Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike i informatike

Lucija Mikulić

Islamska i kineska matematika

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike i informatike

Lucija Mikulić

Islamska i kineska matematika

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

Sadržaj

Uvod

"Kad govorimo o brojevima i matematici,
neosporno je da su nam srednjovjekovni bliskoistočni učenjaci
ostavili u nasljeđe veliko i iznimno vrijedno znanje."
Ehsan Masood

U ovom radu bavit ćemo se dvjema drugačijim kulturama od naše europske koje su ostavile veliki trag na europskim matematičarima, odnosno matematici uopće. Rad je podijeljen na dva dijela.

Prvi dio se bavi islamskom matematikom. Navedeni su neki od najvažnijih tadašnjih matematičara kao što su al-Hvarizmi, Abu Kamil i Tabit ib Quirre, Omar Khayyam te astronomi al-Tusi i al-Karasi.

Drugi dio bavi se kineskom matematikom. Spomenuto je Devet poglavlja matematičkog umijeća drevne ljubavi te neki kasniji matematički radovi u Kini.

Poglavlje 1

Islamska matematika

Neposredan uzrok rasta Arapske moći u sedmom stoljeću jest pojava nove vjere, Islama koja je temeljena na učenjima proroka Muhameda. Ujedinjeni u vjerskom zanosu, pustinjska plemena Arapskog poluotoka susreli su tek nekoliko prepreka dok su se brzo širili po Mediteranu. Povijesni grad Damask pao je u arapske ruke 635. godine, a Jeruzalem 637. Egipat je osvojen između 639. i 642. godine. Napredujući prema zapadu, Arapi su prošli i Gibraltarska vrata 711. godine, krećući se po Španjolskoj i Francuskoj, sve do grada Poitiers. U isto vrijeme, arapske su vojske oborile i drugu stranu, Perziju i Siriju, a čak su došli i do sjeverne Indije. Sto godina nakon Muhamedove smrti, njegovi su sljedbenici bili gospodari carstva upola većeg od nekadašnjeg Rimskog Carstva. Jedino se kršćanska Europa, osim Španjolske, uspijela oduprijeti navali Arapa.

Vladari novog carstva, znani kao "nasljednici", vladali su iz Damaska sve do 762. godine kada su odlučili sagraditi novi glavni grad na obali rijeke Tigris, na mjestu koje je nosilo stari perzijski naziv, Bagdad. Ubrzo je Bagdad postao veliki komercijalni i kulturalni centar sa populacijom od 800000 stanovnika te je u devetom stoljeću postao veći od Konstantinopolisa. Arapski je jezik postao jezik učenja za veliki dio svijeta. Svi Muslimani morali su obavezno znati arapski kako bi znali čitati Kuran.

Intelektualno naslijeđe Grka bilo je najvažnije blago zemlje koja je došla pod arapsku vlast i glavni zadatak arapskog školstva jest upiti novo znanje. U tu svrhu, Caliph al-Ma'mun ustanovio je poznatu Kuću mudrosti koja se mogla usporediti s Aleksandrijskim muzejom i knjižnicom. Da bi se dohvatili grčkih rukopisa, Arapi su se intenzivno i energično trudili. Čak su slali i izaslanike u Konstantinopolis kako bi si osigurali kopiju Euklidovih *"Elemenata"* kod bizantskog cara. Euklidove *"Elemente"* je veliki broj prevoditelja u Kući mudrosti preveo na arapski jezik. Prijevod je bio smješten u knjižnici gdje su ga koristili znanstvenici. Na početku 10. stoljeća, skoro svi grčki znanstveni i filozofski zapisi bili su prevedeni na arapski jezik. Ovo klasično nasljedstvo, zajedno s arapskim preciznim doradama i dodatcima uskoro su zahvatili i latinski zapad.

1.1 Al-Hvarizmi i algebra

Najčuveniji arapski matematičar bio je Muhamed ibn Musa al-Hvarizmi (oko 780. - 850.). Njegov pokrovitelj i prijatelj bio je kalif al-Mamun. Kao sudski astronom, on je bez sumnje bio jedan od prvih znanstvenika povezanih s Kućom mudrosti. Njegov rad se sastoji od vije knjige, od kojih se jedna bavi aritmetikom, a druga algebrom. Upravo se kroz njegov rad, Europa upoznala s Indijskim brojevima i algebarskim pristupom matematici. O njegovom životu se malo zna, no postoji jedna anegdota koja se pojavljuje u nekoliko izvora, a povezuje ga s kasnijim kalifom. Al-Hvarizmi pozvan je kod smrtno bolesnog kalifa kako bi mu izrekao horoskop. Al-Hvarizmi ga je uvjerio kako će živjeti još 50 godina, no nažalost, kalif je umro nakon samo 10 dana.

Al-Hvarizmi je sastavio malu raspravu o aritmetici čiji bi naslov mogli prevesti kao *"Knjiga zbrajanja i oduzimanja prema indijskom računanju"*. To je najraniji rad na arapskom koji objašnjava uporabu indijskog decimalnog sustava. Iako al-Hvarizmi spominje samo "devet slova" (odnosno, simbole za znamenke od 1 do 9) za zapis brojeva, također spominje i nulu:

> "Ako kod oduzimanja ništa ne ostane, stavite mali kružić kako to mjesto ne bi bilo prazno nego da ga kružić zauzme."

No, ne postoji kopija originalne arapske verzije ove knjige. Do nas je došla u latinskom prijevodu Johna od Seville "Algoritmi de numero Indorum" na početku dvanaestog stoljeća. Utjecaj ovog djela na europsko matematičko mišljenje je bilo toliko veliko da su se zbog novog zapisa znamenki, brojevi "zvali" arapskim brojevima, iako potječu iz Indije. 1857. godine kopija latinskog prijevoda nađena je u knjižnici fakulteta Cambridge, a počinje riječima *"Dixit Algoritmi"* ili *"Tako je govorio al-Hvarizmi"*.

Zapadna Europa prvi put je saznala o algebri iz al-Hvarizmijevih djela. Ne čini se vjerojatnim da je njegovo znanje algebarskih thenika poteklo od Diofanta, čija *"Aritmetika"* nije bila prevedena sve do kraja desetog stoljeća. Osim toga, Diofantova algebra bila je skroz drugačijeg karaktera a glavna tema bila je vezana za teoriju brojeva.

