Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tomislav Milanović

Preslikavanja ravnine i prostora i primjene

Diplomski rad

Osijek, 2010.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tomislav Milanović

Preslikavanja ravnine i prostora i primjene

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2010.

Sadržaj

UVOD

Aritmetika daje važnost brojevima, algebra rješavanju jednadžbi, dok geometrija objašnjava osobine i odnose figura u ravnini i prostoru. Cilj diplomskog rada je istražiti preslikavanja ravnine i prostora te pokazati njihovu primjenu. Diplomski rad podijeljen je u četiri poglavlja.

Činjenica da su dva trokuta sukladna znači da su parovi odgovarajućih kutova jednake veličine i parovi odgovarajućih stranica jednake duljine. Dakle, riječ je o šest parova elemenata. No, da bismo zaključili jesu li neka dva trokuta sukladna ili nisu dovoljno je promotriti tri para prikladno odabranih elemenata o čemu govore poučci o sukladnosti trokuta obrađeni u prvom poglavlju. Također, uz sukladnost su usko povezane transformacije ravnine koja se nazivaju izometrijama. U prvom su poglavlju obrađene sljedeće transformacije ravnine: osna simetrija, rotacija, centralna simetrija, translacija i klizna simetrija.

U geometriji često se susreće pojam sličnosti. Geometrijski su likovi slični ako imaju isti oblik, ali ne nužno i istu veličinu. Ako želimo provjeriti jesu li neke figure slične potrebno je provjeriti jednakost svih odgovarajućih kutova i proporcionalnost svih odgovarajućih stranica o čemu će biti riječi u drugom poglavlju. U ovom se poglavlju upoznajemo i s preslikavanjem koje se intenzivno počelo proučavati oko 1830. godine, riječ je o inverziji obzirom na izabranu kružnicu u ravnini. Inverzija će pravce u određenoj situaciji preslikati na pravce, a u nekom drugom slučaju u kružnice i zbog toga je ova metoda vrlo efikasna pri rješavanju geometrijskih problema.

U trećem su poglavlju obrađena preslikavanja prostora i izometrije prostora. Dakle, izometrije ravnine i preslikavanja sličnosti iz prva dva poglavlja poopćena su na prostor.

Četvrto poglavlje se bazira na primjenama preslikavanja pri rješavanju zadataka.

1. Sukladnost trokuta i izometrije ravnine

Za početak prisjetimo se definicije trokuta. Definiciju navodimo prema [4].

Definicija 1.1. *Figura u ravnini koja se sastoji od tri nekolinearne točke A, B, C i tri spojne dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ tih točaka zove se trokut. Točke A, B, C su vrhovi trokuta, a spojne dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ stranice trokuta.*

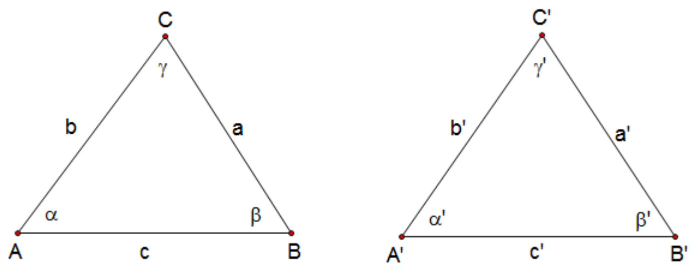
1.1. Sukladnost trokuta

Prema [2] navodi se sljedeća definicija:

Definicija 1.2. *Za dva se trokuta, ABC i $A'B'C'$ kaže da su sukladni (kongruentni) ako im se vrhovi A, B, C i A', B', C' mogu tako označiti da vrijedi:*

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|, |BC| = |B'C'| \tag{1}$$

$$\angle ABC = \angle A'B'C', \angle BCA = \angle B'C'A', \angle CAB = \angle C'A'B'.$$



Slika 1. *Sukladnost trokuta*

Za dva sukladna trokuta koristi se sljedeća oznaka: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
Može se reći, da su trokuti sukladni ukoliko se gibanjem mogu dovesti u takav položaj, da se oni u svim dijelovima posve pokriju.
Ukoliko se promatraju sukladni trokuti lako je uočiti da su im u parovima stranice jednake, te također da su im kutovi u parovima jednaki.

Po dvije jednake stranice i po dva jednaka kuta koji se kod dva sukladna trokuta mogu pokriti zovu se homologne stranice i homologni kutovi. Lako je zaključiti da su u sukladnim trokutima homologne stranice jednake duljine, a homologni kutovi su jednake veličine.

Postavlja se pitanje, koliko je od šest navedenih jednakosti iz Definicije 1.2 potrebno

da bi dva trokuta bila sukladna?
Odgovor na to pitanje je jednostavan. Za sukladnost je potrebno ispuniti tri od šest jednakosti i to ne bilo koje tri, već one tri o kojima govore četiri poznata poučka o sukladnosti trokuta.

Za trokut ABC neka vrijedi sljedeće: $|AB| = c$, $|AC| = b$ te $|BC| = a$. Isto tako, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ te $\angle BCA = \gamma$.

Poučak 1.1. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice, tj.*

$$|AB| = |A'B'|,$$

$$|AC| = |A'C'|,$$

$$|BC| = |B'C'|$$

Dokaz
Neka su zadani trokuti ABC i $A'B'C'$ tako da vrijedi: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Treba pokazati da su im i pripadni kutovi jednaki, tj. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$. Iz definicije sukladnosti lako se vidi kako je uvijek moguće trokut $A'B'C'$ položiti na ABC tako da vrh A' padne u A, vrh B' padne u B, a vrh C' padne u C. Na taj način očito se kut α preslikava na α', β na β' i γ na γ'. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ □

Poučak 1.2. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između te dvije stranice, tj.*

$$|AB| = |A'B'|,$$

$$|AC| = |A'C'|$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

Dokaz
Pretpostavi li se da za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$b = b', c = c', \alpha = \alpha'$$

tvrdi se da je tada i $a = a'$ te $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$ tj. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
Položi li se trokut $A'B'C'$ na trokut ABC tako da vrh A' padne u A, a B' padne u B, onda stranica $|A'C'| = b'$ zbog jednakosti kuteva α i α' padne na stranicu $|AC| = b$. Kako je $|A'C'| = |AC|$, tada vrh C' padne u vrh C. Budući se dva homologna vrha trokuta $A'B'C'$ i ABC pokrivaju, tada se pokrivaju i dvije homologne stranice. Dakle, trokuti su sukladni. □

Poučak 1.3. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu, tj.*

$$|AB| = |A'B'|,$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

$$\angle CBA = \angle C'B'A'$$

Dokaz

Pretpostavili se da za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$c = c', \alpha = \alpha', \beta = \beta'$$

tada se tvrdi da je i $\gamma = \gamma'$ te $a = a'$ i $b = b'$ tj. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
Položi li se trokut $A'B'C'$ na trokut ABC tako da vrh A' padne u A, a B' padne u B, budući je $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$ onda stranice $|A'C'| = b'$ i $|B'C'| = a'$ moraju pasti na stranice $|AC| = b$ tj. $|BC| = a$. Pravci na kojima leže stranice $|A'C'|$ i $|B'C|$ mogu se sjeći samo u jednoj točki, odnosno vrhu C'. Taj uvjet zahtijeva da vrh C' padne u vrh C. Trokut $A'B'C'$ potpuno je prekrio trokut ABC što pokazuje da su trokuti sukladni i da je gornja tvrdnja opravdana. □

Poučak 1.4. *Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici, tj.*

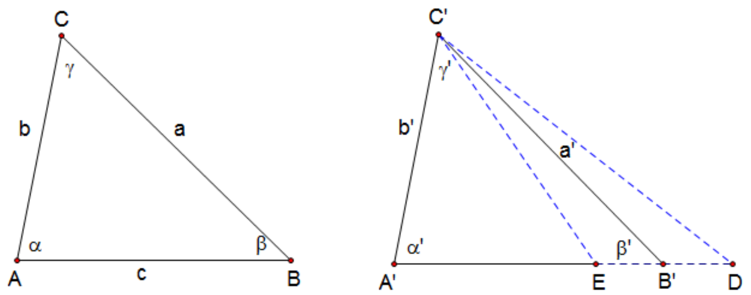
$$|BC| = |B'C'|,$$

$$|AC| = |A'C'|$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

uz uvjet $|BC| > |AC|$.

Dokaz

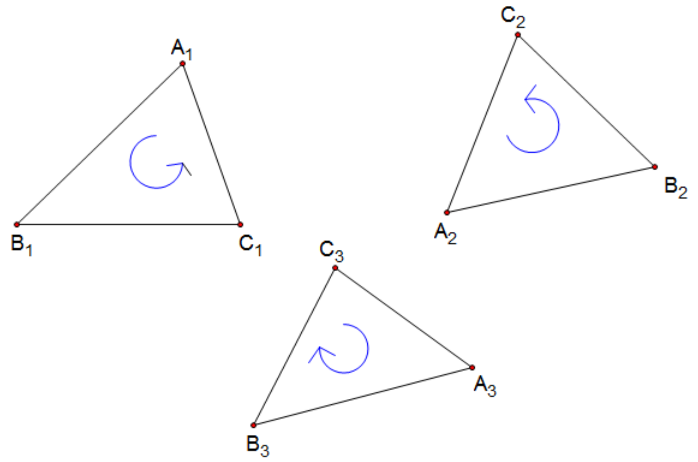


Slika 2. $S - S - K^{>}$

Neka je $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $\alpha = \alpha'$. Ukoliko trokut $A'B'C'$ položimo na trokut ABC, tako da se prekrije manji par stranice koje su jednake zadanoj duljini b, tj. vrh A' padne u A, a vrh C' padne u C, tada krak $A'B'$ kuta α', $(\alpha = \alpha')$ padne u smjer kuta α.

