10 znamenki.



Slika 2.1. I. dizajn abakusa

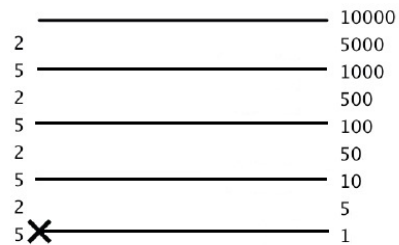
Za prikaz broja  $9834 = 9000 + 800 + 30 + 4$  potrebno je 24 kuglice:



Slika 2.2. Prikaz broja 9834 s 24 kuglice

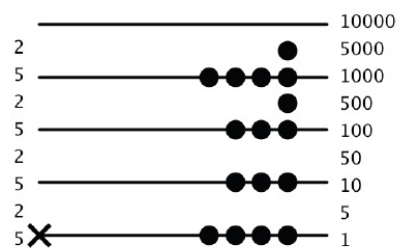
## II. dizajn abakusa

Ruka ima 5 prstiju pa svaka prečka može imati 5 znamenaka.



Slika 2.3. II. dizajn abakusa

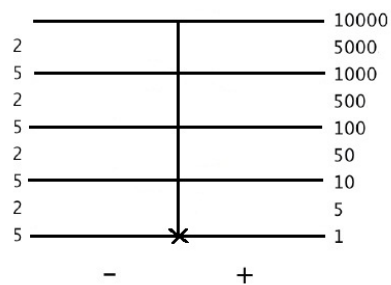
Za prikaz broja 9834 potrebno je 16 kuglica:



Slika 2.4. Prikaz broja 9834 s 16 kuglica

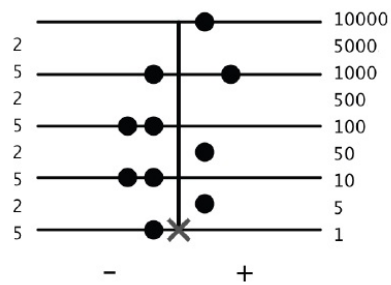
## III. dizajn abakusa

Temeljio se na parovima suprotnosti: muško-žensko, lijevo-desno,...



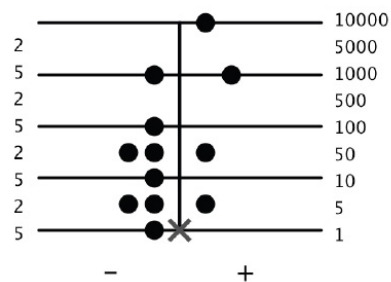
Slika 2.5. III. dizajn abakusa

Za prikaz broja 9834 potrebno je 10 kuglica:



Slika 2.6. Prikaz broja 9834 s 10 kuglica

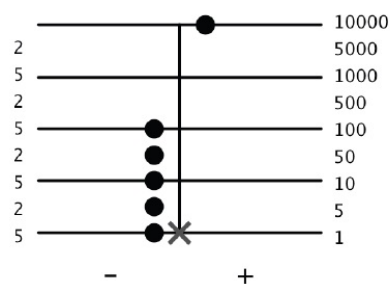
Kako je  $100=50+50$  i  $10=5+5$  pomicanjem kuglica dobivamo:



Slika 2.7. Rezultat pomicanja kuglica

Nulti parovi se poništavaju, jer  $-k + k = 0$ .

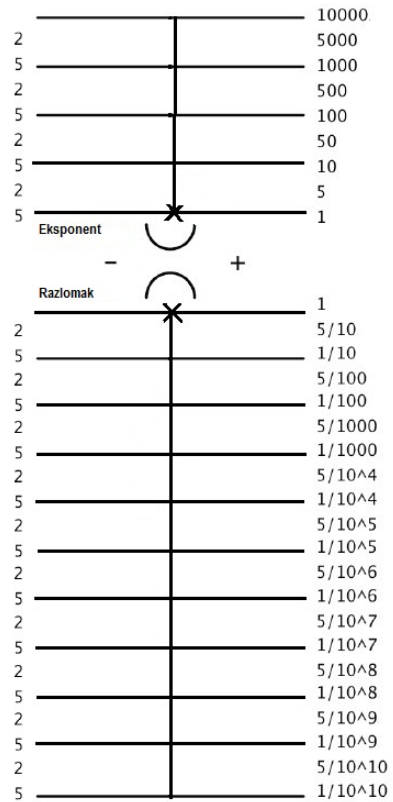
Za prikaz broja 9834 potrebno je 6 kuglica:



Slika 2.8. Prikaz broja 9834 s 6 kuglica

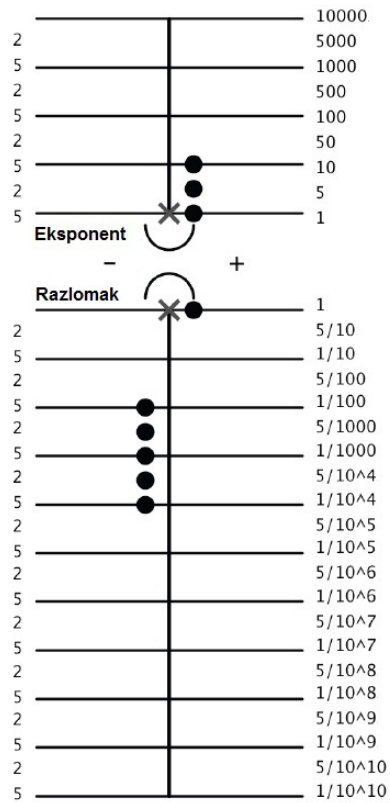
## IV. dizajn abakusa

Ovaj abakus je zapravo ploča sa Salamisa. Njegova struktura je prikazana na Slici 1.4.



Slika 2.9. IV. dizajn abakusa

Za prikaz broja  $9834000000000000 = 0.9834 \times 10^{16}$  potrebno je 9 kuglica:

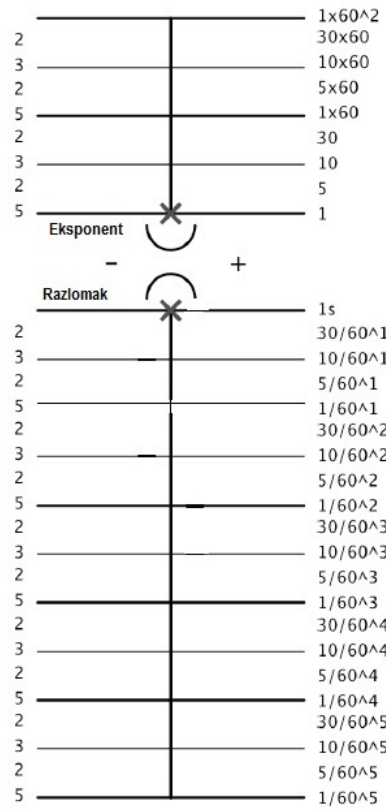


Slika 2.10. Prikaz broja  $9834000000000000 = 0.9834 \times 10^{16}$

## V. dizajn abakusa

Ovo je zapravo dizajn abakusa proširen na seksagezimalni brojevni sustav.

$$60 = 10 \times 6 = 5 \times 2 \times 3 \times 2$$



Slika 2.11. V. dizajn abakusa

## Poglavlje 3

# Babilonska matematika

Babilonska civilizacija se razvila oko 2000. prije Krista propašću sumeranske civilizacije u Mezopotamiji, području koje danas dijelom pripada Iraku. Sumeranska civilizacija je bila napredna civilizacija koja je gradila gradove i razvila sustave za navodnjavanje, a stvorena je miješanjem sumeranske i akadke kulture. Babilonci su od Sumerana naslijedili ideje za seksagezimalni brojevni sustav i klinasto pismo kojim su pisali po glinenim pločicama. Koristili su zašiljenu trsku, kojom su pisali po mokrim pločicama koje su se kasnije pekly na suncu. Osim zadataka i tablica, sadržavale su i spomenute sustave za navodnjavanje.