Samo ime "algebra" potječe od imena al-Hvarizmijeva djela "$Hisab\ al - j\hat{a}br\ w'al\ muq\hat{a}balah$". Navodno naslov znači znanost ponovnog spajanja i redukcije. Ove riječi se odnose na dvije osnovne računske operacje koje su Arapi koristili u rješavanju jednadžbi. "Ponovno spajanje" se odnosi na premještanje negativnih izraza s jedne strane jednadžbe na drugu, a "redukcija" - istih izraza s iste strane u jedan izraz.

Primjer 1.1.1 *S modernim oznakama, to bi za sljedeću jednadžbu*

$$6x^2 - 4x + 1 = 5x^2 + 3$$

značilo ovo:

Ponovno spajanje

$$6x^2 + 1 = 5x^2 + 4x + 3$$

Redukcija

$$x^2 = 4x + 2$$

U dvanaestom stoljeću, knjiga je prevedena na latinski pod nazivom "Liber Algebrae et Almucabola" koja je naposljetku i dala ime tom djelu matematike koji se bavi rješenjima jednadžbi. Nadalje, al-Hvarizmijev utjecaj također je vidljiv u činjenici da je *algorisam* ili *algorithm*, latinska izvedenica njegova imena, koja je dugo vremena značila umjetnost računanja s indijsko-arapskim brojevima. Danas se naziv algoritam koristi za bilo koju metodu računanja prema nekom skupu ustanovljenih pravila.

Kada govorimo o al-Hvarazmiju, ne smatra se da je on osobno izumitelj algebre, jer ne postoji grana matematike koja je potpuno izrasla kroz rad jednog čovjeka. On je samo predstavnik stare perzijske škole koji je očuvao metode te škole za potomstvo kroz svoje knjige. Ta rana arapska algebra bila je još u primitivnoj retoričkoj fazi koju je karakterizirao nedostatak matematičkih simbola i gdje su računanja objašnjena riječima (čak su se i brojevi pisali radije slovima, nego označavali simbolima). Algebarska pravila postupka su bila predstavljena kao da su božanska otkrića koje je čitatelj mora prihvatiti i slijediti ih kao istinski vjernik. Kad god su razlozi i dokazi dani, oni su prikazani kao geometrijske demonstracije. Čini se da su Arapi, inspirirani Euklidovim *"Elementima"*, vjerovali da bi argument bio uvjeljiv morao biti geometrijski.

Što se tiče kvadratnih jednadžbi. al-Hvarizmi ih je podijelio u tri osnovna tipa:

$$x^2 + ax = b,$$
$$x^2 + b = ax,$$
$$x^2 = ax + b,$$

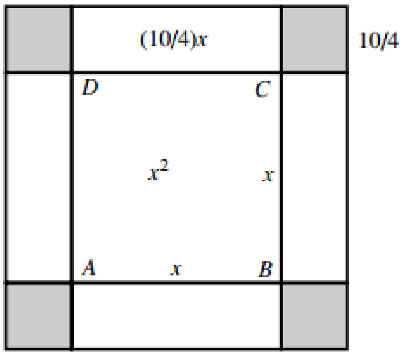
samo s pozitivnim koeficijentima. Tada još arapski matematičari nisu prihavaćali negativne predznake. Svi problemi su reducirani na ova tri standardna oblika, a rješavani su po nekim određenim pravilima.

Al-Hvarizmijeva geometrijska demonstracija točnosti njegovih algebarskih pravila za rješavanje kvadratnih jednadžbi, može se prikazati njegovom raspravom o jednadžbi

$$x^2 + 10x = 39,$$

problemom koji je riješio na dva različita načina. Ova jednadžba se često ponovno pojavljuje u kasnijim arapskim i kršćanskim tekstovima, "kao zlatna nit kroz algebru nekoliko zemalja".

Prvo geometrijsko rješenje objašnjeno je na sljedeći način. Za danu jednadžbu $x^2 + 10x = 39$, konstruiraj kvadrat $ABCD$ sa stranicama x odnosno površine x^2. Sada je potrebno x^2 dodati $10x$, što dobijemo kada $10x$ podijelimo na četiri dijela, a svaki dio predstavlja površinu pravokutnika $\frac{10}{4}x$. Tada dodajemo ta četiri pravokutnika na četiri strane kvadrata.



Na ovaj način se dobije lik koji predstavlja

$$x^2 + 10x = x^2 + 4\frac{10}{4}x.$$

Da bi ovaj lik stao u veći kvadrat sa stranicama $x + \frac{10}{2}$, moraju se dodati 4 mala kvadrata na kutovima od kojih svaki ima površinu jednaku $(\frac{10}{2})^2$. Odnosno, da bi "sastavili" kvadrat, moramo dodati $4(\frac{10}{4})^2 = (\frac{10}{2})^2$. Tada imamo

$$\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = (x^2 + 10x) + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + 25 = 64.$$

Stoga, stranica kvadrata mora biti $x + \frac{10}{2} = 8$, iz koje se dolazi do rješenja da je $x = 3$.

Općenito govoreći, kvadratna jednadžba

$$x^2 + px = q$$

se može riješiti sastavljanjem kvadrata tako što se dodaju 4 kvadrata, svaki površine $(p/4)^2$ obliku koji predstavlja $x^2 + px$ da bi dobili

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + 4(p/4)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

što nas vodi do rješenja

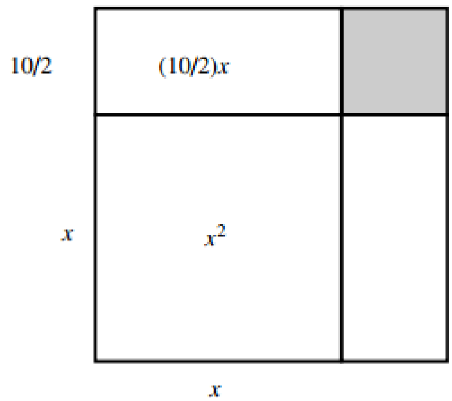
$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Što se tiče al-Hvarizmijeve druge metode rješavanja kvadratne jednadžbe $x^2 + 10x = 39$, početna točka je lik sastavljen od stranice x (i površine x^2) i dva pravokutnika dužine x i širine $\frac{10}{2}$. Kako je površina svakog pravokutnika $x\frac{10}{2}$, površina cijelog lika jednaka je

$$x^2 + 2\frac{10}{2}x.$$

Kako bi od ovog lika dobili kvadrat, potrebno je dodati novi kvadrat površine $(\frac{10}{2})^2$. Površina novog kvadrata jednaka je $(x+\frac{10}{2})^2$ pa slijedi

$$\left(x+\frac{10}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{10}{2}\right)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 64.$$