Prema tome vrh B' mora pasti u vrh B. Pretpostavimo da B' ne padne u točku B, već neku točku koja se nalazi između točaka A i B, (npr. točka E) ili u produženju dužine $\overline{AB}$, (npr. točka D). Kada bi vrijedio prvi slučaj, vrijedilo bi sljedeće: $|CE| = a'$, $(a' = a)$, tada bi trokut CEB bio jednakokračan, a $\angle CEB$ je šiljast (dakle njegovo suplement je tupi kut). Kako nasuprot većem kutu leži veća stranica vrijedilo bi sljedeće: $b' > a'$, odnosno $b > a$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $a > b$. Slično se pokaže da B' ne može pasti u točku D. Time je pokazano da B' mora pasti u B i vrijedi sukladnost trokuta. □

Ako se za bilo koja dva trokuta $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ smjer obilaska od A_1 preko B_1 do C_1 podudara sa smjerom obilasaka od A_2 preko B_2 do C_2, tada za takva dva trokuta kažemo da su jednako orijentirana.
Pogledajmo na primjeru orijentaciju trokuta:



Slika 3. *Orijentirani trokuti*

Iz gornje se slike vidi da su trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ jednako orijentirani, dok su trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_3B_3C_3$ suprotno orijentirani.

Definicija 1.3. *Dva su trokuta istosmjerno sukladna ukoliko su jednako orijentirani i sukladni. Dva su trokuta protusmjerno sukladna ukoliko su suprotno orijentirani i sukladni.*

1.2. Izometrije ravnine

Pojam sukladnosti često se veže uz preslikavanja, odnosno transformacije ravnina koja se nazivaju izometrijama.
Sa M označimo skup svih točaka ravnine. Prema [1] navodi se sljedeća definicija:

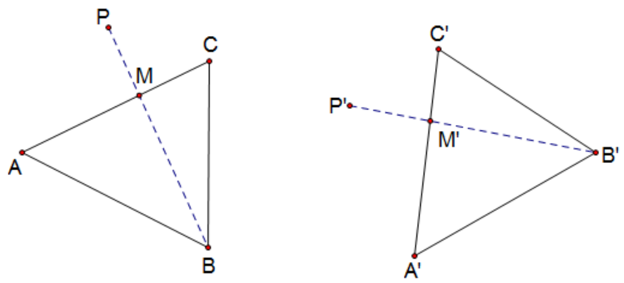
Definicija 1.4. *Kažemo da je preslikavanje $f : M \to M$ izometrija ravnine M ako za sve točke A i B ravnine M vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje je $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.*

Izometrije bijektivno preslikavaju skup točaka ravnine na sebe i ujedno dužine preslikavaju na dužine iste duljine (čuva se udaljenost).

Primjedba 1.1. *Izometrije preslikavaju trokute na trokute. Općenitije, izometrije preslikavaju figure na kongruentne figure.*

Teorem 1.1. *Postoji jedinstvena izometrija f koja dani trokut ABC preslikava na dani njemu sukladni trokut $A'B'C'$. Na taj način, s dva sukladna trokuta izometrija f je potpuno određena.*

Dokaz



Slika 4. *Izometrija ravnine*

Pretpostavi se da vrijedi: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
Za danu točku P jednoznačno se može konstruirati figura $A'B'C'P'$ sukladna figuri $ABCP$. Tako konstruirano preslikavanje $f : P \mapsto P'$ je upravo izometrija f koja preslikava trokut ABC na trokut $A'B'C'$. $\square$

Nadalje, promatraju se neki posebni slučajevi izometrije s ciljem da se one klasificiraju.
Izometrije se mogu podijeliti obzirom na orijentaciju na:

1. Istosmjerne izometrije – prema [2] vrijedi:

Definicija 1.5. *Izometrije koje preslikavaju neke trokute na istosmjerno sukladne trokute nazivaju se istosmjerne izometrije.*

2. Protusmjerne izometrije – prema [2] vrijedi:

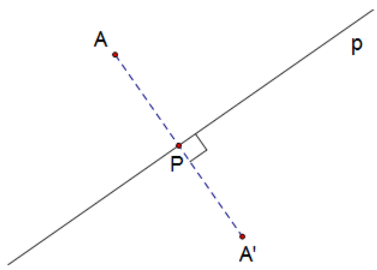
Definicija 1.6. *Izometrije koje preslikavaju neke trokute na protusmjerno sukladne trokute nazivaju se protusmjerne izometrije.*

1.2.1. Osna simetrija

Prema [1] i [2] navodi se sljedeća definicija:

Definicija 1.7. *Osna simetrija $s_p : M \to M$ s osi p je izometrija ravnine M, kojoj su sve točke osi p, i samo one, fiksne.*

Definicija 1.8. *Za par točaka A i A' kaže se da su simetrične s obzirom na os p, ako je njihova spojnica $\overline{AA'}$ okomita na p i ako os p siječe dužinu $\overline{AA'}$ u njezinu polovištu P.*



Slika 5. *Osno simetrična slika točke A*

S obzirom na Definiciju 1.8 osnu simetriju možemo definirati kao transformaciju ravnine s_p koja preslikava svaku točku A ravnine na njoj simetričnu točku A' s obzirom na neku os p. Očito vrijedi, ako je A' osnosimetrična slika točke A, obzirom na os p, da je i A osnosimetrična slika točke A' obzirom na p. Dakle vrijedi sljedeće:

$$s_p : A \mapsto A'$$

ali i

$$s_p : A' \mapsto A$$

pa je

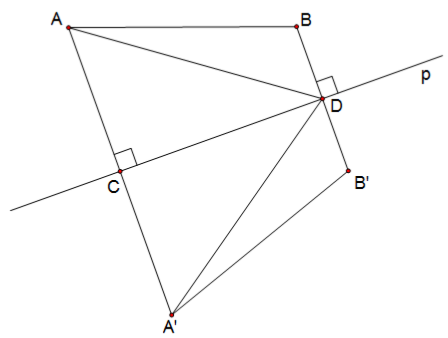
$$s_p = s_p^{-1}$$

Za transformacije za koje vrijedi takvo svojstvo kaže se da su involutivne. Ako se gornja transformacija izvede dva puta za redom dobije se identiteta, tj. $s_p^2 = I$.
Točka (odnosno pravac) koja se pri nekoj transformaciji pridružuje sama sebi naziva se fiksna točka (fiksni pravac) te transformacije.

Primjedba 1.2. *Svaka točka osi p je fiksna točka osne simetrije s_p.*
Svaki pravac okomit na os p je fiksan pravac osne simetrije s_p.

Teorem 1.2. *Osna simetrija, $s_p : M \to M$ je izometrija.*

Dokaz
Neka su A i B točke u ravnini M. Točka A' neka je osnosimetrična slika točke A, tj. $A' = s_p(A)$, a točka B' osnosimetrična slika točke B, $B' = s_p(B)$. Polovište dužine $\overline{AA'}$ označimo točkom C, a polovište dužine $\overline{BB'}$ točkom D.

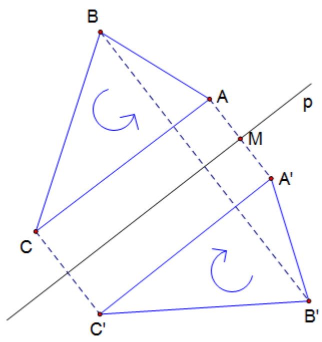


Prema $S-K-S$ teoremu su trokuti ACD i $A'CD'$ sukladni. Naime, $\overline{CD}$ im je zajednička stranica, duljina $|AC| = |A'C|$, te je $\angle ACD = \angle A'CD$. Iz ove sukladnosti slijedi $|AD| = |A'D|$ i $\angle ADC = \angle A'DC$. Stoga je

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle CDB - \angle CDA = 90^\circ - \angle CDA \\ &= 90^\circ - \angle CDA' = \angle B'DC - \angle CDA' = \angle A'DB'. \end{aligned}$$

Uz to je i $|BD| = |B'D|$ i $|AD| = |A'D|$, pa su trokuti ABD i $A'B'D$ sukladni prema $S-K-S$ teoremu. Slijedi $|AB| = |A'B'|$. $\square$

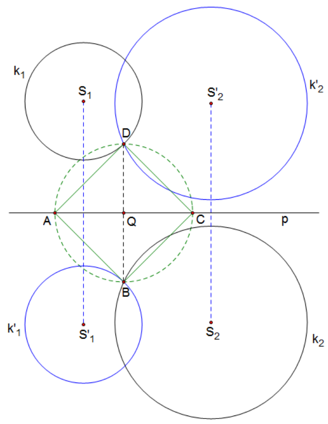
Primjedba 1.3. *Osna simetrija je protusmjerna izometrija.*



Vidimo da se trokut ABC osnom simetrijom preslika u trokut $A'B'C'$ koji je suprotne orijentacije. Navedimo jedan primjer rješavanja zadataka koristeći osnu simetriju.

Primjer 1.1. *Konstruirajte kvadrat tako da mu dva nasuprotna vrha leže na danom pravcu p, a dva preostala vrha na danim kružnicama k_1 i k_2.*

Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći osnu simetriju. Konstruiramo kružnicu k_1' koja je osnosimetrična slika kružnice k_1. Presjek kružnica k_1' i k_2 je točka B. Točku B preslikamo simetrično s obzirom na pravac p i dobijemo točku D. Vrijedi: $d(D,p) = d(B,p) \Rightarrow |DQ| = |QB|$, gdje je Q polovište $\overline{DB}$. Kružnica iz Q radijusa DQ u presjeku sa pravcem p daje točke A i C. Imamo kvadrat $ABCD$. Vrijedi: $|AQ| = |QC|, \angle DQC = \angle AQB = \angle DCB = 90\,^\circ$.

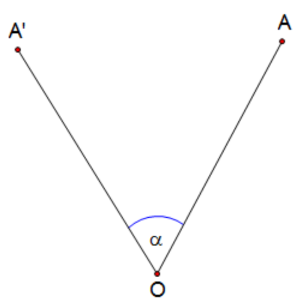


Zadatak može imati više rješenja ovisno o tome u koliko točaka se sijeku kružnice k_1' i k_2. Ukoliko se one sijeku u dvije točke zadatak ima 2 rješenja. Ako se radi o presjeku u jednoj točki, imamo jedno rješenje, a ako je njihov presjek prazan skup onda zadatak nema rješenja. Zadatak ima beskonačno rješenja ukoliko se ove dvije kružnice podudaraju.