K. Muroi u svom djelu "Small canal problems of Babylonian mathematics" navodi:

*"Vladari Mezopotamije imali su važan zadatak da iskopaju i održavaju kanale jer su kanali bili ne samo potrebni za navodnjavanje nego i korisni za transport robe i vojske. Vladari ili visoki dužnosnici morali su unajmiti babilonske matematičare da izračunaju broj radnika i dana potrebnih za izradu kanala te da izračunaju ukupan iznos nadnica radnicima."*

*"Postoji nekoliko tekstova starih babilonskih matematičara u kojima su tražene razne veličine glede kopanja kanala. To su YBC 4666, 7164 i VAT 7528 koji su napisani na sumeranskom i YBC 9874 i BM 85196, br. 15, koji su napisani na akadskom... S matematičkog su gledišta ovi problemi relativno slični..." [6]*

Mnoge od tih pločica su ostale sačuvane i upravo one su izvori za povijest babilonske matematike.

# 1. Seksagezimalni brojevni sustav

Babilonci su koristili napredan brojevni sustav s bazom 60 koji je potekao od Sumerana oko 2500. prije Krista. Postoje brojne teorije o tome zašto su Sumerani odabrali broj 60 za bazu svog sustava. Mnogi kao razlog navode svojstva djeljivosti broja 60. No, Glenn Smith u [4] navodi da razlog leži u promatranju planeta Jupitera i Saturna:

- "Jupiteru treba 12 godina da prijede zodijak. Zodijak ima 12 znakova. Jupiter prijede prosječno 30 stupnjeva ili jedan cijeli zodijački znak u jednoj solarnoj godini."
- "Saturnu prosječno treba 30 godina da prijede zodijak. Svaki zodijački znak ima 30 stupnjeva i Saturn prelazi jedan stupanj mjesečno. Da bi prešao jedan znak, Saturnu treba 30 mjeseci. Da bi prešao cijeli zodijak, Saturnu treba 360 mjeseci. Jupiter dijeli zodijak u 12 dijelova ili znakova. Broj dobiven iz Saturnove kretnje određuje podjelu svakog znaka na 30 dijelova ili stupnjeva."
- "Jupiteru i Saturnu treba 60 godina između konjunkcija da bi došli na isto mjesto u zodijaku."

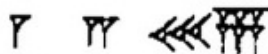
Ono što smo do danas zadržali od Sumerana je podjela tjedna na 7 dana, dana na 24 sata, sata na 60 minuta i minuta na 60 sekundi. Pretpostavlja se da su znali kako broj stupnjeva u krugu iznosi 360 i kako godina ima 365 dana.

Babilonci su za prikaz brojeva koristili samo dva osnovna oblika: simbol  $\nabla$  za 1 i simbol  $\sphericalangle$  za 10. Na Slici 3.1. vidimo kombinacije ta dva osnovna oblika za prikaz 59 znamenki njihova brojevnog sustava.

$\nabla$ 1	$\sphericalangle \nabla$ 11	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla$ 21	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla$ 31	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla$ 41	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla$ 51
$\nabla \nabla$ 2	$\sphericalangle \nabla \nabla$ 12	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla$ 22	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla$ 32	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla$ 42	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla$ 52
$\nabla \nabla \nabla$ 3	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla$ 13	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla$ 23	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla$ 33	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla$ 43	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla$ 53
$\nabla \nabla \nabla \nabla$ 4	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla$ 14	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla$ 24	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla$ 34	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla$ 44	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla$ 54
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 5	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 15	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 25	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 35	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 45	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 55
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 6	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 16	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 26	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 36	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 46	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 56
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 7	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 17	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 27	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 37	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 47	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 57
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 8	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 18	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 28	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 38	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 48	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 58
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 9	$\sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 19	$\sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 29	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 39	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 49	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$ 59
$\sphericalangle$ 10	$\sphericalangle \sphericalangle$ 20	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$ 30	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$ 40	$\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle$ 50	

Slika 3.1. Babilonske brojke

Sustav je bio pozicijski. U pozicijskom brojevnom sustavu vrijednost znamenke ovisi o njezinu položaju u broju pa se prilikom zapisivanja moralo paziti na prazna mjesta između brojeva. Npr. u dekadskom zapisu kod broja 4305, nula se koristi da pozicije znamenki 4 i 3 budu točne jer broj 435 ima drugačije značenje. Babilonci nisu imali simbol za nulu niti simbol za decimalnu točku. Tako npr. broj



predstavlja  $1 \times 60^2 + 2 \times 60 + 36 = 3756$ . Znamenka najveće težinske vrijednosti se nalazi s lijeve strane i njezina težinska vrijednost je jednaka  $60 \times n$  gdje je  $n$  takav da može biti  $1 \leq n \leq 59$ .

Babilonci su za osnovne razlomke koristili posebne znakove (Slika 3.2.).

𐎶	1/2
𐎵𐎶	1/3
𐎴𐎶	2/3
𐎵𐎶𐎶	5/6

Slika 3.2. Babilonski razlomci

Za računanje s razlomcima koristili su tablicu recipročnih brojeva (Tablica 3.1.).

Ovdje je ona prikazana u današnjoj notaciji:

$n$	$\frac{1}{n}$
2	0;30
3	0;20
4	0;15
5	0;12
6	0;10
8	0;7,30
9	0;6,40
10	0;6
12	0;5
15	0;4
16	0;3,45
⋮	⋮

Tablica 3.1. Tablica recipročnih brojeva

Zapis u tablici, npr. za broj  $n = 8$  znači da je  $\frac{1}{8} = 7 \times \frac{1}{60} + 30 \times \frac{1}{60^2}$ . Takve brojeve koji imaju recipročnu vrijednost sa konačnim prikazom nazivali su regularnim brojevima. Razlomke koji nemaju konačan prikaz poput  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{11}$ ,  $\frac{1}{13}$ , ... računali su približno, npr.  $\frac{1}{13} = \frac{7}{91} = 7 \times \frac{1}{91} \approx 7 \times \frac{1}{90} = 4 \times \frac{1}{60} + 40 \times \frac{1}{60^2} = 4; 40$ .

U terminologiji kod seksagezimalnih brojeva zarez koristimo za odvajanje seksagezimalnih znamenki, npr.  $2, 37 = 2 \times 60 + 37 = 157$ , a točku zarez koristimo kod seksagezimalnih razlomaka za odvajanje cijelog dijela broja od decimalnog poput  $1; 2, 3 = 1 + \frac{2}{60} + \frac{3}{3600} = 1.034166666$ .