Tada je stranica kvadrata jednaka $x+\frac{10}{2}=8$, odakle slijedi da je nepoznata vrijednost $x=3$. Rješavajući kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + px = q$$

na ovaj način, zadanom liku dodajemo kvadrat stranice $p/2$ što predstavlja $x^2+2(p/2)x$ te slijedi

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

što nas ponovno vodi do rješenja

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Gledajući rješenje kvadratne jednadžbe, može se vidjeti da je geometrija neosporna ljubavnica u Euklidovim *"Elementima"*, gdje je algebarski sadržaj obučen u geometrijski jezik. No, u al-Hvarizmijevim djelima, vidimo kako geometrijska objašnjenja postaju sporedna u odnosu na nova dominantnija algebarska. Stari, genijalni babilonski trikovi i postupci za rješavanje individualnih problema su napokon viđeni kao dio al-Hvarizmijeve sustavne redukcije kvadratnih jednadžbi na njihove osnovne tipove, sa svakim tipom riješenim po njihovim vlastitim pravilima. Nadalje, u njegovim djelima primjećujemo siguran napredak i evoluciju od drevnih matematičkih postupaka do naprednijih i općenitijih metoda.

Arapski matematičari ovog vremena, osim prenošenja helenističkog učenja na zapad, dali su i svoj vlastiti doprinos. Zapravo su oni preradili i rekonstruirali mnoge osnovne ideje u matematici. Na primjer, Arapi su prepoznali iracionalne korijene kvadratnih jednadžbi, iako su ih Grci zanemarili.

Iako su Arapi prepoznali da kvadratna jednadžba ima dva rješenja, što nisu napravili ni Euklid ni Babilonci, oni su pisali samo pozitivna rješenja. Oni nisu opazili postojanost negativnih rješenja neke jednadžbe. Sama ideja o negativnim rješenjima implicira priznanje negativnim brojevima kao nezavisnim subjektima koji imaju ista svojstva kao pozitivni brojevi. Spoznaja o negativnim brojevima je novijeg datuma, dok su u djelima al-Hvarizmija i ostalih arapskih matematičara negativni brojevi izbjegavani. Postojanost i neospornost negativnih kao i pozitivnih rješenja prvi je potvrdio indijski matematičar Bhaskara (rođen 1114.), a Europljani su ih priznali tek u šesnaestom ili sedamnaestom stoljeću.

1.2 Abu Kamil i Thabit ib Quirre

Abu Kamil (oko 850.-930.), poznat i kao "matematičar iz Egipta", bio je drugi najveći arapski pisac o algebri. O njegovom životu i aktivnostima poznato je samo da je egipatskog porijekla te da je pisao u razdoblju nakon al-Hvarizmija. Njegova *"Knjiga Algebre"*, naslov koji su koristili rani muslimanski matematičari, zapravo je komentar i elaboracija al-Hvarizmijevih djela. Jednim dijelom zbog toga, a drugim dijelom zbog svoje vlastite vrijednosti, knjiga je bila jako poznata u cijelom muslimanskom svijetu. Puno opsežnija rasprava o algebri od al-Hvarizmijeve, Abu Kamilova *"Algebra"* sadrži 69 problema, 19 više od njegova prethodnika.

Abu Kamil navodi netaknute mnoge probleme koje je al-Hvarizmi objasnio. Istovremeno, nije oklijevao dodati duge metode rješavanja onima ranijeg autora. To se može primjetiti u Problemu 8 iz *"Algebre"*.

Primjer 1.2.1 *Podijeli* 10 *na dva dijela tako da kada svaki od dva dijela podijelimo s drugim, njihov zbroj će biti* $4\frac{1}{4}$.

U modernom označavanju, problem se zapravo svodi na rješavanje sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

$$x + y = 10, \ \ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4\frac{1}{4}.$$

Algebarski identitet

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

koristimo kako bi brojnik s desne strane zamjenili s

$$x^2 + y^2 = 4\frac{1}{4}xy.$$

Abu Kamil je prvo riješio ovaj problem uz pomoć al-Hvarizmija. Odnosno, on supstituira $y = 10 - x$ u prethodnu jednadžbu kako bi dobio standardni tip kvadratne jednadžbe

$$6\frac{1}{4}x^2 + 100 = 62\frac{1}{2}x,$$

s rješenjem $x = 2$, a odgovarajuća vrijednost y je 8.

Nakon toga Abu Kamil predstavlja svoju vlastitu metodu koja uključuje stari babilonski postupak uvođenja nove nepoznanice z tako da je

$$x = 5 - z, \quad y = 5 + z.$$

Kada uvrstimo te vrijednosti, jednadžba $x^2 + y^2 = 4\frac{1}{4}xy$ postaje

$$50 + 2z^2 = 4\frac{1}{4}(25 - z^2),$$

što donosi da je $z^2 = 9$. Odatle slijedi da je $z = 3$, odnosno

$$x = 5 - 3 = 2, \quad y = 5 + 3 = 8.$$

Abu Kamil je razvio svojstven račun s korijenima. Kao i u al-Hvarizmijevim djelima, *"Algebra"* je u potpunosti retorička, sa svim izračunima (često vrlo kompliciranima) opisanim riječima. Recimo, pravilo za oduzimanje kvadratnog korijena iz 4 od kvadratnog korijena iz 9 napisano je kao:

> "Ako želiš oduzeti kvadratni korijen iz 4 od kvadratnog korijena iz 9 dok sve što ne ostane od korijena iz 9 jest korijen jednog broja, tada dodaj 9 četvorci da dobiješ 13. Upamti to. Tada pomnoži 9 s 4 da dobiješ 36. Uzmi dva njegova korijena da dobiješ 12. Oduzmi ih od upamćenih 13. Jedan ostatak. Korijen je 1. To je korijen od 9 minus korijen od 4."