1.2.2. Rotacija

Prema [1] i [2] navodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.9. *Neka je dana čvrsta točka O i orijentirani kut α. Nekoj točki A ravnine M pridružuje se točka A' tako da vrijedi: $|OA| = |OA'|$ i kut $\angle AOA' = \alpha$. Tako definirana bijektivna transformacija ravnine naziva se rotacija $r(O,\alpha)$ ravnine oko točke O za kut α.*

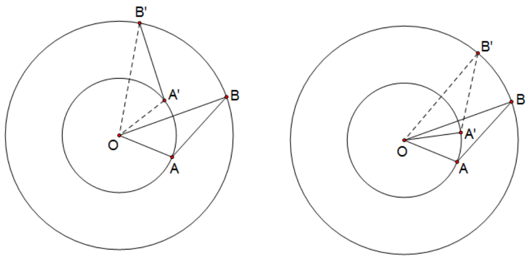


Slika 6. *Rotacija*

Rotacija r ima samo jednu fiksnu točku, a to je centar rotacije odnosno točka O. Rotacija nema fiksnih pravaca.

Teorem 1.3. *Rotacija $r : M \to M$ je izometrija ravnine M.*

Dokaz
Neka je O središte, a α kut rotacije. Neka su A i B točke u ravnini M te neka je $A' = r(A)$, $B' = r(B)$. Razlikujemo dva slučaja, kada točka B leži unutar kuta $\angle AOA'$, te kada je ona izvan tog kuta.



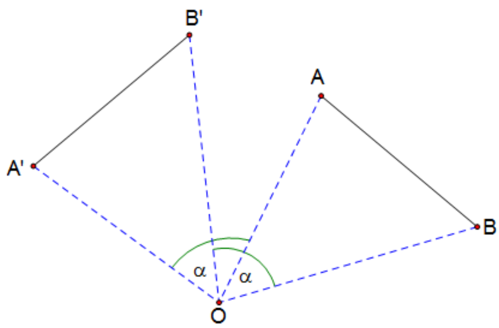
U prvom slučaju, kada točka B leži unutar kuta $\angle AOA'$ imamo:

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOA' - \angle A'OB = \alpha - \angle A'OB \\ &= \angle BOB' - \angle A'OB = \measuredangle A'OB'. \end{aligned}$$

Uz to je i $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$. Stoga su prema $S-K-S$ teoremu, trokuti AOB i $A'OB'$ sukladni. Slijedi $|AB| = |A'B'|$.
Slična se tvrdnja pokaže i u drugom slučaju.

□

Primjer 1.2. *Slika $\overline{A'B'}$ neke dužine $\overline{AB}$ pri rotaciji $r(O, \alpha)$ i sama ta dužina su jednake duljine tj. $|AB| = |A'B'|$.*



Slika 7. *Rotacija dužine*

$$|OA| = |OA'|$$

$$|OB| = |OB'|$$

$$\angle AOB = \angle A'OB'$$

Po Poučku 2 o sukladnosti trokuta vrijedi: $|AB| = |A'B'|$. Dakle, dva trokuta AOB te $A'OB'$ su sukladna. □

Slično se može pokazati da se rotacijom $r(O, \alpha)$ trokut ABC preslikava u trokut $A'B'C'$. Pri tome vrijedi:

$$|AB| = |A'B'|$$

$$|BC| = |B'C'|$$

$$|AC| = |A'C'|$$

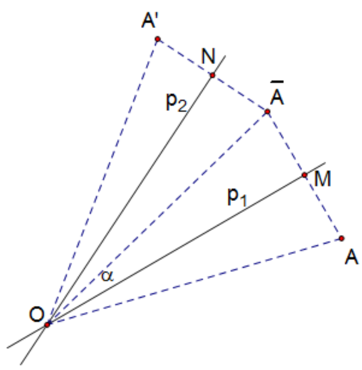
Trokuti ABC i $A'B'C'$ su istosmjerno orijentirani. Obzirom na pokazano slijedi tvrdnja:

Primjedba 1.4. *Rotacija r je istosmjerna izometrija.*

Neka je a' slika pravca a koji ne prolazi centrom O pri rotaciji $r(O, \alpha)$. Nožište N' okomice iz O na a'. Pravci a i a' zatvaraju kut α (kut pri rotaciji).

Teorem 1.4. *Produkt dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} kojima se osi p_1 i p_2 sijeku u točki O je rotacija $r = s_{p_1} s_{p_2}$ s centrom u točki O i kutom rotacije 2α, pri čemu je α orijentirani kut kojeg zatvaraju pravci p_1 i p_2.*

Dokaz



Slika 8. *Produkt dviju osnih simetrija kojima se osi sijeku*

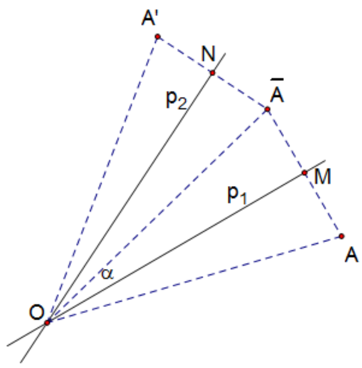
Pod produktom dvije transformacije misli se na uzastopno izvođenje te dvije transformacije.
Lako je uočiti, ako s_{p_1} preslikava A na $\overline{A} = s_{p_1}(A)$ i s_{p_2} preslikava $\overline{A}$ na $A' = s_{p_2}(\overline{A})$ tada rotacija r te dvije simetrije s_{p_1} i s_{p_2} preslikava A na $A' = s_{p_2}s_{p_1}(A)$.
Dodatno vrijedi $\overline{A} = s_{p_1}(A)$, a $A' = s_{p_2}(\overline{A})$, tada je $A' = s_{p_2}s_{p_1}(A)$ i $|OA| = |O\overline{A}| = |OA'|$, te za kutove:

$$\begin{aligned} \angle AOA' &= \angle AO\overline{A} + \angle \overline{A}OA' \\ &= 2 \cdot \angle MO\overline{A} + 2 \cdot \angle \overline{A}ON \\ &= 2(\angle MO\overline{A} + \angle \overline{A}ON) \\ &= 2 \cdot \angle MON = 2\alpha. \end{aligned}$$

□

Teorem 1.5. *Svaka se rotacija $r(O, \alpha)$ može prikazati kao produkt dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} čije se osi p_1 i p_2 sijeku u centru O rotacije.*

Dokaz
Dana je rotacija r s centrom O koja točku A preslikava u A'.



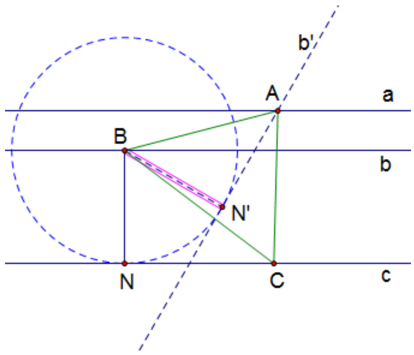
Povučemo bilo koji pravac p_1 kroz O. Sliku točke A pri osnoj simetriji s_{p_1} s obzirom na os p_1 označavamo sa $\overline{A}$. Os p_2 simetrije s_{p_2} je sada simetrala dužine $\overline{\overline{A}A'}$ koja očito prolazi centrom O. Lako je vidjeti da je $r = s_{p_2}s_{p_1}$.

□

Valja napomenuti kako rotacijom r osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} nisu jednoznačno određene. Os jedne od te dvije simetrije može se proizvoljno odabrati. Druga os tada je time određena. Navedimo jedan primjer rješavanja zadataka koristeći rotaciju.

Primjer 1.3. *Konstruirajte jednakostranični trokut kojemu vrhovi leže na tri paralelna pravca.*

Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći rotaciju. Odaberemo proizvoljnu točku B sa pravca b. Rotiramo pravac b oko te točke za $60\,^\circ$ te dobijemo rotirani pravac b'. Presjek toga pravca i pravca a je točka A. Opišemo kružnice $k_1(A, \overline{AB})$ i $k_2(B, \overline{AB})$. Te dvije kružnice sijeku se u točki C koja je sa pravca c. Dobivamo traženi trokut ABC.

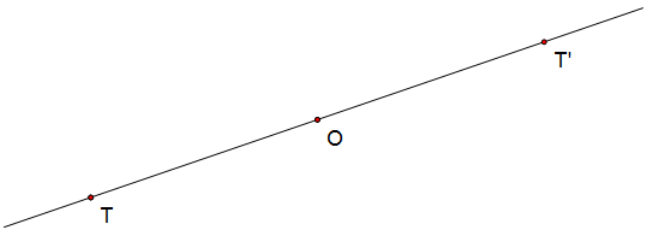


Zadatak ima 2 rješenja, ovisno o tome rotiramo li pravac oko točke za $60\,^\circ$ ili $-60\,^\circ$.

1.2.3. Centralna simetrija

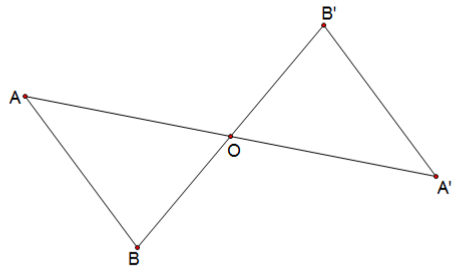
Važno je napomenuti da je poseban slučaj rotacije $r(O, \alpha)$ gdje je kut $\alpha = 180\,^\circ$ poznat pod nazivom centralna simetrija.
Definirajmo centralnu simetriju prema [1].