Kada bi pisar koristio npr.  $\frac{1}{7}$  dao bi približan prikaz i zapisao bi:  
*"... dana je aproksimacija budući da sa 7 nije djeljivo." [6]*

## 2. Računanje u seksagezimalnom brojevnom sustavu

*"Možda je najnevjerovatniji aspekt babilonskih računskih vještina izrada tablica za pomoć u računanju." [6]*

Osim tablice recipročnih brojeva pronađene su tablice kvadrata i kubova koje prikazuju kvadrate prvih 59 brojeva i kubove prva 32 broja. Postojao je i niz drugih tablica: tablice kvadratnih i kubnih korijena, tablice suma kvadrata, ...

Mnogi tekstovi na glinenim pločicama se bave algebarskim i geometrijskim odnosima. Uz osnovne aritmetičke operacije Babilonci su znali rješavati kvadratne i kubne jednačbe, određivati kvadratni korijen iz prirodnih brojeva i poznavali su Pitagorin teorem.

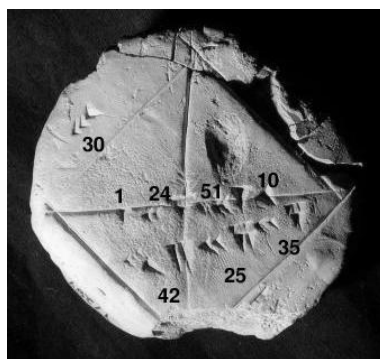
### 2.1 Množenje i dijeljenje

Za množenje brojeva Babilonci su se koristili formulom  $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$  za koju je bila potrebna samo tablica kvadrata. No, Stephenson u [5] navodi kada bismo ovu formulu primjenili na množenje dva peteroznamenkasta seksagezimalna broja sveukupno bi imali 56 zbrajanja, 38 pogleda u tablicu, 8 udvostručenja, 38 oduzimanja i 38 dijeljenja s 2, pa piše: *"Kako ćete voditi podatke o svemu ako ste ograničeni pisanjem trskom na glinenim pločicama? Koliko grešaka biste napravili u radu? Kako biste ih otkrili? Ne bi li bilo jednostavnije vjerovati da su Babilonci razvili i koristili abakus s ugrađenim sustavom provjere grešaka za svoje izračune?"*.

Babilonci nisu znali dijeliti brojeve. Jedini način dijeljenja je bilo množenje recipročnom vrijednosti:  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$  koju su pronalazili u tablici recipročnih brojeva.

## 2.2 Kvadratni korijen

Jedna od najpoznatijih babilonskih glinenih pločica je YBC 7289 (Yale Babylonian Collection, br. 7289) iz razdoblja 1800. - 1600. prije Krista.



Slika 3.3. YBC 7289

Točno podrijetlo pločice nije poznato, ali okrugli oblik ukazuje na to da je napisana negdje u južnoj Mezopotamiji u prvoj trećini drugog tisućljeća prije Krista. Pločica prikazuje vrijednost  $\sqrt{2}$  u seksagezimalnim brojkama 1;24,51,10 što je u decimalnom zapisu 1.414212963. Točna vrijednost prvih 9 decimala broja  $\sqrt{2}$  je 1.414213562. Pogreška je 0.0000423%.

Na Slici 3.3. vidimo da pločica prikazuje kvadrat s dijagonalama. Uz stranicu kvadrata stoji broj 30, dok se uz dijagonalu nalaze brojke 1,24,51,10 i 42,25,35. Ako brojke 1,24,51,10 pomnožimo s 30 dobijemo rezultat 42,25,35. Isti rezultat se dobije ako brojke 1,24,51,10 podijelimo s 2 (jer su 2 i 30 recipročni brojevi). Ti brojevi zapravo predstavljaju vezu između dijagonale i stranice kvadrata  $d = a \cdot \sqrt{2}$ .

Postavlja se pitanje kako su Babilonci izračunali aproksimaciju  $\sqrt{2}$ ?

Metoda koju su koristili poznata je kao Heronova metoda<sup>1</sup>. Ovom metodom se može pronaći kvadratni korijen bilo kojeg broja. Metoda ima jednostavan algoritam koji za rezultat daje broj koji je u svakom novom koraku računanja sve bliži točnom rezultatu.

<sup>1</sup>Heron, grčki matematičar, opisao svoju metodu u djelu Metrica.

Algoritam je sljedeći:

1. Uzeti  $n = n_1$  za početnu aproksimaciju.
2. Ideja: ako je  $n_1 < \sqrt{2}$  tada je  $\frac{2}{n_1} > \sqrt{2}$ .
3. Tada uzeti  $n_2 = \frac{(n_1 + \frac{2}{n_1})}{2}$ .
4. Ponoviti postupak.

**Primjer:** Za početnu aproksimaciju uzmimo  $n = 1$ .

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = \frac{(1 + \frac{2}{1})}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 = 1;30$$

$$n_3 = \frac{(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}})}{2} = \frac{(\frac{3}{2} + \frac{4}{3})}{2} = \frac{\frac{17}{6}}{2} = \frac{17}{12} = 1;15$$

$$n_4 = \frac{(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}})}{2} = \frac{(\frac{17}{12} + \frac{24}{17})}{2} = \frac{577}{408} = 1;24,51,10,35, \dots$$

Ukratko induktivni postupak možemo zapisati:

$$n_{i+1} = \frac{1}{2} \times \left( n_i + \frac{a}{n_i} \right)$$

gdje niz  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  konvergira prema  $\sqrt{a}$ .

Otto Neugebauer<sup>2</sup> za ovu iterativnu metodu izračunavanja racionalne aproksimacije broja  $\sqrt{a}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ , navodi: "*Ne postoje dokazi da Babilonci nisu računali aproksimaciju ovom metodom.*"

## 2.3 Kvadratne i kubne jednadžbe

Babilonci su proučavali kvadratne jednadžbe oblika

$$x^2 \pm bx = c$$

---

<sup>2</sup>Otto Neugebauer, 1899. - 1990., austrijski matematičar i povjesničar znanosti.

gdje su  $b$  i  $c$  bili pozitivni ali ne nužno cijeli brojevi.

Iako ovaj moderni zapis nije nimalo sličan simbolima koji su Babilonci koristili, rješenja kvadratnih jednadžbi su bila potpuna i jednaka današnjim formulama. Babilonci su poznavali samo pozitivna rješenja jednadžbi. Negativna rješenja, uključujući i negativne brojeve, se pojavljuju u 16. stoljeću. Problemi koji su doveli do jednadžbi ovog tipa uključivali su površinu pravokutnika.

Problem na tablici koji kaže da je površina pravokutnika jednaka 1,0 a njegova duljina je veća od njegove širine za 7 pisar je riješio na sljedeći način:

Izračunaj polovinu od 7, što je 3;30.

Kvadriraj da bi dobio 12;15.

Pribroji 1,0 da bi dobio 1;12,15.

Izvadi kvadratni korijen da bi dobio 8;30.

Oduzmi od toga 3;30 da bi dobio 5 što je širina trokuta.