To je samo verbalni zapis onoga što bi mi zapisali na sljedeći način

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = \sqrt{9 + 4 - 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 4}} = 1.$$

Velika prednost Abu Kamila nad ranijim piscima jest u njegovoj uporabi iracionalnih koeficijenata u neodređenim jednadžbama što se jasno vidi u Problemu 53 u "Algebri". On pita postoji li broj takav da mu dodamo korijen iz 3 i da mu dodamo korijen iz 2, a da je produkt suma jednak 20. Danas bi to zapisali u obliku

$$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2}) = 20,$$

što vodi do kvadratne jednadžbe

$$x^2 + \sqrt{6} + \sqrt{3x^2} + \sqrt{3x^2} = 20.$$

Abu Kamil daje točnu vrijednost

$$x = \sqrt{21\frac{1}{4} - \sqrt{6} + \sqrt{1\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

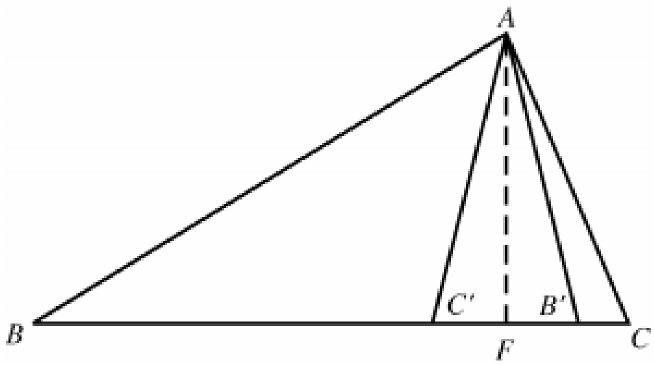
Uvod u iracionalna rješenja još je jedan korak dalje od al-Hvarizmija. Abu Kamilova "Algebra" je zaslužna za razvoj matematike na zapadu kroz utjecaj djela Talijana Leonarda iz Pise, poznatijeg kao Fibonacci, koji je u svom djelu "Liber Abaci" objavio 29 problema iz "Algebre" s malo ili nimalo promjena. Iako je Fibonacci posudio Abu Kamilovo znanje, ne smijemo ga gledati kao plagijatora jer su u to vrijeme Abu Kamilove metode bile dobro poznate i svaki se matematičar mogao slobodno koristiti njegovim rezultatima.

Još jedan istaknuti znanstvenik u ranoj povijesti arapske matematike jest Tabit ibn Qurra (oko 836.-901.). On je bio matematičar raznolikog talenta i dostignuća, istaknuti fizičar, vješti prevoditelj te plodan autor s više od 150 radova. Preveo je mnoga grčka matematička djela sljedećih autora: Apolonija, Nikomaha, Arhimeda i Euklida.

Tabit je dao i svoj doprinos geometriji. Generalizirao je Pitagorin teorem da se može primjeniti na bilo koji trokut. Pretpostavimo da od vrha A trokuta ABC povlačimo dva pravca koji sijeku BC u točkama B' i C' tako da su i $\angle AC'B'$ i $\angle AB'C'$ jednaki $\angle A$. Tada, prema Tabitu slijedi

$$AB^2 + AC^2 = (BC)(BB' + CC').$$

Ovo nije bilo potkrijepljeno dokazom, već je samo obrađeno uz pomoć Euklidovih "Elemenata". Osnova ovog rješenja jest kosinusov poučak.



Kako je $\angle A = \angle C' = \angle B'$, slijedi da je

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 + 2(AB)(AC)(\cos A) \\ &= BC^2 + 2(AB)(AC)(\cos C' + \cos B') \\ &= BC^2 + 2(AB)(AC)\left(\frac{FC'}{AC'} + \frac{FB'}{AB'}\right) \\ &= BC^2 + 2(AB)(AC)\left(\frac{FC' + FB'}{AB'}\right). \end{aligned}$$

Sada zbog sličnosti trokuta ABC i trokuta $AB'B$, imamo da je $AB/AB' = BC/AC$ te slijedi

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 + (BC)(FC' + FB') \\ &= (BC)(BC + C'B') = (BC)(BB' + CC'). \end{aligned}$$

1.3 Omar Khayyam

Tijekom druge polovine 11. stoljeća, jedna agresivna nova snaga je prodrijela u Perziju. Moslem Seljuk Turk osvaja Bagdad 1055. prekidajući točku na kraj političkoj dominaciji kalifa nad istočnim provincijama carstva. Pod pritiskom pravoslavnih Turaka, Bagdad je postupno izbrisan kao važno intelektualno središte; ali naučavanje je i dalje cvalo u zapadnom dijelu kalifa, u gradovima kao što su bili Cordova, Toledo i Sevilla.

Jedan od znanstvenika koji je ostao u Bagdadu poznatiji je više van islamskog svijeta zbog svoje poezije nego zbog matematičkih dostignuca. Njegovo ime je Umar al-Khayyami poznat i kao Omar Khayyam (1048. – 1123.). Djelo *"Rubaiyat"*, u kojem on hvali užitak osjetila, bilo je izdano u tisuće primjeraka. Njegovo najutjecajnije matematičko djelo, u punom nazivu *"Treatise on Demonstration of Problems if al-Jabra and al-Muqabalah"*, znatno je utjecalo na napredak algebre. Dok se al-Khowarzi bavio linearnim i kvadratnim jednadžbama, Khayyam je osmislio rješenje za različite geometrijske oblike metodom presijecanja konusnih dijelova. Također je sastavio *"Commentaries on the Difficulties in the Premise of Euclid's Book"*. Khayyam prihvaća istinu o Euklidovu 5. postulatu, ali ga je smatrao manje očitim od mnogih propozicija koje su tražile dokaz. On je pokušavao izvući postulat paralela iz nečega za što je on osjećao da je intuitivnije načelo nego samo da se konvergentne linije sijeku

Uspostavljanjem naprednih opservatorija, poput onog u Bagdadu (829.), i priljevom grčkih astronomskih tekstova, stimuliran je i interes arapskih matematičara za astronomiju. Oko 1079. godine pozvan je da namjesti perzijski kalendar tako da bi se gozbe i postovi mogli održavati u poželjno vrijeme. Rezultat je bio izvanredan, a poznat je i kao Jalalian kalendar, koji je toliko precizan da zahtjeva korekciju od jednog dana svakih 5000 godina. Naš gregorijanski kalendar zahtjeva korekciju od jednog dana svakih 3330 godina. Nakon nekoliko njegovih uspjeha u znanstvenom području, Khayyam se okrece poeziji i filozofiji.