Definicija 1.10. *Neka je O čvrsta točka ravnine M. Centralna simetrija ravnine M obzirom na točku O je preslikavanje $s_O : M \to M$ definirano na sljedeći način: Najprije je $s_O(O) = O$. Ako je T točka različita od O, neka je T' točka na pravcu TO, različita od T, takva da je $|TO| = |OT'|$. Takva točka T' je jedinstvena. Definira se $s_O(T) = T'$.*



Teorem 1.6. *Centralna simetrija $s_O : M \to M$ je izometrija ravnine M.*

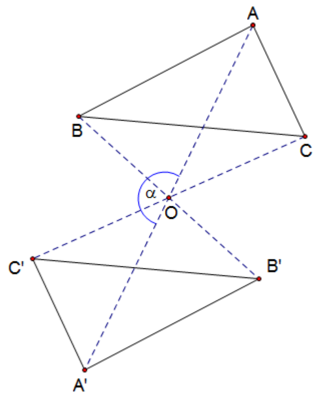
Dokaz



Neka su A i B točke ravnine M. Točka A' neka je centralno simetrična slika točke A, a točka B' centralno simetrična slika točke B. Kako je $\angle AOB = \angle A'OB'$, $|AO| = |A'O|$ i $|BO| = |B'O|$, trokuti AOB i $A'OB'$ su sukladni prema $S - K - S$ teoremu. Slijedi $|AB| = |A'B'|$.

$\square$

Kao i u bilo kojoj rotaciji, kod centralne simetrije je centar O jedina fiksna točka. U centralnoj simetriji je i svaki pravac koji prolazi centrom O fiksan.

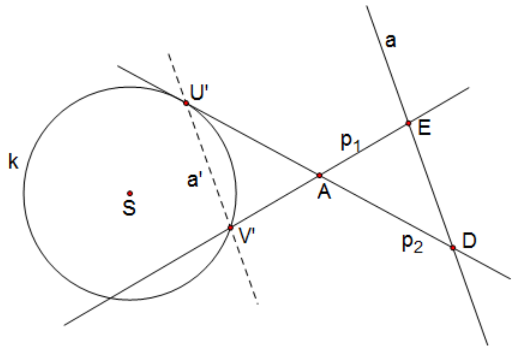


Navedimo primjer rješavanja zadataka koristeći centralnu simetriju.

Primjer 1.4. *Dana je kružnica k, pravac a i točka A. Točkom A povucite pravac p tako da je točka A polovište dužine kojoj je jedan kraj na kružnici k, a drugi na pravcu p.*

Rješenje:

Zadatak rješavamo koristeći centralnu simetriju. Dani pravac a preslikamo centralnom simetrijom kojoj je centar dana točka A na pravac a'. Pravac a' neka siječe kružnicu k u točkama U' i V'. Spojimo li U' s A, tada ta spojnica $\overline{U'A}$ siječe dani pravac a u točki D. Točke U' i D su očito par pridruženih točaka pri centralnoj simetriji, pa je odatle točka A polovište dužine $\overline{U'D}$. S druge strane, analogno, spojimo li V' sa A, tada ta spojnica $\overline{V'A}$ siječe dani pravac a u točki E. Analogno, točke V' i E su par pridruženih točaka pri centralnoj simetriji, pa je točka A polovište dužine $\overline{V'E}$.



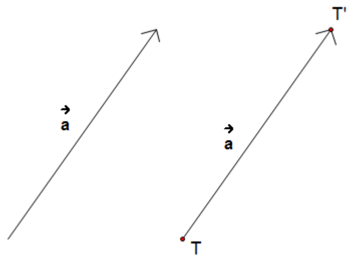
Postoje li uopće rješenja ovisi o tome siječe li pravac a' danu kružnicu k ili ne. Ako pravac a' siječe kružnicu u dvije točke ili ju dira, tada postoje dva odnosno jedno rješenje.

1.2.4. Translacija

Prema [1] navodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.11. *Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ neki čvrsti vektor u ravnini M. Preslikavanje $t_{\vec{a}} : M \to M$ koje točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T)$ iz M, tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ naziva se translacija ravnine M za vektor $\vec{a}$.*

Uobičajeno je translaciju nazivati još i paralelnim pomakom.



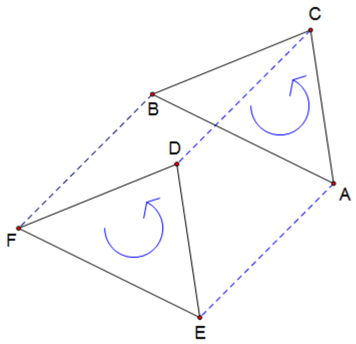
Slika 9. *Translacija dužine*

Orijentirane spojnice svih parova pridruženih točaka neke translacije su međusobno paralelne i nazivamo ih zrakama translacije. One određuju smjer translacije. Sve zrake translacije su fiksni pravci translacije, tj. točke neke zrake translacije se preslikavaju opet u iste točke te iste zrake. Translacija nema fiksnih točaka, tj. ne postoje točke koje bi se nekom translacijom preslikale same na sebe.

Primjedba 1.5. *Svaki pravac a koji nije zraka translacije i njegova slika a' pri nekoj translaciji su međusobno paralelni.*

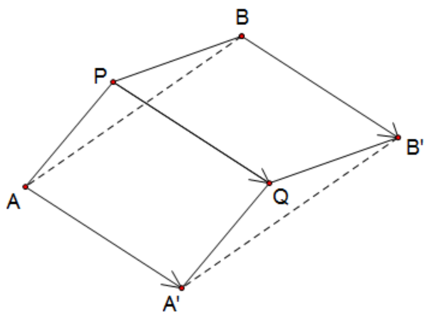
Primjedba 1.6. *Paralelni pravci $a||b$ koji nisu zrake translacije preslikavaju se tom translacijom u međusobno paralelne pravce $a'||b'$.*

Važno je znati da svaka translacija preslikava dužine na dužine iste duljine, a da zadani trokut preslikava na kongruentan trokut iste orijentacije.



Slika 10. *Translacija trokuta*

Teorem 1.7. *Translacija $t_{\vec{a}} : M \to M$ je izometrija.*



Dokaz
Neka su A i B dvije točke ravnine M. Točke A' i B' neka su njihove slike pri translaciji $t_{\vec{a}}$. Tada su $APQA'$ i $BPQB'$ paralelogrami, pa je $|AA'| = |PQ|$, $AA'||PQ$ i $|BB'| = |PQ|$, $BB'||PQ$. Stoga je $|AA'| = |BB'|$ i $AA'||PQ$, pa je i četverokut $ABB'A'$ paralelogram, a odatle slijedi $|AB| = |A'B'|$.

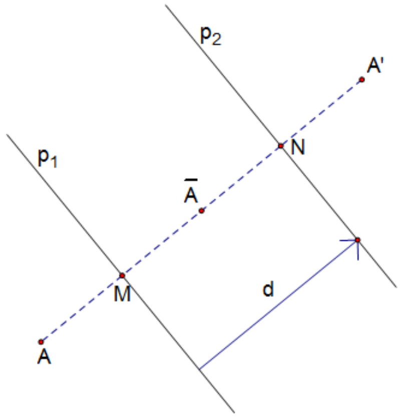
□

Bez dokaza navodi se sljedeći teorem: (dokaz se može pronaći u [2])

Teorem 1.8. *Translacije su istosmjerne izometrije.*

Teorem 1.9. *Produkt dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} kojima su osi p_1 i p_2 paralelne, je translacija $t_{\vec{a}} = s_{p_1} s_{p_2}$. Smjer te translacije je okomit na osi p_1 i p_2, a udaljenost neke točke A i njezine slike A' jednaka je dvostrukoj udaljenosti osi p_1 i p_2.*

Dokaz



Slika 11. *Produkt dviju osnih simetrija kojima su osi paralelne*

Na temelju slike lako je uočiti da je smjer preslikavanja translacije $t_{\vec{a}}$, kao produkt od s_{p_1} i s_{p_2}, okomit na zadane osi. Osim toga, sa slike se vidi sljedeće:

$$|AA'| = |A\overline{A}| + |\overline{A}A'| = 2 \cdot |M\overline{A}| + 2 \cdot |\overline{A}N| = 2(|M\overline{A}| + |\overline{A}N|) = 2 \cdot |MN| = 2d.$$

Udaljenost $|AA'|$ ne ovisi o položaju točke A nego o udaljenosti osi p_1 i p_2 danih osnih simetrija.

□

Teorem 1.10. *Svaka se translacija $t_{\vec{a}}$ može prikazati kao produkt dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} s osima p_1 i p_2 koje su okomite na smjer translacije $t_{\vec{a}}$.*

Dokaz

Neka su A i A' pridružene točke pri translaciji $t_{\vec{a}}$. Os p_1 osne simetrije s_{p_1} možemo povući po volji okomito na $\overline{AA'}$. Tom se osnom simetrijom s_{p_1} točka A preslika na $\overline{A}$. Os p_2 osne simetrije s_{p_2} je simetrala dužine $\overline{\overline{A}A'}$. Sada je odmah jasno da je $t_{\vec{a}} = s_{p_2} s_{p_1}$.

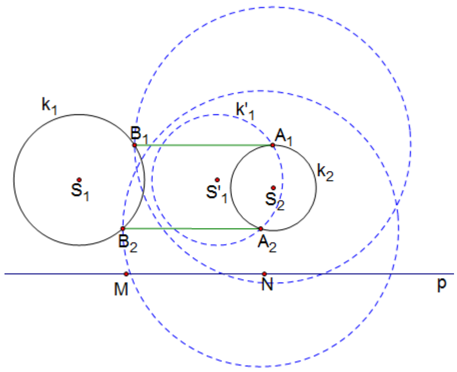
□

Translacijom $t_{\vec{a}}$ osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} nisu jednoznačno određene. Os p_1 u određenom smislu može se odabrati po volji. Navedimo jedan primjer rješavanja zadataka koristeći translaciju.