Pisar je tako riješio jednadžbu  $x^2 + 7x = 1,0$  odnosno jednadžbu tipa  $x^2 + bx = c$ .

Babilonci su bili u mogućnosti rješavati određene kubne jednadžbe uz pomoć tablice koju su napravili za  $n^3 + n^2$ . Na primjeru jednadžbe  $ax^3 + bx^2 = c$  promotrit ćemo kako su rješavali numeričke primjere ovog tipa. Koristili su pravila koja pokazuju da su imali koncept tipičnog problema određenog tipa i tipičnu metodu za rješavanje tog problema.

**Primjer:**  $ax^3 + bx^2 = c \ / \cdot a^2 \ /: b^3$

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2c}{b^3}$$

ako se stavi  $y = \frac{ax}{b}$

dobije se jednadžba  $y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$

u tablici za  $n^3 + n^2$  se nađe vrijednost od  $n$  koja zadovoljava  $n^3 + n^2 = \frac{ca^2}{b^3}$

i tako je pronađeno rješenje za  $y$

rješenje za  $x$  se dobije izračunavanjem  $x = \frac{by}{a}$

sada se rješava linearna jednačina  $ax = b$

uz pomoć tablice za  $\frac{1}{n}$  dobije se  $\frac{1}{a}$

i broj iz tablice bi pomnožili s  $b$ .

### 3. Pitagorin teorem

Da su Babilonci poznavali Pitagorin teorem dokazuju pločice pronađene u razdoblju između 1900. i 1600. prije Krista. Prijevod teksta jedne takve pločice koja se čuva u Britanskom muzeju glasi:

*"4 je duljina i 5 dijagonala. Kolika je širina? Nije poznata. 4 puta 4 je 16. 5 puta 5 je 25. Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9. Što da uzmem da dobijem 9? 3 puta 3 je 9. 3 je širina."*

Ovdje se očito radi o određivanju jedne stranice pravokutnika pomoću Pitagorina teorema ako su poznate duljine druge stranice i dijagonale.

Osim pločice YBC 7289 razmotrit ćemo i Plimpton 322, Susa i Tell Dhibayi pločice koje su osobito važne za razumijevanje babilonske matematike.

#### 3.1 Plimpton 322

Pločica Plimpton 322 (Slika 3.4.) sadrži tablicu brojeva s 4 stupca i 15 redaka.



Slika 3.4. Plimpton 322

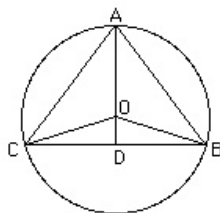
Vjeruje se da je napisana oko 1800. prije Krista. Pločica je djelomično oštećena u lijevom

gornjem kutu, pa nedostaje dobar dio prvog stupca dok su drugi, treći i četvrti stupac potpuno vidljivi. Činjenica koju su istakli Neugebauer i Sachs u djelu "Mathematical Cuneiform Texts" je da u svakom retku vrijedi da je kvadrat broja  $b$  u drugom stupcu oduzet od kvadrata broja  $c$  u trećem stupcu jednak kvadratu broja  $h$ , tj.  $c^2 - b^2 = h^2$ . Pločica predstavlja tablicu cjelobrojnih Pitagorinih trojki. Ovo je djelomično točno jer Neugebauer i Sachs vjeruju da je pisar napravio greške u prepisivanju. Prvi stupac predstavlja  $\left(\frac{c}{h}\right)^2$ , dok su u zadnjem stupcu samo napisani brojevi od 1 do 15. Zanimljivo je da se ne pojavljuju Pitagorine trojke (3,4,5) ni (5,12,13), a najmanja Pitagorina trojka koja se pojavljuje je (45,60,75).

Neki povjesničari se ne slažu da pločica Plimpton 322 predstavlja Pitagorine trojke. Tako npr. autor Exarchakos tvrdi kako je pločica povezana s rješavanjem kvadratnih jednadžbi.

### 3.2 Susa pločica

Susa pločica predstavlja problem pronalaženja radijusa kruga u kojem je upisan jednakostraničan trokut sa stranicama 50, 50, 60. Shema Susa pločice je prikazana na Slici 3.5.



Slika 3.5. Shema Susa pločice

Neka je dan  $\triangle ABC$  i s  $O$  neka je označeno središte kruga. Okomica  $|AD|$  siječe stranicu  $|BC|$  u polovištu. Kako je  $\triangle ABD$  pravokutan vrijedi Pitagorin teorem:

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |AB|^2 - |BD|^2 \\ |AD|^2 &= 50^2 - 30^2 \\ |AD|^2 &= 2500 - 900 \\ |AD|^2 &= 1600 \\ |AD| &= 40. \end{aligned}$$

Radijus kruga označimo s  $x$ . Sada imamo  $|AO| = |OB| = x$  pa je  $|OD| = 40 - x$ .

Koristeći Pitagorin teorem na  $\triangle OBD$  imamo

$$\begin{aligned}x^2 &= |OD|^2 + |DB|^2 \\x^2 &= (40 - x)^2 + 30^2 \\x^2 &= 40^2 - 80x + x^2 + 30^2 \\80x &= 2500 \\x &= 31.25.\end{aligned}$$

### 3.3 Tell Dhibayi pločica

Tell Dhibayi pločica predstavlja geometrijski problem gdje se trebaju izračunati stranice pravokutnika ako je poznata površina 0;45 i dijagonale 1;15.

Neka  $x, y$  predstavljaju stranice pravokutnika.

Metoda kojom bismo mi to riješili:

$$\begin{aligned}xy &= 0.75 \\x^2 + y^2 &= (1.25)^2\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe bi odredili  $y$ :

$$y = \frac{0.75}{x}$$

i uvrstili u drugu jednadžbu kako bi dobili rješenje.

Babilonska metoda je puno zanimljivija:

Izračunaj  $2xy = 1; 30$ .

Od  $x^2 + y^2 = 1; 33, 45$  oduzmi  $2xy = 1; 30$  da bi dobio  $x^2 + y^2 - 2xy = 0; 3, 45$ .

Izvadi kvadratni korijen da bi dobio  $x - y = 0; 15$ .

Podijeli s 2 da bi dobio  $\frac{x-y}{2} = 0; 7, 30$ .

Podijeli  $x^2 + y^2 - 2xy = 0; 3, 45$  s 4 da bi dobio  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} = 0; 0, 56, 15$ .

Pribroji  $xy = 0; 45$  da bi dobio  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} = 0; 45, 56, 15$ .

Izvadi kvadratni korijen da bi dobio  $\frac{x+y}{2} = 0; 52, 30$ .

$\frac{x-y}{2} = 0; 7, 30$  pribroji  $\frac{x+y}{2} = 0; 52, 30$  da bi dobio  $x = 1$ .

Oduzmi  $\frac{x-y}{2} = 0; 7, 30$  od  $\frac{x+y}{2} = 0; 52, 30$  da bi dobio  $y = 0; 45$ .

Pravokutnik ima strane  $x = 1$  i  $y = 0; 45$ .