Khayyam je tvrdio da je bio prvi matematičar koji je mogao riješiti bilo koji tip kubne jednadžbe s pozitivnim rješenjem. Pošto on nije prepoznavao negativne brojeve kao koeficijente, bilo je neophodno uzeti u obzir 14 različitih tipova kubnih jednadžbi koji ne mogu biti reducirani na linearne ili kvdratne jendnadžbe dijeljenjem s x ili x^2. U svakom slučaju dana je geometrijska demonstracijia rješenja. Predocimo Khayyamov postupak za jednadžbu $x^3 + qx = r$, koju on zapisuje kao

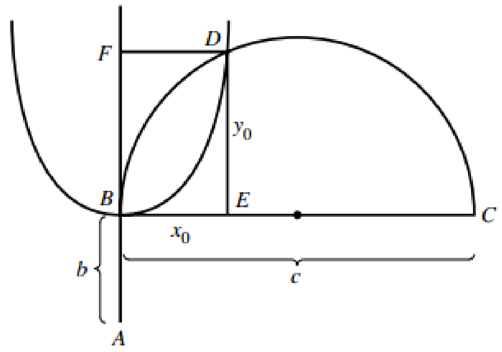
$$x^3 + b^2x = b^2c.$$

Khayyam označava dio pravca AB dužinom b. Okomica BC duljine c je povučena do AB. Zatim on konstruira parabolu s tjemenom B, osi BF i parametrom b. Zapisano modernim oznakama, parabola ima jednadžbu $x^2 = by$. Nadalje, BC je polumjer nad kojim je opisana polukružnica. Njena jednadžba je

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

ili

$$x(x - c) + y^2 = 0.$$



Polukružnica će sjeći parabolu u točki D čija x-os daje rješenje danog kuba. Geometrijski, rješenje je predstavljeno segmentom pravca BE gdje je E određena spuštajući okomicu od D do BC.

Algebarski, neka su (x_0, y_0) koordinate točke D. Kako D leži na paraboli, vrijedi $x_0^2 = by_0$ što implicira da je $x_0^4 = b^2y_0^2$. No, D leži i na polukružnici, stoga $y_0^2 = x_0(c - x_0)$. Kombinirajući ove jednadžbe, slijedi

$$x_0^4 = b^2y_0^2 = b^2x_0(c - x_0),$$

ili $x_0^3 = b^2(c - x_0)$. Tako x_0 zadovoljava kubnu jednadžbu $x^3 + b^2x = b^2c$.

1.4 Astronomi al-Tusi i al-Karasi

Pažljivo promatranje neba bio je glavni fokus islamske matematičke aktivnosti, dijelom zbog istinskog znanstvenog zanimanja, ali u većem dijelu radi reguliranja vjerskih običaja. Vrijeme u danu kad se prakticirala molitva, određivalo se prema smjeru i visini sunca (izlazak sunca, podne, poslijepodne, zalazak sunca i večer). Osim toga, arapski lunarni kalendar sastojao se od 12 mjeseci u godini – oko 11 dana kraće od solarne godine – a početak svakog mjeseca označavalo je kada bi se polumjesec mlađaka pojavio na večernjem nebu. Točno određivanje tih astronomski definiranih događaja zahtijevalo je razvoj i preciznost tablica za praćenje vremena. Kalif al-Mamun, koji se i osobno zanimao za znanost, osnovao je i zvjezdarnicu u Damasku, nakon koje je uslijedila još raskošnija u Bagdadu 829. godine Niz astronoma koji su dijelili svoje oduševljenje astronomijom, kao što su al-Khowarizmi i ibn Qurra, provodili su ondje vrijeme ispravljajući pogreške i nedosljednosti u Ptolemejevom planetarnom sustavu. Al-Mamunovi astronomi su tako ispravili i izmijenili astronomske tablice na način da su u isto vrijeme koristili opažanja iz Damaska i Bagdada. U konačnici su njihove tabele zamijenile Ptolemejeve.

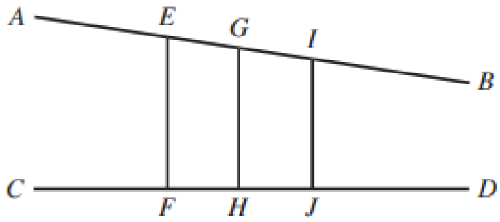
Tijekom sljedećih nekoliko stoljeća, astronomija arapskog poluotoka prošla je razdoblja nazadovanja, ali i ponovne obnove. Mnoge zvjezdarnice imale su tek kratak životni vijek, često nestajući sa smrću onih koji su vodili brigu o njima ili zbog neprijateljstva od strane vjerskih tijela. Zvjezdarnice su doživjele svoju renesansu tijekom trinaestog i petnaestog stoljeća kad su izgrađene dvije glavne zvjezdarnice islamskog svijeta.

Matematičar i astronom Nasir al-Dinal-Tusi (1201. − 1274.) svoje je najplodnije doba doživio sredinom trinaestog stoljeća tijekom jednog od najburnijih razdoblja u islamskoj povijesti. Početkom stoljeća, mongolski osvajač Džingis kan poharao središnju Aziju i istočnu Europu. Nakon njegove smrti 1227., njegova prostrana oblast podijeljena je između njegovih sinova i unuka. Jedan od unuka, Hulagu kan, postaje zaslužan za gušenje ustanka u središnjoj Perziji. Al-Tusi, koji je do sredine stoljeća slovio za uglednog znanstvenika, potražio je utočište u planinskoj utvrdi vođe prezrene skupine plaćenih ubojica – asasina. Vjerojatno je vjerovao da mu oni jedini mogu ponuditi zaštitu od nadolazeće horde Mongola. Mnogi vjeruju da je al-Tust bio pravi oportunist: kad je utvrda pala pod Hulagovu vlast, izdao je svoje zaštitnike. Hulagu je 1258. opustošio Bagdad i tako zauvijek stao na kraj vladavini kalifa. Tada je udario na Damask koji je osvojio 1260.