Primjer 1.5. *Dane su kružnice k_1 i k_2, pravac p i na njemu MN. Konstruirajte $\overline{AB}$ tako da je ta dužina paralelna sa pravcem p, te da je njezina duljina jednaka duljini dužine MN i da su pri tome njezine krajnje točke na k_1, odnosno na k_2.*

Rješenje:

Zadatak rješavamo koristeći translaciju. Translatiramo kružnicu k_1 za dužinu MN i dobijemo kružnicu k_1'. Sjecište te kružnice i kružnice k_2 su krajnje točke tražene dužine AB, to su dvije točke u ovom slučaju A_1 i A_2. Oko A_1 opišemo kružnicu radijusa $|MN|$, isto i oko A_2. U sjecištu sa k_1 dobijemo druge dvije točke, te imamo traženu dužinu, odnosno njih dvije.

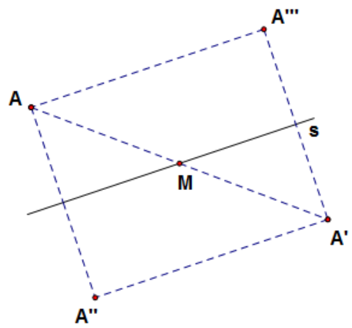


Zadatak ima dva rješenja, ukoliko se kružnice k_1' i k_2 sijeku u dvije točke, jedno rješenje ukoliko je njihov presjek jedna točka, te nema rješenja ukoliko je njihov presjek prazan skup.

1.2.5. Klizna simetrija

Prema [2] navodi se sljedeća definicija:

Definicija 1.12. *Transformacia κ ravnine koju dobijemo kao produkt $\kappa = t_{\vec{a}} \cdot s_p$ jedne osne simetrije s_p i jedne translacije $t_{\vec{a}}$ čiji je smjer paralelan s osi p osne simetrije s_p, zove se klizna simetrija.*



Slika 12. *Klizna simetrija*

Produkt $\kappa = t_{\vec{a}} \cdot s_p$ je komutativan.
Kako je klizna simetrija produkt jedne istosmjerne i jedne protusmjerne simetrije vrijedi:

Primjedba 1.7. *Klizna simetrija je protusmjerna izometrija.*

Primjedba 1.8. *Svaku kliznu simetriju možemo definirati kao produkt $\kappa = s_{p_3} s_{p_2} s_{p_1}$ tri osne simetrije, pri čemu su osi dvije osne simetrije međusobno paralelne i okomite na treću.*

Na kraju poglavlja o izometrijama zaključuje se da je svaka istosmjerna izometrija ili rotacija ili translacija, dok je svaka protusmjerna izometrija ili klizna simetrija ili osna simetrija. Također, može se pokazati kako se svaka izometrija da prikazati kao produkt od ne više od tri osne simetrije.

2. Sličnost trokuta i preslikavanja sličnosti

2.1. Sličnost trokuta

Definicija 2.1. *Dva trokuta, ABC i $A'B'C'$ su slični ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne, a odgovarajući kutovi jednaki. Dva slična trokuta zadovoljavaju sljedeće jednakosti:*

$$|AB| = k \cdot |A'B'|,$$

$$|AC| = k \cdot |A'C'|,$$

$$|BC| = k \cdot |B'C'|,$$

$$\angle ABC = \angle A'B'C',$$

$$\angle BCA = \angle B'C'A',$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'.$$

Za dva slična trokuta koristi se sljedeća oznaka: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Da bi se pokazala sličnost između dva trokuta dovoljno je pokazati da vrijede tri od šest gore navedenih jednakosti. O tome govore tri poučka o sličnosti trokuta.

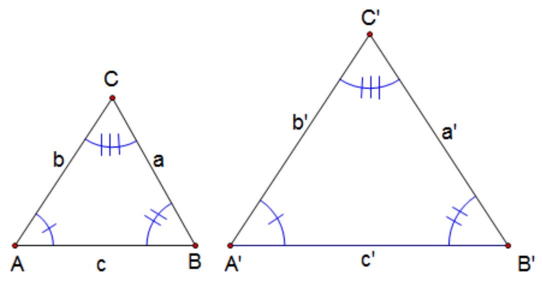
Poučak 2.1. *Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutevi jednaki, tj. vrijedi sljedeće:*

$$\angle ABC = \angle A'B'C',$$

$$\angle BCA = \angle B'C'A',$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B'.$$

Dokaz



Slika 13. *Sličnost trokuta*

Dana su dva trokuta ABC i $A'B'C'$. Pretpostavi se da oni imaju jednake kuteve tj. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.
Na polupravcima CA i CB odrede se točke D i E, tako da vrijedi slijedeće: $|CD| = b'$, $|CE| = a'$. Prema Poučku 3 o sukladnosti trokuta vrijedi: $\triangle CDE \cong \triangle A'B'C'$, pa

je $\angle CDE = \alpha'$. Ukoliko se iskoristi pretpostavka također vrijedi $\angle CDE = \alpha$, pa je $DE||AB$. Po Talesovom poučku o proporcionalnosti pramena pravaca slijedi:

$$\frac{b'}{|AC|} = \frac{a'}{|CB|} \quad tj. \quad \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

Slično se dobije:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}.$$

Trokuti ABC i $A'B'C'$ su slični, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

□

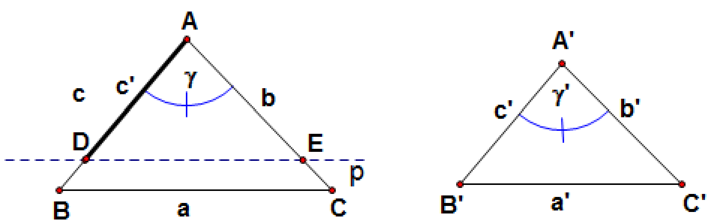
Poučak 2.2. *Dva su trokuta slična ako su im dva para pridruženih stranica proporcionalna i kutovi što ih zatvaraju jednaki, tj. vrijedi sljedeće:*

$$\angle CAB = \angle C'A'B',$$

$$|A'C'| = k \cdot |AC|,$$

$$|A'B'| = k \cdot |AB|.$$

Dokaz



Neka za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ i $\gamma = \gamma'$. Neka je D točka na polupravcu AB za koju je $|AD| = c'$, p pravac kroz D paralelan sa $|BC|$. Tada p siječe $\overline{AC}$ u točki E. Očito vrijedi sljedeće:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\frac{b}{|AE|} = \frac{c}{c'},$$

$$|AE| = b'$$

$$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C',$$

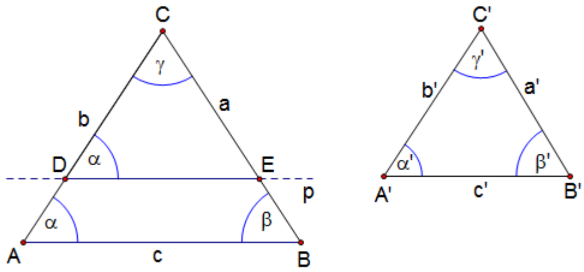
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

□

Poučak 2.3. *Dva su trokuta slična ako su im sva tri para pridruženih stranica proporcionalna, tj. ako vrijedi sljedeće:*

$$|A'B'| = k \cdot |AB|,$$
$$|A'C'| = k \cdot |AC|,$$
$$|B'C'| = k \cdot |BC|.$$

Dokaz



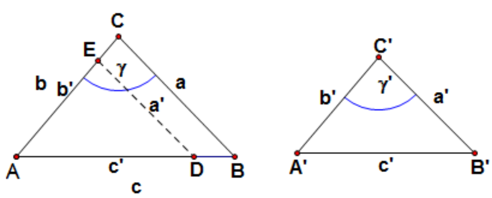
Neka za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Neka je D točka na polupravcu CA takva da vrijedi $|CD| = b'$. Neka je p paralelan sa AB kroz točku D. Ako bi vrijedilo $p||BC$, onda bi $AB||BC$, što je nemoguće. Stoga p siječe pravac BC u nekoj točki E. Kako je $\angle CDE = \alpha$ (protukuti), pa je $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ i vrijedi: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{|DE|} = \frac{a}{|CE|} \implies |DE| = \frac{cb'}{b}, |CE| = \frac{ab'}{b}$.
Iz pretpostavke slijedi: $|DE| = c'$ i $|CE| = a'$. Prema Poučku 1 o sukladnosti trokuta slijedi da je $\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$. Konačno, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$\square$

Poučak 2.4. *Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a kutevi nasuprot većim stranicama se podudaraju. Dakle, vrijedi sljedeće:*

$$|A'B'| = k \cdot |AB|,$$
$$|B'C'| = k \cdot |BC|,$$
$$\angle A'C'B' = \angle ACB.$$

Dokaz



Neka za trokute ABC i $A'B'C'$ vrijedi $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, $c > a$ i $\gamma = \gamma'$. Ako je $c = c'$ onda je prema Poučku 1 o sukladnosti trokuta, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Neka je $c > c'$ i $D \in \overline{AB}$, tako da vrijedi $|AD| = |A'B'| = c'$. Paralela s D kroz BC siječe AC u E, pa je po 1. poučku o sličnosti $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Stoga vrijedi: $\frac{a}{c} = \frac{|ED|}{c'}$. Kako je $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$ slijedi $|ED| = a'$. Po poučku 4 o sukladnosti trokuta slijedi: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$. Prethodna sukladnost i sličnost trokuta ADE i ABC povlače sličnost: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$\square$

Definicija 2.2. *Trokuti ABC i $A'B'C'$ su istosmjerno slični, ako su oni slični i jednako orijentirani. Ukoliko su navedeni trokuti slični, a suprotno orijentirani kaže se da su oni protusmjerno slični.*

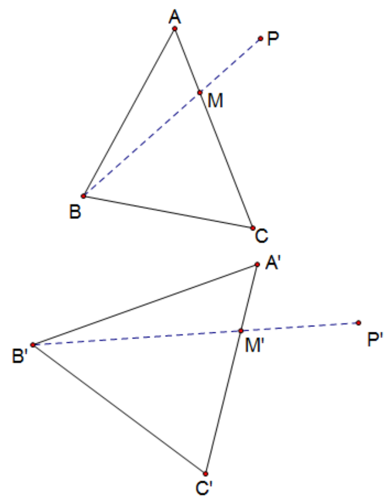
Pojam sličnosti usko je vezan sa transformacijama ravnine koje će se nazivati sličnostima:

Definicija 2.3. *Transformacije $f : M \to M$ ravnine M koje preslikavaju skup točaka ravnine bijektivno na sebe, dok svaku dužinu $\overline{AB}$ preslikavaju na njoj proporcionalnu dužinu $\overline{A'B'}$, ($|A'B'| = k \cdot |AB|$) zovu se preslikavanja sličnosti. Svakoj sličnosti pridružen je pozitivan realan broj k koji se naziva koeficijent sličnosti.*

Svaka sličnost f preslikava trokute na njima slične trokute.