## Poglavlje 4

### Kineski abakus

Kina je dugo vremena bila izolirana od ostatka svijeta zbog svog geografskog položaja pa se njihova matematika razvijala samostalno, bez dodira s drugim civilizacijama. Kineska matematika se uvelike razlikuje od grčke matematike. Dok je grčka matematika deduktivnog tipa i temelji se na aksiomima, kineska matematika je orijentirana na pronalaženje algoritama za računanje i rješavanje konkretnih zadataka i problema.

Otkrićem arheološkog nalazišta (u provinciji Henan, kraj suvremenog grada Anyanga) 1899. godine pronađene su tisuće kostiju i kornjačinih oklopa na kojima je zabilježen najstariji oblik kineskog brojevnog sustava. Bile su to ruševine posljednje prijestolnice kineske dinastije Shang (zване i Yin).

Oko 2000. prije Krista simboli koje su koristili za prikaz brojeva su izgledali ovako:

—	≡	≡	≡	⌘
1	2	3	4	5
↗	†	)\	ㄥ	
6	7	8	9	10
∪	∩	∩	⌘	↗
20	30	40	50	60
☉	☉	☉	☉	☉
100	200	300	400	500
ㄥ	ㄥ	ㄥ	ㄥ	ㄥ
1000	2000	3000	4000	5000

Sustav je bio nepozicijski, a znak za nulu je ovdje bio nepotreban.

Oko 400. prije Krista aritmetičke operacije su obavljali pomoću štapića od bambusa ili slonove kosti. Ovdje su dva moguća načina prikazivanja brojeva:

—	==	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9
					⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Postavlja se pitanje kako su Kinezi mogli znati predstavlja li ||| broj 3, 12, 21 ili 111? Kako bi izbjegli ovaj problem naizmjenice su koristili oba oblika prikaza brojeva, npr. jedinice su pisali oblikom prikazanim u donjem retku, desetice oblikom prikazanim u gornjem retku itd. Tako je npr. broj 45698 bio prikazan s

	≡	⊥	≡	⊥
--	---	---	---	---

Sustav je pozicijski, a nulu su sada prikazivali ostavljanjem razmaka između brojeva, tj. praznog mjesta.

Kineska matematika se temeljila na konkretnim primjerima vezanim za kalendar, arhitekturu, porez, trgovinu, ... Ostalo je jako malo sačuvanih pisanih dokumenata, jer je za vrijeme Qin dinastije vladar Shih Huang Ti 213. prije Krista naredio spaljivanje knjiga.

Najpoznatiji kineski matematički tekst "Devet poglavlja matematičkog umijeća" (originalnog naslova "Jiuzhang suanshu") je ujedno i jedan od najstarijih. Nije poznato tko je autor teksta. Bio je to praktičan priručnik u kojem se nalazi 246 problema s rješenjima namjenjenim trgovcima, inženjerima, činovnicima i mjerачima.

Sadržaj priručnika je bio sljedeći:

1. *poglavlje*: mjerenje površina, operacije s razlomcima oblika  $\frac{m}{n}$
2. *poglavlje*: razmjena dobara i novca, neodređene jednakosti
3. *poglavlje*: razmjer i omjer
4. *poglavlje*: problemi pravokutnih polja, kvadratni i kubni korijeni
5. *poglavlje*: građevinski problemi
6. *poglavlje*: različiti osnovni problemi
7. *poglavlje*: problemi viška i manjka
8. *poglavlje*: sustavi linearnih jednadžbi
9. *poglavlje*: problemi vezani uz pravokutan trokut

Navedimo neke primjere problema:

- Više ljudi skupa kupuje neki predmet. Ako svaki plati 8 novčića višak je 3 novčića, a ako svaki plati 7 novčića nedostaje 4 novčića do cijene predmeta. Izračunaj broj ljudi i cijenu predmeta.

- Imamo dvije hrpe, jednu od 9 zlatnih novčića i drugu od 11 srebrnih novčića. Objе hrpe imaju istu težinu. Zamjenom jednog zlatnog novčića s jednim srebrnim novčićem, hrpa zlatnih novčića je postala za 13 langa lakša od hrpe srebrnih novčića. Izračunati težinu zlatnih i srebrnih novčića.  
(1 tin= 16 lang= 16 · 24 čua)
- Dobar trkač napravi 100 koraka, dok loš trkač napravi 60. Loš trkač je u prednosti od dobrog trkača za 100 koraka. Koliko koraka dobar trkač mora napraviti da bi sustigao lošeg trkača?
- Kasač i stara raga idu od Chanana u kneževinu Tsi, udaljenost je 3000 jedinica duljine. Prvi dan kasač prijeđe 193 jedinice, a svaki idući dan po 13 više. Raga prvi dan prijeđe 97 jedinica i svaki idući dan po pol jedinice manje. Kasač prvi stiže u Tsi, okreće se i vraća te negdje usput susreće ragu. Nakon koliko dana su se sreli i koliko je koji prešao do tog susreta?
- Postoje vrata kojih je visina veća od širine za 6 či i 8 hun. Najveća udaljenost između kutova vrata je 1 čang. Pitamo se kolika je širina i visina vrata?  
(1 čang= 10 či= 100 hun)
- Imamo tri vrste žita. Tri svežnja prvog, dva drugog i jedan trećeg daju 39 mjera žita. Dva prvog, tri drugog i jedan trećeg daju 34 mjere. Jedan prvog, dva drugog i tri trećeg daju pak 26 mjera. Koliko je mjera žita sadržano u svežnju svake pojedine vrste?

Nije poznato koliko je izvorni tekst "Devet poglavlja matematičkog umijeća" star, ali se pretpostavlja da je nastao u razdoblju 100. pr. Kr. - 100. po. Kr. Tijekom vremena je dosta prerađivan i komentiran. Tako je Liu Hui<sup>1</sup> oko 263. napisao komentar u kojem je dao procjenu za  $\pi$  kao 3.141014 i kao dobru aproksimaciju predložio je 3.14. Također je napisao i "O jednom otoku u moru" u kojem je pisao o određivanju udaljenosti i veličine nedostupnih predmeta pomoću Pitagorina teorema. To je zapravo dodatak komentara devetog poglavlja u "Devet poglavlja matematičkog umijeća" koji se sastoji od 9 problema i koji je kasnije izdvojen i nazvan po prvom problemu koji glasi ovako:

- Neka su  $P_1$  i  $P_2$  dva stupa visine 5 pua zabijeni u zemlju i udaljeni 1000 pua.  $P_1$  je bliži udaljenom otoku nego  $P_2$ . Ako promatrač stoji 123 pua iza  $P_1$  vidi vrh otoka u liniji s vrhom od  $P_1$ , a ako stoji 127 pua iza  $P_2$  vidi vrh otoka u liniji s vrhom od  $P_2$ . Potrebno je odrediti visinu otoka i njegovu udaljenost od  $P_1$ .  
(1 pu iznosi otprilike 2 metra)

Važnost njegova doprinosa je u davanju matematičkog dokaza, ne u smislu dokaza kakvog mi danas poznajemo već u smislu kratkog objašnjenja izračuna.