Nakon pada Bagdada, al-Tusi mijenja svoju odanost i postaje Hulagov znanstveni savjetnik. Duboko zanimanje novog vladara za astrologiju potaknulo ga je na izgradnju veličanstvene zvjezdarnice u Maraghi (današnji sjeverozapadni Iran) čiji temelji postoje i danas. Najčuveniji astronomi, čak i oni iz daleke Španjolske ili Kine, bili su pozvani da rade u zvjezdarnici pod al-Tusijevim vodstvom. Oruđa koja su se mogla pronaći u zvjezdarnici izdvajala su se svojom veličinom i kvalitetom. Najveći uspjeh, koji je bio rezultat dvanaestogodišnjeg promatranja i mjerenja, bio je komplet iznimno preciznih astronomskih tabela. Astronomi u Maraghi su razvili i teoriju gibanja planeta neovisnu o Ptolemejevoj teoriji. Ona je matematički bila sličnija velikim Kopernikovim djelima koja će tek uslijediti. Tri godine kasnije (1274.), al-Tusi je umro na putu za Bagdad. Njegova smrt je označila kraj kreativnog razdoblja Maraghe, iako su se astronomska opažanja nastavila i kroz sljedeće stoljeće.

Iako je al-Tusi najpoznatiji po svojim brojnim djelima s područja astronomije, on je bio znanstvenik izuzetno širokog obrazovanja koji se okušao u mnogim djelatnostima. Stvarao je razne rasprave o temama kao što su logika, psihologija, etika, aritmetika i trigonometrija. Autor je i uvelike poboljšanog prijevoda Euklidovih *"Elemenata"*, Apolonijevih *"Konika"* i Ptolemejevog *"Almagest"*. Al-Tusi nije slijepo slijedio Ptolemejev rad, već je dovodio u pitanje ispravnost teorije unutarnje putanje kruga uz obrazloženje da ne opisuje dovoljno dobro kretanje planeta oko središta svoje orbite. U geometriji je nastojao dokazati Euklidov Peti postulat koristeći sljedeću tvrdnju: Ako promotrimo dva pravca (AB i CD) nad kojima su spuštene uzastopne okomice EF, GH i IJ konstruirane od CD prema AB pod nejednakim šiljastim kutom na strani prema točki B. Ako se AB i CD ne dodiruju u smjeru B i D, okomica IJ će uvijek rasti kraća nego GH dok će EF uvijek rasti.

Otprilike stoljeće i pol nakon gradnje zvjezdarnice u Maraghi, dogodilo se kratko oživljavanje astronomske djelatnosti, ponovno pod pokroviteljstvom unuka osvajača, Tamerlanea koji je vukao mongolsko porijeklo od Džingis kana te je vladao širokom regijom u Maloj Aziji koja se protezala od Perzije do zapadne Indije. Njegovo sjedište bilo je smješteno u Samarkandu, u današnjem Uzbekistanu. Grad je postao središte znanosti sve do kasnih godina šesnaestog stoljeća. Tu je Tamerlaneov unuk Ulugh beg (1347. − 1449.), koji je i sam bio astronom i zagovornik učenja osnovao zvjezdarnicu 1420. godine. Trokatna građevina bila je opremljena najboljim instrumentima koji je



Slika 1.1: Dokaz Euklidovog Petog postulata

povijest poznavala. Pored nje je bio divovski sekstant koji je velikom preciznošću mogao mjeriti visine nebeskih tijela.

Perzijski matematičar Ghiyat al-Din al-Kashi doveden je u Samarkand da preuzme vodstvo u novoj zvjezdarnici. Pod njegovim vodstvom, bilo je to više od mjesta u kojem se izučavala ne samo astronomija, nego i ostale grane znanosti. Al-Kashijevi osobni napori bili su većinom usmjereni prema stvaranju točnijih tabela i tangenata za svaki stupanj pod lukom. Proučavao je i kretanja sunca i mjeseca. Napravio je i ponovni izračun zviježđa baziranog na novijim opažanjima kako bi dao precizniji položaj za više od tisuću zvijezda. Svoje djelo *"Ključ računanja"* koji se bavio aritmetikom, algebrom i mjerenjem posvetio je Ulugh begu.

U jednom od svojih djela iznio je i teoriju korištenja decimala u kojem je

$$\pi = 3.14159265358979324$$

te se sastoji od 16 decimala što se koristilo sve do šesnaestog stoljeća kad je Nizozemac Ludolph Van Ceulen prikazao 35 decimala.

Nakon trinaestog stoljeća, znanstveno traganje počelo je nestajati iz arapskog svijeta. Novi znanstvenici više su se usredotočili na religijska, filozofska ili pravna izučavanja. Njihovi zagovornici postali su sumnjičavi prema 'stranim znanostima' čije su doprinose smatrali beskorisnima. Ulugh beg je ubijen 1449., a s njegovom smrću težnja za novim otkrićima je izgubila i posljednjeg velikog zaštitnika. Početkom sljedećeg stoljeća, njegova zvjezdarnica je postala ruševina od strane vjerskih fanatika, a njegovi sljedbenici su pobjegli spašavajući vlastite živote. Stvarni položaj zvjezdarnice ostaje nepoznat sve do 1908. Izravna posljedica ovih znanstvenih otkrića bio je znanstveni proboj kroz koji je prošla zapadna Europa u šesnaestom i sedamnaestom stoljeću. Međutim, slična znanstvena renesansa nije pronašla svoj put do islamskog svijeta u istom razdoblju.

Poglavlje 2

Kineska matematika

O matematici drevne Kine ne zna se mnogo jer nije sačuvano puno pisanih dokumenata. Kako su Kinezi imali razrađen kalendar još u 3. tisućljeću prije naše ere, pretpostavlja se da otada sežu počeci astronomije i matematike. Poznato je da su se kineski matematičari bavili matematikom na temelju konkretnih problema kao što su oni vezani za kalendar, trgovinu, zemljomjerstvo, poreze, arhitekturu. Kineska matematika se temelji na nalaženju algoritama za računanje i rješavanje knkretnih zadataka. Velik broj kineskih matematičkih dostignuća opisani su u nekoliko starih važnih knjiga.