Teorem 2.1. *Postoji točno jedna sličnost f koja dani trokut ABC preslikava na njemu sličan trokut $A'B'C'$. Sa ta dva trokuta, sličnost f je jednoznačno određena.*

Dokaz



Neka je zadana točka P u ravnini. Spojimo tu točku s vrhom B danog trokuta $\triangle ABC$. Stranica $\overline{AC}$ siječe tu spojnicu $\overline{PB}$ u točki M. Treba odrediti toču M' na stranici $\overline{A'C'}$ tako da vrijedi sljedeće:

$$\frac{|AM|}{|CM|} = \frac{|A'M'|}{|C'M'|}$$

Točka M' jednoznačno je određena. Na spojnici $\overline{B'M'}$ odredi se točka P', tako da vrijedi:

$$\frac{|BP|}{|MP|} = \frac{|B'P'|}{|M'P'|}$$

Točka P' jednoznačno je određena.
Na taj način definirano je preslikavanje $f : P \mapsto P'$ točaka ravnine za koje se može tvrditi da je sličnost. □

Teorem 2.2. *Sličnost čuva kuteve.*

2.2. Preslikavanja sličnosti

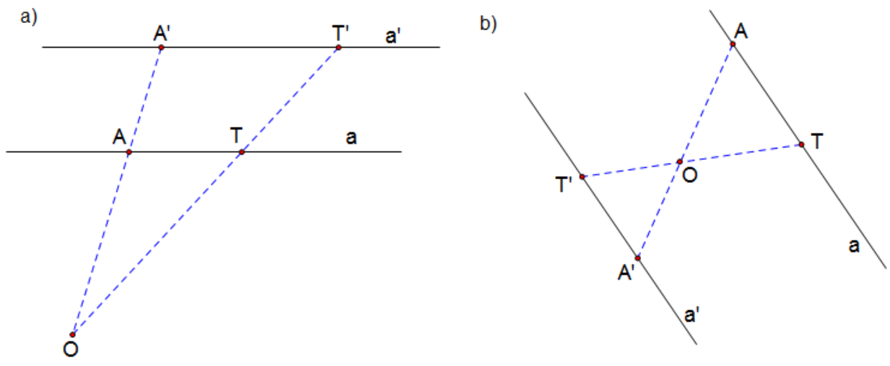
2.2.1. Homotetija

Definicija 2.4. *Neka je O čvrsta točka ravnine M. Bilo kojoj točki T ravnine (različitoj od O) pridružuje se točka T' koja je kolinearna s T i O i za koju vrijedi:*

$$\frac{|OT'|}{|OT|} = k \tag{2}$$

gdje su $\overline{OT}$ i $\overline{OT'}$ orijentirane dužine, a k bilo koji realan broj različit od nule. Takva se transformacija ravnine zove homotetija h. Točka O je centar homotetije, a broj k konstanta homotetije.

Uobičajeno je pisati i $h = h(O, k)$.



Slika 14. *Homotetija*

Spojnica svakog para pridruženih točaka A i A' prolazi centrom homotetije O. Pravci tog pramena nazivaju se zrakama homotetije.
Iz definicije homotetije vidimo da se radi o orijentiranim dužinama, pa konstanta k homotetije može biti bilo koji realan broj različit od nule. Ako je:

- $k > 0$
  U ovom slučaju obje točke u paru pridruženih točaka su uvijek s iste strane centra O (slika 14.a)).

- $k < 0$
  U ovom slučaju obje točke u paru pridruženih točaka su sa različitih strana centra O (slika 14.b)).

- $k = 1$
  U ovom slučaju dobiva se identitet ravnine kao poseban slučaj homotetije.

- $k = -1$
  Ovo je poseban slučaj homotetije, odnosno opisana transformacija je centralna simetrija.

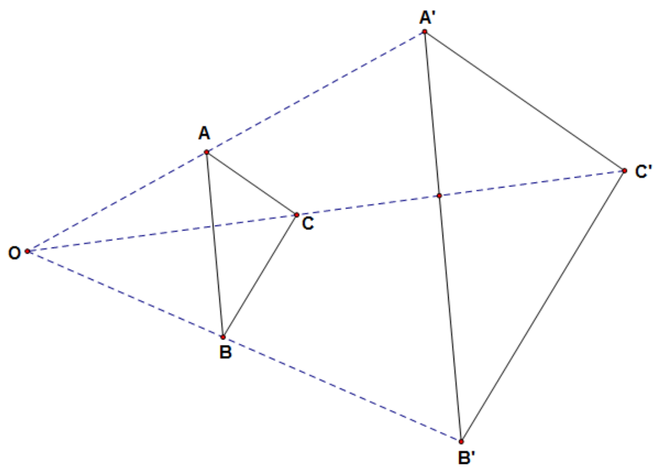
Svaka homotetija nekoj dužini koja ne leži na zraci homotetije pridružuje paralelnu dužinu. Također homotetijom se trokuti preslikavaju na slične trokute iste orijentacije, bez obzira na to da li je konstanta homotetija $k > 0$ ili $k < 0$.

Teorem 2.3. *Homotetija je istosmjerna sličnost s konstantom $|k| = n$.*

Centar homotetije O je jedina fiksna točka transformacije, dok su zrake homotetije njezini fiksni pravci.

Teorem 2.4. *Za dva trokuta ABC i $A'B'C'$ kojima su pridružene stranice paralelne, ali ne i jednake, kaže se da su homotetični. Postoji točno jedna homotetija koja preslikava trokut ABC na trokut $A'B'C'$. Spojnice se produženih vrhova homotetičnih trokuta sijeku u centru O homotetije h.*

Dokaz



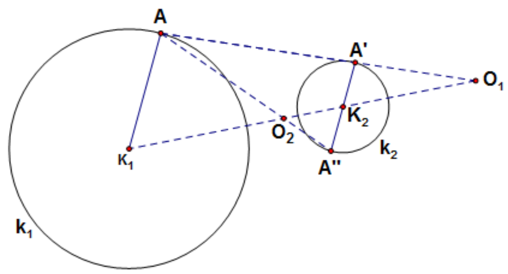
Slika 15. *Homotetetični trokuti*

Trokuti ABC, $A'B'C'$ nisu sukladni, pa je $|A'B'| = k \cdot |AB|$ i $k \neq 0, 1$. Spojnice $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ se sijeku u točki O. Sada će se promotriti homotetija h s centrom u O koja preslikava $\overline{AB}$ na $\overline{A'B'}$. Ta homotetija h očito preslikava $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ na $\overline{A'C'}$ odnosno

$\overline{B'C'}$. Dakle C' je slika točke C pri toj homotetiji, pa i spojnica $\overline{CC'}$ prolazi točkom O.

□

Ako su trokuti ABC, $A'B'C'$ sukladni ($k = 1$) i ako su im stranice u parovima paralelne, tada se lako može pokazati da su ta dva trokuta ili centralno simetrična ili se mogu preslikati jedan na drugog translacijom.
Promatraju se dvije kružnice $k_1(K_1, r_1)$ i $k_2(K_2, r_2)$ različitih središta i različitih polumjera.



Slika 16. *Homotetija kružnica*

Ako se povuku polumjeri $\overline{K_1A}$ i $\overline{K_2A'}$ kružnice k_1, odnosno k_2, tako da su oni paralelni i jednako orijentirani. Spojnica $\overline{AA'}$ siječe $\overline{K_1K_2}$ u točki O_1. Kako vrijedi:

$$n_1 = \frac{|O_1A|}{|O_1A'|} = \frac{|O_1K_1|}{|O_1K_2|} = \frac{|K_1A|}{|K_2A'|} = \frac{r_1}{r_2} \tag{3}$$

za bilo koji izbor paralelnih polumjera $\overline{K_1A}$ i $\overline{K_2A'}$, slijedi da su kružnice k_1 i k_2 homotetične. Tu je homotetija h_1 koja preslikava kružnicu k_1 na k_2 i ima centar u točki O_1 i konstantu homotetije n_1.
Povučemo li sad polumjer $\overline{K_2A''}$ kružnice k_2 tako da je s obzirom na polumjer $\overline{K_1A}$, paralelan i suprotno orijentiran, tada se na isti način zaključuje da su kružnice k_1 i k_2 homotetične. Tu je homotetija h_2 koja preslikava kružnicu k_1 na k_2 i ima centar u sjecištu O_2 i konstantu homotetije:

$$n_2 = \frac{|O_2A|}{|O_2A''|} = \frac{|O_2K_1|}{|O_2K_2|} = \frac{|K_1A|}{|K_2A''|} = -\frac{r_1}{r_2} \tag{4}$$

Točka O_1 je vanjski centar homotetije, a točka O_2 je unutarnji centar homotetije dviju kružnica. Dakle vrijedi:

Teorem 2.5. *Dvije kružnice s različitim središtima i različitim polumjerima uvijek su homotetične. Postoje dvije homotetije koje takve dvije kružnice prevode jedna na drugu.*

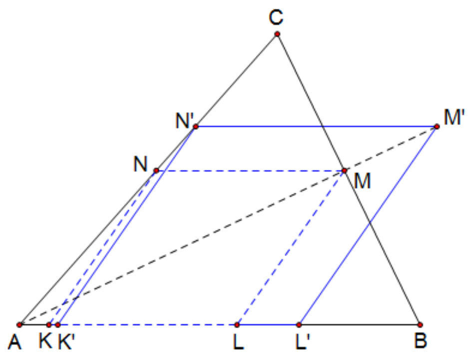
Teorem 2.6. *Svaku istosmjernu sličnost moguće je prikazati kao produkt jedne rotacije r i jedne homotetije h, pri čemu je centar O te rotacije r ujedno i centar homotetije h. Centar O je jedina fiksna točka istosmjerne sličnosti. Fiksnih pravaca nema.*

Teorem 2.7. *Svaku protusmjernu sličnost moguće je prikazati kao produkt jedne osne simetrije s_p i jedne homotetije h, pri čemu os p simetrije s_p prolazi centrom O homotetije h.*

Dokazi gore navedenih teorema mogu se pronaći u [2]. Navedimo jedan primjer rješavanja zadataka koristeći homotetiju.