---

<sup>1</sup>Liu Hui, oko 220. - 280., kineski matematičar

Autori Dong i Yao u svojoj knjizi "The mathematical thought of Liu Hui" navode:

*"Liu Hui, veliki matematičar dinastije Wei Jin, uveo je matematičku teoriju u antičku Kinu te imao velik doprinos u nastanku osnova matematike. Iz "Devet poglavlja matematičkog umijeća" i "O jednom otoku u moru" može se vidjeti da je Liu Hui u logičkom i dijalektičkom načinu vješto koristio predodžbu svojih zamisli. Riješio je mnoge matematičke probleme, stavljajući matematičko objašnjenje uz dijalektički način."*

Indijska matematika je imala značajan utjecaj na kinesku matematiku. Indijski matematičari Brahmagupta, Mahavira i Bhaskara su pokušali riješiti problem vezan uz nulu i negativne brojeve. Tako je Brahmagupta<sup>2</sup> u 7. stoljeću pokušao dati pravila za aritmetiku koja uključuju nulu i negativne brojeve.

Pravilo za zbrajanje:

*"Zbroj nule i negativnog broja je negativan broj; zbroj pozitivnog broja i nule je pozitivan; zbroj dvaju nula je jednak nuli."*

Pravilo za oduzimanje:

*"Negativan broj oduzet od nule postaje pozitivan; pozitivan broj oduzet od nule postaje negativan; ako od negativnog broja oduzmemo nulu, dobijemo negativan broj, ako od pozitivnog broja oduzmemo nulu, dobijemo pozitivan broj; ako od nule oduzmemo nulu, dobijemo nulu."*

Pravilo za dijeljenje:

*"Pozitivan ili negativan broj dijeljen nulom daje razlomak s nulom u nazivniku. Nula podijeljena negativnim ili pozitivnim brojem je ili nula ili se prikazuje kao razlomak s nulom kao brojnikom i konačnom veličinom kao nazivnikom. Nula podijeljena nulom je nula."*

Brahmagupta je imao i pravilo za množenje, u kojem kaže da svaki broj pomnožen s nulom daje nulu.

Mahavira<sup>3</sup>, u pokušaju da ispravi Brahmaguptino pravilo za dijeljenje s nulom, navodi:

*"Broj ostaje nepromijenjen, ako ga se podijeli s nulom."*

Bhaskara<sup>4</sup> je 500 godina nakon Brahmagupte zaključio:

*"Veličina podijeljena s nulom postaje razlomak čiji je nazivnik nula. Takav razlomak je*

---

<sup>2</sup>Brahmagupta, 598. - 670., indijski matematičar

<sup>3</sup>Mahavira, oko 800. - oko 870., indijski matematičar

<sup>4</sup>Bhaskara, 1114. - 1185., indijski matematičar

*oznaka za beskonačnu veličinu. U veličini, koja je nastala iz veličine koja ima nulu kao djelitelja, nema promjene, iako joj se mnoge mogu dodati ili oduzeti; kao što se beskrajn i nepromjenljiv Bog ne mijenja kada se svjetovi stvaraju i uništavaju, iako time mnogobrojna bića nastaju i nestaju."*

Indijske ideje su se proširile do Kine. Tako Kinezi razlikuju pozitivne i negativne brojeve, te se štapići za računanje izrađuju u dvije boje. Mnogi antički matematički tekstovi sadrže opise kako izvoditi aritmetičke operacije na abakusu. Tako npr. Sun Zi<sup>5</sup> u svom matematičkom priručniku "Sunzi suanjing" daje instrukcije kako množiti, dijeliti i određivati kvadratni korijen na abakusu. U tom priručniku se može naći i Kineski teorem o ostacima za sustave kongruencija.

Za kinesku matematiku je također značajan i Xiahou Yang<sup>6</sup> koji u svom matematičkom priručniku opisuje da se za množenje decimalnog broja sa 10, 100, 1000 ili 10000 šipke pomiču unaprijed za 1, 2, 3 ili 4 decimalna mjesta, dok se kod dijeljenja šipke pomiču unatrag za 1, 2, 3 ili 4 decimalna mjesta i time pokazuje da razumije pozitivne i negativne potencije broja 10. Značajan je i matematički priručnik koji je napisao Zhang Qiu Jian<sup>7</sup>, jer je u njemu dao formulu za sumu aritmetičkog niza. Bavi se i manipulacijom razlomcima, kvadratnim jednadžbama i sustavima linearnih jednadžbi. Wang Xiaotong,<sup>8</sup> u čijem radu se naziru počeci kineske algebre, te je pronašao algoritam za približno rješavanje opće kubne jednadžbe.

U antičko vrijeme Kina je bila poljoprivredna zemlja i tada trgovina nije imala potrebu za napravama za brže računanje. Postepenim usponom trgovine i industrije počinje rasti i potreba za bržim izračunom i tako su se abakusi počeli naširoko koristiti u 14. stoljeću. Mnogi navode kako su Kinezi izumili abakus, no već u poglavlju 1 smo saznali da su Kinezi zapravo kopirali rimski abakus tijekom trgovanja s Rimljanima.

## 1. Princip rada

Kineski abakus (Slika 4.1.) se sastoji od drvenog ili metalnog okvira pravokutnog oblika, koji vodoravna prečka dijeli na dva polja - gornje i donje polje. Okvir abakusa sadrži niz vertikalnih stupaca na kojima se nalaze kuglice. U svakom stupcu ima 7 kuglica: po dvije u gornjem polju i po 5 u donjem polju. Abakus može imati 9, 11, 13 ili više stupaca, ovisno o veličini abakusa. No, standardni kineski abakus ima 13 stupaca.

---

<sup>5</sup>Sun Zi, oko 400. - oko 460., kineski matematičar

<sup>6</sup>Xiahou Yang, oko 400. - oko 470., kineski matematičar

<sup>7</sup>Zhang Qiu Jian, oko 430. - oko 490., kineski matematičar

<sup>8</sup>Wang Xiaotong, oko 580. - oko 640., kineski matematičar i astronom



Slika 4.1. Kineski abakus

Svaka kuglica u gornjem polju predstavlja vrijednost 5, dok svaka kuglica u donjem polju ima vrijednost 1. Kuglice su uračunate ako su pomaknute prema prečki, odnosno kuglice u gornjem polju su uračunate ako su pomaknute prema dolje dok su kuglice u donjem polju uračunate ako su pomaknute prema gore. Kuglice predstavljaju znamenke, a svaki stupac predstavlja određenu dekadsku težinu. Na desnom kraju abakusa posljednja dva stupca predstavljaju decimalni dio broja, a svaki sljedeći stupac predstavlja jedinice, desetice, stotice, ...

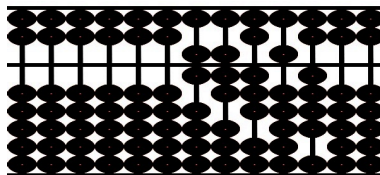
Za brzo i točno računanje na abakusu bitan je rad prstiju.

Postoje 3 načina pomicanja kuglica:

1. korištenjem kažiprsta
2. korištenjem palca i kažiprsta
3. korištenjem palca, kažiprsta i srednjeg prsta.

Najbrži i najlakši je drugi način, korištenjem palca i kažiprsta.