2.1 *Devet poglavlja matematičkog umijeća* drevne Kine

Jedan od najstarijih kineskih matematičkih tekstova jest Devet poglavlja matematičkog umijeća, odnosno Aritmetika u devet knjiga. Original ovog djela uništeno za vrijeme "paljenja knjiga". Na njoj je radila grupa autora i ona je poslužila kao osnova daljnjeg razvijanja kineske matematike. U knjizi se nalazi 246 zadataka koji su i rješeni i objašnjeni. U svakom od devet poglavlja raspravlja se od jednom matematičkom problemu:

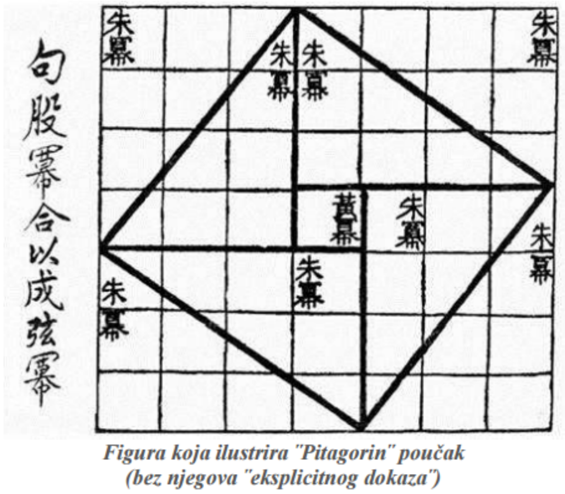
1. daje se postupak izračunavanja površine trokuta, četverokuta, kruga, kružnog odsječka i isječka. Obrađuju se i razlomci; dane su korektne metode za njihovo zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje,

2. obrađuju se omjeri i kamatni račun,

3. govori se o produženim omjerima i razmjerima,

4. obrađuje se vađenje drugog i trećeg korijena, te približni proračun opsega kruga dane površine i promjera kugle danog obujma,

5. uči se kako se računa obujam prizme, piramide, valjka, stošca, prikraćene (krnje) piramide i stošca,



Slika 2.1: Ilustracija Pitagorina poučka

6. obrađuje se ono što bismo zvali računom smjese,
7. obrađuju se problemi sustava od dviju jednadžbi s dvije nepoznanice,
8. ispituju se problemi što vode na sustav od više linearnih jednadžbi s više nepoznanica,
9. rješava se pravokutni trokut pomoću "Pitagorina" poučka i neki oblici kvadratne jednadžbe.

U "Devet poglavlja" možemo naći neke od sljedećih zadataka:

- Više ljudi kupuje zajedno ovcu. Ako svaki dade 5 novčića, nedostaje 45 za cijenu ovce, a ako svaki dade 7, nedostaje 3. Koliko ljudi imamo i koja je cijena ovce?
- Kasač i stara raga idu od Chanana u kneževinu Tsi, udaljenost je 3000 jedinica duljine. prvi dan kasač prijeđe 193 jedinice, a svaki idući po 13 više. Raga prvi dan prijeđe 97 jedinica i svaki sljedeći dan po pol jedinice manje. Kasač prvi stiže u Tsi, okreće se i vraća te negdje usput sreće ragu. Nakon koliko dana su se sreli i koliko je koji prešao do tog susreta?
- Imamo tri vrste žita. Tri svežnja prvog, dva drugog i jedan trećeg daju 39 mjera žita. Dva prvog, tri drugog i jedan trećeg daju 34 mjere. Jedan prvog, dva drugog i tri trećeg daju pak 26 mjera. Koliko je mjera žita sadržano u svežnju svake pojedine vrste?
- Pet obitelji zajedno posjeduju bunar. Da bi se dosegnula površina vode u njemu potrebna su dva konopa familije A i jedan konop familije B, ili tri konopa familije A i jedan konop familije B, ili četiri konopa familije C i jedan konop familije D, ili pet konopa familije D i jedan konop familije E, ili šest konopa familije E i jedan konop familije A. Koliko je dubok bunar (do površine vode) i koliko su dugi konopi koje obitelji? Pretpostavlja se da su sve duljine cijeli brojevi.

2.2 Kasniji matematički radovi u Kini

Trinaesto stoljeće slovi kao vrhunac u razvoju tradicionalne matematike u Kini. Bilo je to vrijeme snažnog rasta iste, kada je bogatstvo izvornih ideja doživjelo procvat, samo da bi jednako brzo palo u zaborav. Najistaknutiji matematičari nisu nužno bili vladini dužnosnici, već u većini slučajeva putujući učitelji i samotni znanstvenici. Slobodni od birokratskih ograničenja, uzdigli su se iznad granica praktične primjene sve do novih razina apstraktnih radova. Iznenađujuće, ovo matematičko buđenje procvjetalo je u razdoblju velikih nemira u Kineskom Carstvu. U ranom trinaestom stoljeću, Kina je doživjela prve prodore na svoj teritorij od strane vojske Džingis kana koji je 1279. pokorio cijelu zemlju. Mongoli su proširili svoju moć u svim smjerovima – od obala rijeke Ind sve do Bagdada. Čak su prodrli i na zapad do dijelova Mađarske i Poljske tako stvarajući ogromno carstvo kakvomu svijet dotad još nije svjedočio.

Jedna od istaknutijih ličnosti tog doba bio je Ch'in Chu-shao (oko 1202. – 1261.), koji je objavio svoju čuvenu Matematičku raspravu u devet svezaka 1247. U predgovoru djela on pripovijeda kako je naučio matematiku od izvjesnog putujućeg matematičara, iako ne navodi njegovo ime. Vojnik u mladosti, Ch'in napreduje u činovništvu i postaje guvernerom dviju provincija. Poznat kao ne pretjerano ugodna osoba, pratila ga je reputacija trovanja onih koji se nisu slagali s njim, bio je smijenjen kao guverner jedne od provincija zbog mita i korupcije.

Pojam negativnih brojeva bio je poznat kineskim autorima puno ranije od 15. stoljeća kad su isti prihvaćeni u Europi. Koristeći poznate boje, Ch'in je započeo običaj ispisa negativnih brojeva u crnoj, odnosno pozitivnih u crvenoj boji. Ne samo da je Devet svezaka najstariji postojeći kineski spis koji označava nulu kao okrugli simbol, već je i prvi u kojem se pojavljuju numeričke jednadžbe više od trećeg stupnja.
To je prikazano jednadžbom

$$-x^4 + 736200x^2 - 40642560000 = 0.$$

Kao i kod svih Ch'inovih jednadžbi konstanta ima negativnu vrijednost.

Ostali kineski matematičari trinaestog stoljeća, koji su bez sumnje bili pod utjecajem nagrađivane zbirke Devet poglavlja matematičke umjetnosti davali su prednost algebri nad geometrijom koristeći pitoreskne geometrijske slučajeve kao sredstva za izvođenje više složenijih jednadžbi. Pažnja je bila usmjerena na pozitivne korijene, vjerojatno iz razloga što su kineske jednadžbe uvijek nastajale iz konkretnih slučajeva.