Primjer 2.1. *U zadani $\triangle ABC$ upišite romb kojemu je zadan šiljasti kut α, tako da jedna od njegovih stranica KL leži na stranici AB danog trokuta, a druga 2 vrha M i N leže na bočnim stranicama AC i BC danog trokuta.*

Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći homotetiju. Odaberemo proizvoljnu točku N' sa stranice $\overline{AC}$. Napravimo zadani kut $\angle N'K'L' = \alpha$. Imamo romb $N'K'L'M'$. Dužina $\overline{AM'}$ siječe stranicu zadanog trokuta u točki M. Povučemo paralelu sa $\overline{M'L'}$ kroz M i u presjeku sa stranicom $\overline{AB}$ danog trokuta ABC dobijemo drugu točku traženog romba. Daljnji postupak je lagan.



Zadatak ima jedinstveno rješenje.

2.2.2. Inverzija

Sva do sada promatrana preslikavanja ravnine, preslikavala su pravce u pravce, a kružnice u kružnice.

Sljedeće preslikavanje je drugačije od prije razmatranih. Ono skup pravaca i kružnica opet preslikava u taj skup, ali se pri tome pravac može preslikavati ili u pravac ili u kružnicu. Prema [3] navodi se sljedeća definicija:

Definicija 2.5. *Neka je M ravnina i $O \in M$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivni broj. Preslikavanje*

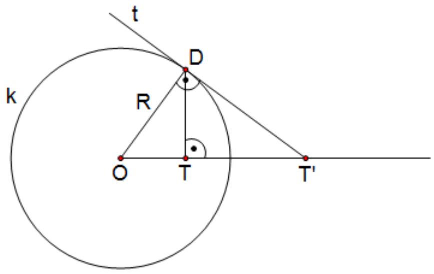
$$\mathcal{I}_O : M\backslash\{O\} \to M\backslash\{O\},\, T \mapsto T' = \mathcal{I}_O(T),$$

zove se inverzija s centrom O i radijusom $R > 0$, ako su točke O, T i T' kolinearne, T i T' s iste strane točke O i ako vrijedi $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Kompozicija inverzije same sa sobom očito je identiteta, pa je stoga $\mathcal{I}_O$ bijekcija. Kružnica $k = k(O, R)$ zove se kružnica inverzije $\mathcal{I}_O$. Očito je svaka točka kružnice inverzije fiksna točka te inverzije i to su jedine njezine fiksne točke.

Inverzija je zadana kružnicom $k(O, R)$. Stoga, ona je potpuno određena s centrom O i radijusom R.

Pokažimo kako konstruirati sliku T' neke točke T, u slučaju kada je točka T unutar kružnice k, te kada je ona van kružnice k.



Promotrimo slučaj kada je točka T unutar kružnice inverzije $k = k(O, R)$.
Na spojnicu OT u točki T podignemo okomicu. Točka D neka je jedno od sjecišta te okomice sa kružnicom k. Povučemo u točki D tangentu t na kružnicu k. Tada je sjecište pravca OT sa tangentom t upravo točka T' pridružena točki T tom inverzijom. To lako vidimo iz sličnosti trokuta $\triangle OTD \sim \triangle ODT'$. Vrijedi:

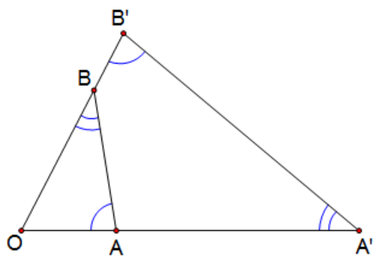
$$\frac{|OT'|}{R} = \frac{R}{|OT|} \Rightarrow |OT| \cdot |OT'| = R^2.$$

U drugom slučaju, kada je točka T, vanjska točka kružnice inverzije k, tada iz točke T povučemo jednu od tangenata na k i iz njenog dirališta D spusti se okomica na OT. Sjecište T' te okomice s OT tada je slika točke T.
Očito, inverzija unutrašnjost kružnice k preslikava u njenu vanjštinu i obratno.

Propozicija 2.1. *Neka su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka pri inverziji $\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_O^R$. Tada vrijedi:*

$$\angle OAB = \angle OB'A' \text{ i } \angle OBA = \angle OA'B'.$$

Dokaz



Prema tvrdnji propozicije točke A i A' su pridružene točke inverzije $\mathcal{I}_O$, što znači da je:

$$|OA| \cdot |OA'| = R^2.$$

Isto tako, točke B i B' su pridružene točke inverzije $\mathcal{I}_O$, pa vrijedi:

$$|OB| \cdot |OB'| = R^2.$$

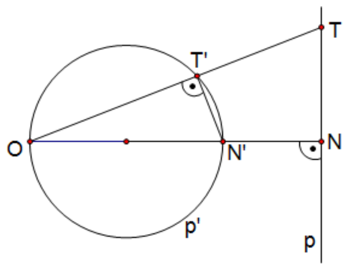
Trokuti OAB i $OB'A'$ imaju zajednički kut kod O, pa prema $S-K-S$ sličnosti slijedi $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, a iz sličnosti tvrdnja propozicije.

$\square$

Propozicija 2.2. *Neka je $p \subset M$ pravac kroz centar O inverzije $\mathcal{I}_O$. Tada se pravac kroz O preslikava inverzijom u taj isti pravac.*

Propozicija 2.3. *Neka je $p \subset M$ pravac koji ne prolazi centrom O inverzije $\mathcal{I}_O$. Tada se taj pravac preslika u kružnicu kroz O.*

Dokaz



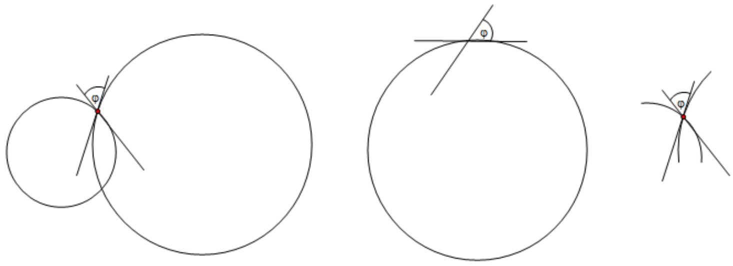
Neka je $p \subset M \backslash \{O\}$ neki pravac. Točka N neka je nožište okomice spuštene iz O na pravac p, a $N' = \mathcal{I}_O(N)$.
Odaberimo na pravcu p bilo koju točku T. Točka $T' = \mathcal{I}_O(T)$. Prema Propoziciji 2.1. tada je $\angle OT'N' = \angle ONT = \pi/2$. Dakle, T' nalazi se na kružnici p' kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar. Dakle, svaka se točka pravca p, preslikava u točku kružnice p'. Kako je $\mathcal{I}_O$ bijekcija, tvrdnja neposredno slijedi.

$\square$

Prema [3] navodi se sljedeća definicija:

Definicija 2.6. *Ako preslikavanje ravnine čuva kut između krivulja, onda se ono zove konformno preslikavanje. Drugim riječima, ako su k i l dvije krivulje koje se u točki S sijeku pod kutom φ, onda se njihove slike k' i l' u točki S' sijeku također pod tim istim kutom φ.*

Kut dvaju kružnica po definiciji je jednak kutu pod kojim se sijeku tangente u njihovom sjecištu. Slično se definira kut pravca i kružnice, odnosno, općenito kut između dvije krivulje. (Slika 17)



Slika 17. *Kut između krivulja*

Teorem 2.8. *Kompozicija dviju inverzija s istim centrom je homotetija, tj. vrijedi sljedeće:*

$$\mathcal{I}_O^{R'} \circ \mathcal{I}_O^{R} = h(O, (R/R')^2).$$

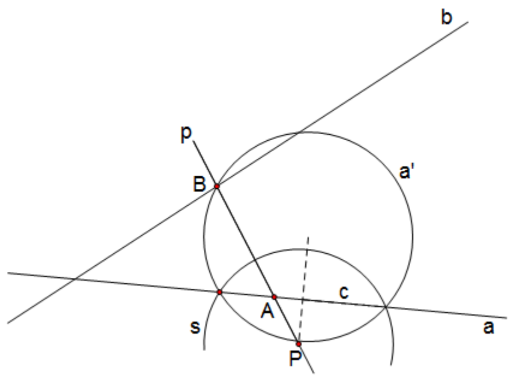
Dokaz
Radi jednostavnosti koristiti ćemo sljedeće oznake: $\mathcal{I}_O^R = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}_O^{R'} = \mathcal{I}'$.
Neka je točka $T \in M \backslash \{O\}$. S T' označimo sliku točke T pri inverziji $\mathcal{I}$, a s T'' sliku točke T' pri inverziji $\mathcal{I}'$. Vrijedi sljedeće:

$$|OT| \cdot |OT'| = R^2$$
$$|OT'| \cdot |OT''| = R'^2$$

Dijeljenjem ovih jednakosti dobivamo $|OT''| = (R'/R)^2|OT|$. Budući su O, T i T'' kolinearne točke, tvrdnja neposredno slijedi iz definicije homotetije. □
Navedimo primjer rješavanja zadataka u kojima se koristi inverzija.