Brojevi od 1 do 4 se na abakusu prikazuju podizanjem odgovarajućeg broja donjih kuglica do prečke, za broj 5 spuštamo jednu gornju kuglicu, a brojevi od 6 do 9 se prikazuju spuštanjem jedne gornje kuglice i podizanjem odgovarajućeg broja donjih kuglica (kao  $5+1$ ,  $5+2$ ,  $5+3$ ,  $5+4$ ). Na Slici 4.2. vidimo prikaz broja 67354:



Slika 4.2. Prikaz broja 67354 na abakusu

## 2. Izvođenje računskih operacija

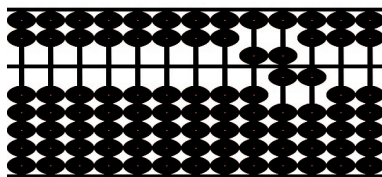
Na primjerima ćemo promotriti kako se izvode osnovne računске operacije na kineskom abakusu.

### 2.1 Zbrajanje

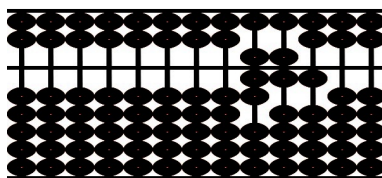
Postupak zbrajanja se na abakusu izvodi tako da prvo unesemo prvi pribrojnik, a drugi pridodamo prvom. Za razliku od zbrajanja na papiru, postupak se provodi s lijeva na desno.

**Primjer:**  $561 + 286 = 847$ .

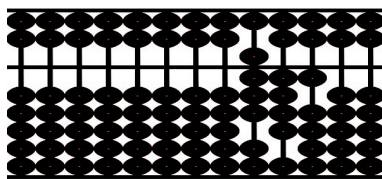
*Korak 1.* Unesemo prvi pribrojnik 561 na abakus:



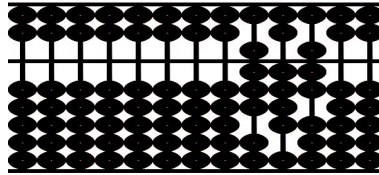
*Korak 2.* Sada dodajemo drugi pribrojnik, krenuvši od stupca stotica, pa imamo  $5+2 = 7$ :



*Korak 3.* Sada broju 6 na stupcu desetica dodajemo 8, pa imamo  $6+8=6+(10-2)$  (što znači da na stupac stotica dodajemo 1 kuglicu, a na stupcu desetica oduzimamo 2 kuglice):



*Korak 4.* Ostalo nam je još broju 1 na stupcu jedinica dodati 6,  $1 + 6 = 7$ , pa je konačan rezultat 847:

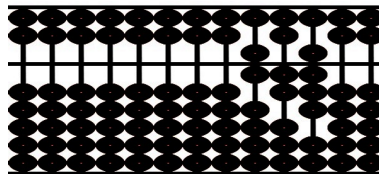


## 2.2 Oduzimanje

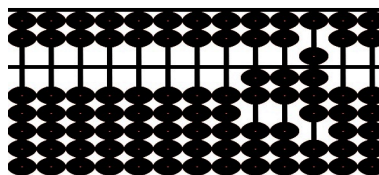
Postupak oduzimanja je sličan postupku zbrajanja.

**Primjer:**  $628 - 465 = 163$ .

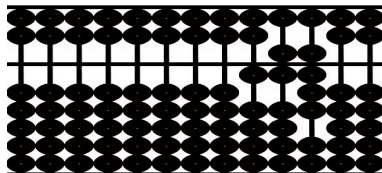
*Korak 1.* Unesemo umanjenu 628 na abakus:



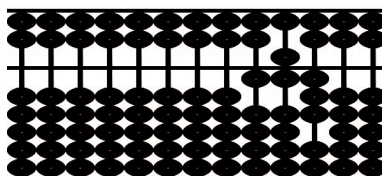
*Korak 2.* Sada oduzimamo umanjitelja, krenuvši od stupca stotica, pa imamo  $6 - 4 = 2$ :



*Korak 3.* Sada na stupcu desetica od broja umanjnika oduzimamo broj umanjitelja, no kako od 2 kuglice ne možemo oduzeti 6 kuglica - posuđujemo jednu kuglicu na stupcu stotica (što znači da sada na stupcu stotica imamo 1 kuglicu, a na stupcu desetica 6 kuglica):



*Korak 4.* Ostaje nam još stupac jedinica,  $8 - 5 = 3$ , pa je konačan rezultat 163:

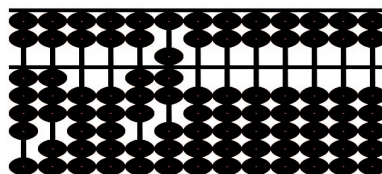


## 2.3 Množenje

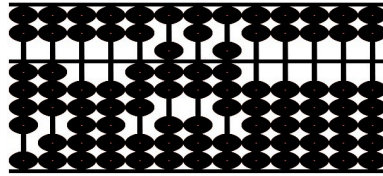
Postupak množenja se izvodi uz pomoć zbrajanja, a potrebno je poznavati i tablicu množenja. Za razliku od zbrajanja i oduzimanja, ovdje unosimo oba faktora s lijeve strane abakusa, tako da ostavimo dva prazna stupca između faktora. Postupak je sljedeći:

**Primjer:**  $37 \cdot 43 = 1591$ .

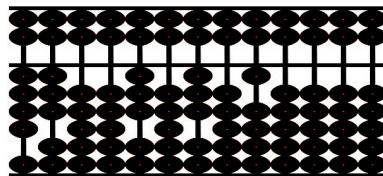
*Korak 1.* Unosimo faktore na abakus, tako da prvo zapišemo drugi faktor 43 a zatim prvi faktor 37:



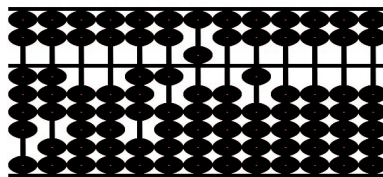
*Korak 2.* Množimo  $7 \cdot 4$  i umnožak 28 dodajemo na abakus:



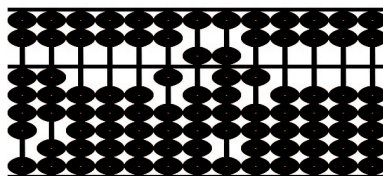
*Korak 3.* Množimo  $7 \cdot 3$  i umnožak 21 dodajemo prethodnom rezultatu s pomakom za jedno mjesto udesno pa imamo 301. Poništavamo 7 u prethodnom stupcu.