Primjer 2.2.1 (Primjer iz Devet poglavlja) *Prikazan je kružno utvrđen grad nepoznatog promjera koji ima četiri ulaza. Drvo se nalazi* 3 *li*[1] *istočno od sjevernog ulaza. Ako se hoda* 9 *li istočno od sjevernih vrata, drvo biva jedva vidljivo. Odredi promjer grada.*

Uzimajući u obzir da je x^2 *promjer grada, Ch'in dolazi do jednadžbe desetog stupnja*

$$x^10 + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 11664x^2 - 34992 = 0.$$

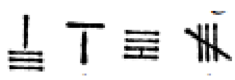
[1] mjerna jedinica za duljinu

Nepoznati promjer je utvrđen kao 9 li.

Među ostalim istaknutim autorima u ovoga doba bio je i Li Ye (1192. – 1279.). On je nakon polaganja državnog ispita 1230. imenovan guvernerom grada u sjevernoj Kini. Ali kad je provincija pala pod mongolskom najezdom 1234., Li Ye odustaje od svojih ambicija službenih dužnosti i posvetio se studiju matematike. Rezultat ovoga bilo je njegovo poznato djelo *"More ogledala mjerenja kruga"*, koje je napisano 1248. nakon kojeg slijedi *"Proširena stara matematika"* iz 1259. Kad je veliki Kublaj kan, unuk Džingis kana, zasjeo 1260. na prijestolje Li Ye je izabran u službu kao savjetnik vlade, ali je podnio ostavku unutar godinu dana pod izgovorom starosti i lošeg zdravlja.

"Proširena stara matematika" je prerađeno izdanje s dodatnim objašnjenjima djela iz jedanaestog stoljeća *"Kolekcija stare matematike"* koja je i sama zbirka ranijih radova. Središnja tema 64 problema iz djela je konstrukcija kvadratnih jednadžbi izvedenih iz zamišljenih geometrijskih konstrukcija kruga, kvadrata, pravokutnika i trapeza.

Još jedan od Li Yevih doprinosa kineskom označavanju u matematici jest oznaka za negativne količine tako što bi povukao dijagonalni povez kroz zadnju znamenku zadanoga broja. Tako bi se -8643 zapisivao na sljedeći način: Ovo je napredak u odnosu



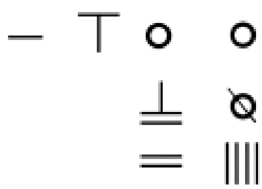
Slika 2.2: Zapis broja -8643

na prijašnje korištenje crvene i crne boje te je ovaj način zapisivanja negativnih brojeva postao prihvaćen u pisanim radovima. Kada bi izražavao polinom, Li Ye je koeficijente pisao u horizontalne stupce, stavljajući vodeći koeficijent na vrh, a ostale ispod.

Primjer 2.2.2 *Zapis kvadratne jednadžbe*

$$24x^2 - 70x + 1600 = 0$$

bi izgledao ovako:



Ovaj sistem pisanja u stupce bilo je izlaganje na papiru rasporeda šipki na ploči za računanje gdje se računanje zapravo odvijalo.

Posljedni značajan matematičar 13. stoljeća, Chu Shih-chieh (1280. – 1303.) napisao je dvije rasprave: *"Uvod u matematičke studije"* 1299. godine te četiri godine kasnije *"Dragocjeno ogledalo četiri elementa"*. O njegovom životu se ne zna puno, ali iz predgovora njegova drugog djela rasaznaje se da je puno putovao u Kinu i to više od dvadeset godina, najvjerojatnije zarađujući za život kao učitelj matematike. Njegovo djelo *"Uvod u matematičke studije"* je zapravo udžbenik za početnike. Jedno vrijeme je bio izgubljen u Kini, no onda se ponovno pojavio u Koreji 1433. godine, a onda još kasnije (1658. godine) Japanu, gdje je ovaj udžbenik uvelike utjecao na razvoj japanske matematike.

"Dragocjeno ogledalo četiri elementa" počinje s dijagramom koji pokazuje binomne koeficijente izraza

$$(x+1)^8.$$

Ovaj trokutasti zapis kasnije će postati poznat na zapadu kao Pascalov trokut, upravo naziv koji i danas koristimo. Kao i njegovi prethodnici, Chu Shih-chieh bavi se numeričkim jednadžbama višeg stupnja, čak i do četrnaestog stupnja. Mnoge takve jednadžbe su riješene postupkom koje je ponovno otkrio William Horner 1819. godine te je danas taj postupak poznat kao Hornerov postupak ili Hornerova metoda.

U ovom radu raspravljalo se i o sljedećim nizovima:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$1+4+10+20+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24},$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Kineski je običaj bio pokazati znanje bez opravdanja, stoga nisu dani dokazi ovih pravila.

Bibliografija

[1] D. M. Burton, *The History of Mathematcis: An introduction 6th Edition*, 6. izdanje, McGraw-Hill, Primis Online, 2005.

[2] Ž. Zorić, *Matematika drevne Kine*, predavanja, PMF, Split, 2015., dostupno na http://www.pmfst.unist.hr/ zzoric/POVIJEST

Sažetak

U ovom radu pokušat ćemo nešto ukratko reći o islamskoj i kineskoj matematici. Prvo ćemo se baviti islamskom matematikom i nekim od najistaknutijih imena islamske matematike. Zatim ćemo reći nekoliko crtica o kineskoj matematici te o najvažnijim djelima kineskih matematičara.

Summary

In this work we will briefly try to say something about islamic and chines mathematics. First, we will say something about islamic mathematics and something about some of the most prominent names of islamic mathematics. Then we will say something about chinese mathematics and something about most important chinese mathematical works.

Životopis

Rođena sam 09.01.1988. godine u Županji. Trenutno živim u Osijeku, a pohađala sam osnovnu školu "Mate Lovrak" u Županji i to 1994.-2002. U Županji sam završila i Opću gimnaziju, 2002.-2006. Iste godine sam upisala Odjel za matematiku u Osijeku, sveučilišni nastavnički smjer matematike i informatike. Trenutno sam zaposlena u T-comu kao agent na Odjelu za upravljanjem korisničkim pritužbama.