*Korak 4.* Sada množimo  $3 \cdot 4$  i umnožak 12 dodajemo prethodnom rezultatu s pomakom ulijevo što znači da imamo 1501:



*Korak 5.* Ostalo je još pomnožiti  $3 \cdot 3$  i umnožak 9 dodati prethodnom rezultatu s pomakom udesno. Poništavamo 3, konačan rezultat je 1591:

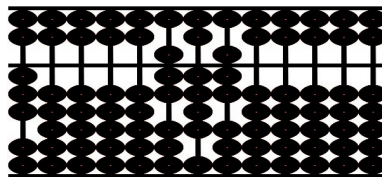


## 2.4 Dijeljenje

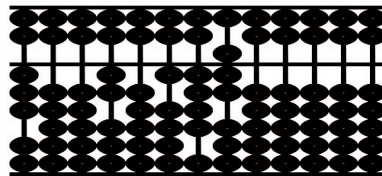
Kod dijeljenja, kao i kod množenja, u stupce unosimo i djeljenu i djeliteľ s lijeve strane abakusa. Između djeljenu i djeliteľa ostavljamo četiri prazna stupca. Postupak je sljedeći:

**Primjer:**  $747 \div 3 = 249$ .

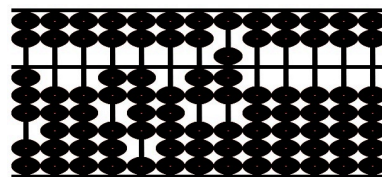
*Korak 1.* Unosimo djeljenu i djeliteľ na abakus:



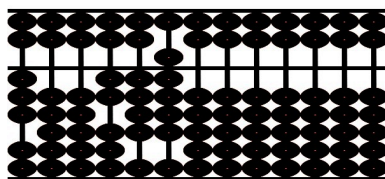
*Korak 2.* Uspoređujemo početni dio djeljenu s djeliteľem:  $2 \cdot 3 = 6$ . Postavljamo 2 za dva stupca ulijevo od djeljenu. Sada taj prvi parcijalni produkt množimo s djeliteľem  $2 \cdot 3$  i dobivamo umnožak 6 koji oduzimamo od djeljenu:



*Korak 3.* Sada uspoređujemo 14 s 3:  $4 \cdot 3 = 12$ . Postavljamo 4 iza 2 te množimo  $4 \cdot 3$  i dobiveni umnožak 12 oduzimamo od 14 što daje 2 te imamo:

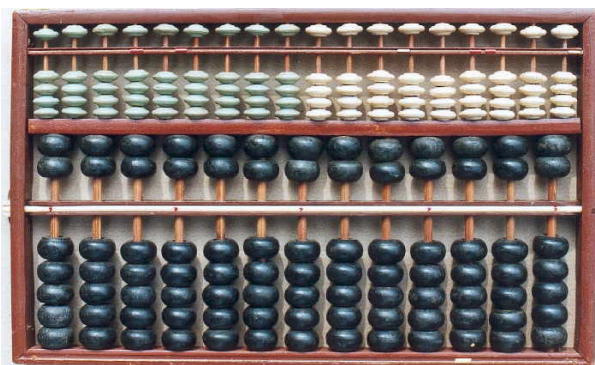


*Korak 4.* Uspoređujemo 27 s 3:  $9 \cdot 3 = 27$ . Postavljamo 9 iza 4 te množimo  $9 \cdot 3$  i dobiveni umnožak 27 oduzimamo od 27 što daje nulu pa imamo konačan rezultat 249:



### 3. "Leejev unaprijeđeni abakus"

Kao posebnu vrstu abakusa možemo istaknuti "Leejev unaprijeđeni abakus", koji je kombinacija standardnog kineskog suanpana (5+2) i japanskog sorobana (4+1). Veličina takvog abakusa je  $33 \times 20$  cm. Donji abakus je glavni za izvođenje računskih operacija, dok gornji abakus predstavlja pomoćni abakus (podijeljen je na lijevo i desno polje) (Slika 4.3.). Ovaj abakus je izumio Lee Kai-chen, po kome je i dobio ime. Kako su priručnici s uputama tiskani 1958. godine, pretpostavlja se da je izumljen oko 1950. godine. Ideja nastanka ovakvog abakusa je poboljšati i pojednostaviti računanje pri radu s velikim brojevima (poput množenja, dijeljenja, određivanja kvadratnog i kubnog korijena).



Slika 4.3. "Leejev unaprijeđeni abakus"

Osim po izgledu, Lee Kai-chenov abakus se razlikuje od ostalih i po tome što ima zanimljiv konstrukcijski detalj (Slika 4.4.) - pomičnu gumenu traku s oznakama točke i zareza za lakši odabir mjesta jedinica, desetica, stotica, ...



Slika 4.4. Konstrukcijski detalj

## 4. Današnja upotreba

Osim što je pogodan za računanje u različitim brojevnim sustavima, kineski abakus je najrasprostranjeniji. Iako je napredak računala potisnuo upotrebu abakusa u svakodnevnom računanju, on se i danas koristi u raznim prodavaonicama diljem Kine i Sjeverne Amerike (u kineskim četvrtima). Također se još uvijek može naći u upotrebi u školama diljem Kine i Japana, a koriste ga i slijepe osobe pri učenju aritmetike.

# Bibliografija

- [1] G. D. ALLEN, *Lectures on the History of Mathematics*,  
<http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html>
- [2] T. KOJIMA, *The Japanese Abacus: Its Use and Theory*, Charles E. Tuttle Company,  
Tokyo - Japan, First edition, 1954.
- [3] J. LÜTJENS, *Abacus-Online-Museum*,  
<http://www.joernluetjens.de/sammlungen/abakus/abakus-en.htm>
- [4] G. R. SMITH, *The Six Thousand Year Barrier*,  
<http://www.glenn.freehomepage.com/writings/Barrier/>
- [5] S. K. STEPHENSON, *Ancient Computers, Part I - Rediscovery*, 2010., IEEE Global  
History Network,  
[http://www.ieeeahn.org/wiki/index.php/Ancient\\_Computers](http://www.ieeeahn.org/wiki/index.php/Ancient_Computers)
- [6] THE MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE,  
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
- [7] WIKIPEDIA, *Abacus*,  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Abacus>

# Sažetak

U ovom radu proučavamo razvoj antičkih računala i kako su se koristila za obavljanje računskih operacija u različitim brojevnim sustavima. Razne karakteristike ploče sa Salamisa ukazuju na to da su njeni dizajneri bili Babilonci, a Grci i Rimljani su ju posudili za decimalne i duodecimalne izračune. Japanski povjesničari matematike su razvili teorije o tome kako je rimski abakus preteča kineskog suan pana. Kinezi su tijekom trgovanja s Rimljanima kopirali rimski abakus. Kasnije su ga odbacili i ignorirali ga tisućama godina, sve do porasta trgovine i potrebe za bržim izračunom. Abakus je jednostavan izum koji se i danas koristi.

Antički narodi su imali brza i snažna računala pomoću kojih su izgradili svoja carstva.

## Summary

In this paper we study the development of ancient computers and how they were being used to perform arithmetical operations in different number systems. Various features of The Salamis Tablet indicate that the Babylonians were its designers; the Greeks and Romans borrowed it for decimal and duodecimal calculations. Japanese historians of mathematics have developed the theory that the Roman abacus was precursor of the Chinese Suan Pan. The Chinese copied the Roman abacus during the trading with the Romans. Then they dismissed it and ignored it for a thousand years until the rise of business and need for faster arithmetic calculation. Abacus is a simple invention that is still used today.

The ancients had fast and powerful computers which they used to power their empires.

# Životopis

Rođena sam 01. lipnja 1986. godine u Osijeku. Osnovnu školu pohađala sam u Ladinircima, gdje i živim s roditeljima i starijim bratom. 2001. godine, nakon završene osnovne škole, upisujem Opću gimnaziju u Valpovu koju završavam 2005. godine. Te iste godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.