Primjer 2.2. *Dana je točka P i dva pravca a i b. Točkom P povucite pravac p koji siječe pravce a i b u točkama A i B tako da je $|PA| \cdot |PB| = c^2$, gdje je c dana duljina.*

Rješenje:
Odredimo ovdje inverziju s centrom u točki P i konstantom inverzije c i tom inverzijom preslikajmo pravac a na kružnicu a'.



Gdje pravac b siječe kružnicu a' tu je točka B. Sada, spojnica PB siječe pravac a u točki A. Točke A i B su očito pridružene točke u spomenutoj inverziji, pa za njih

vrijedi $|PA| \cdot |PB| = c^2$.
Postoje dva rješenja ako kružnica a' siječe b u dvije točke. Može postojati još jedno ili nijedno rješenje ako a' dira odnosno ne siječe pravac b.

3. Izometrije i neka preslikavanja prostora

3.1. Grupe izometrija prostora

Koristimo aksiom euklidske geometrije S_4 koji kaže:
Postoji funkcija $d : M_3 \to M_3$ takva da je:

1. $d(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M_3, \qquad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in M_3$
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \quad \forall A, B, C \in M_3$ i pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$.

M_3 nazivamo metrički prostor, a funkcija d zove se udaljenost ili metrika.
Definirajmo što je to izometrija prostora prema [4].

Definicija 3.1. *Neka je d metrika na prostoru M_3 definirana aksiomom S_4. Surjektivno preslikavanje $f : M_3 \to M_3$ nazivamo izometrijom prostora ako vrijedi*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in M_3. \tag{5}$$

Pokažimo da je izometrija prostora bijekcija.
Vrijedi da je svaka izometrija prostora injekcija. $A \neq B$ povlači $d(A, B) > 0$, pa zbog definicije izometrije prostora vrijedi da je i $d(f(A), f(B)) > 0$, što povlači da je i $f(A) \neq f(B)$. Budući je izometrija po svojoj definiciji i surjekcija, slijedi da je i bijekcija.

Propozicija 3.1. *Skup svih izometrija prostora $\mathcal{I}$ je grupa s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.*

Dokaz

a) Ukoliko su $f,\ g \in \mathcal{I}$ izometrije, vrijedi da je i $g \circ f$ jer za svake dvije točke $A, B \in M_3$ imamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = d(g(f(A)), g(f(B)) = \\ = d(f(A), f(B)) = d(A, B). \end{aligned}$$

b) Za bilo koje izometrije $f, g, h \in \mathcal{I}$ vrijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, jer to vrijedi za svaka tri preslikavanja za koja su te kompozicije definirane.

c) Identiteta 1_{M_3} je izometrija na prostoru M_3.

d) $f \in \mathcal{I}$ bilo koja izometrija. Budući je f bijekcija, postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : M_3 \to M_3$ tako da vrijedi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{M_3}$.
Isto tako:

$$d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B)) =$$
$$= d(1_{M_3}(A), 1_{M_3}(B)) = d(A, B).$$

□

Ova propozicija pokazala nam je da je skup svih izometrija grupa, te upravo tu grupu nazivamo grupom izometrije prostora M_3.
Za $\mathcal{F} \subseteq M_3$, gdje je $f : M_3 \to M_3$ izometrija, skup

$$f(\mathcal{F}) = \bigcup \{f(T) : T \in \mathcal{F}\}$$

zovemo f- slikom skupa $\mathcal{F}$.

Ukoliko postoji $f \in \mathcal{F}$, takav da je $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$, onda za skupove $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in M_3$ kažemo da su sukladni ili izometrični uz oznaku $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

Pokažimo da je sukladnost relacija ekvivalencije na skupu $P(M_3)$, skupu svih podskupova prostora M_3.
Provjeravamo svojstva relacije ekvivalencije:

a) REFLEKSIVNOST. $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ vrijedi jer jer $1_{M_3}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

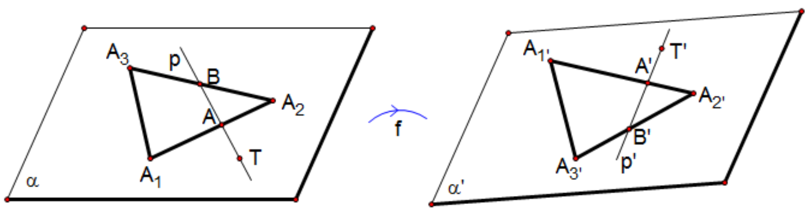
b) SIMETRIČNOST. Iz $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$ slijedi da postoji $f \in \mathcal{I}$ takav da je $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$, pa za $f^{-1} \in \mathcal{I}$ vrijedi da je $f^{-1}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1$, pa je $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_1$.

c) TRANZITIVNOST. Iz $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_3$ slijedi da postoje $f, g \in \mathcal{I}$ takvi da vrijedi $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$ i $g(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_3$. Budući je $g \circ f$ izometrija i vrijedi $(g \circ f)(\mathcal{F}_1) = g(f(\mathcal{F}_1)) = g(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_3$, slijedi da je $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_3$.

□

Propozicija 3.2. *Svaka izometrija prostora bijektivno preslikava ravninu na ravninu.*

Dokaz
Dana je ravnina α i tri nekolinearne točke te ravnine A_1, A_2 te A_3. Točke $f(A_1) = A_1', f(A_2) = A_2'$ te $f(A_3) = A_3'$ su nekolinearne za $f \in \mathcal{I}$ i određuju neku ravninu α'. Pokažimo da $T \in \alpha$ povlači $T' = f(T) \in \alpha'$. Povucimo točkom T u ravnini α bilo koji pravac p tako da taj pravac siječe dvije stranice trokuta $A_1A_2A_3$ u točkama A i B kao što vidimo sa slike.



Vrijedi sljedeće: $A' \in A'_1A'_2$, kao i $B' \in A'_2A'_3$, što pokazuje da je $A'B' \subset \alpha'$, pa je slika pravca p pravac p', tj. vrijedi $f(p) = p' = A'B' \subset \alpha'$ što povlači $T' = f(T) \in \alpha$. Slično pokazujemo, svaka točka ravnine α' je slika neke točke ravnine α. Kako je $f|_\alpha$ injekcija, vrijedi: f preslikava α bijektivno na α'. $\square$

Posljedica ovoga teorema je sljedeći korolar.

Korolar 3.1. *Svaka izometrija prostora preslikava poluravninu bijektivno na poluravninu i poluprostor na poluprostor, paralelne pravce na paralelne pravce i paralelne ravnine u paralelne ravnine.*

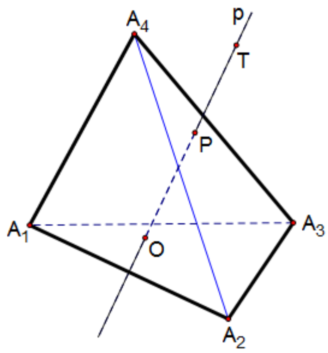
Sljedeća propozicija je posljedica tvrdnje koja kaže:
Neka je $f : M \to M$ ravnina. Tada vrijedi: ako su $A, B, C \in M$ tri nekolinearne fiksne točke od f, onda je f identiteta.

Propozicija 3.3. *Ako su A_1, A_2 te A_3 nekolinearne fiksne točke izometrije $f : M_3 \to M_3$, onda je svaka točka ravnine određena tim točkama fiksna.*

Ovom propozicijom proizlazi novo svojstvo izometrije.

Propozicija 3.4. *Za četiri nekomplanarne fiksne točke, A_1, A_2, A_3 i A_4, izometrije $f : M_3 \to M_3$ je f identita.*

Dokaz
Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka. Točkom T povucimo pravac p koji probada dvije od ravnina određenim gore navedenim točkama u P i Q. Vidimo sa slike da su to ravnine $A_1A_2A_3$ te $A_2A_3A_4$.



Prema prethodnoj propoziciji je $f(P) = P$ i $f(Q) = Q$. Budući je točka T sa pravca p te su dvije točke tog pravca fiksne, slijedi da je i T fiksna točka od f, odnosno da je $f(T) = T$. $\square$

Ukoliko se dvije izometrije $f, g : M_3 \to M_3$ podudaraju u četiri nekomplanarne točke, tada je $f = g$. Svaka izometrija prostora je potpuno određena sa četiri para korespondentnih točaka.

3.2. Translacija prostora

Navodimo definiciju translacije prostora prema [4]:

Definicija 3.2. *Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, čvrsti vektor u prostoru M_3. Preslikavanje $t_{\vec{a}} : M_3 \to M_3$, koje svakoj točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T) \in M_3$, takvo da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$, nazivamo translacija prostora M_3.*

Svaka translacija je izometrija prostora. Osim toga, kako vrijedi i $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}} + t_{\vec{b}}$, $t_{-\vec{a}} = (t_{\vec{a}})^{-1}$ te $t_{\vec{0}} = 1_{M_3}$, skup svih translacija prostora je grupa s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.
Tu grupu nazivamo grupa translacija prostora, uz oznaku $\mathcal{T}$. Ta grupa ima svojstvo komutativnosti. Prema prethodnim izlaganjima, možemo zaključiti da je grupa translacija prostora podgrupa grupe izometrija.

Navodimo svojstva translacije prostora.

Primjedba 3.1.

a) Ako translacija nije identiteta, onda ona očito nema fiksnu točku.

b) Svaki pravac paralelan sa smjerom vektora je fiksni pravac te translacije.

c) Svaka ravnina paralelna s pravcem koji ima smjer vektora translacije je fiksna ravnina te translacije.

Navodimo propoziciju bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [4].

Propozicija 3.5. *Svaka translacija prostora preslika pravac na njemu paralelan pravac.*

3.3. Centralna simetrija prostora

Navodimo definiciju centralne simetrije prostora prema [4]:

Definicija 3.3. *Neka je $O \in M_3$ bilo koja točka prostora M_3. Preslikavanje $s_O : M_3 \to M_3$, koje svakoj točki $T \in M_3$ pridružuje točku $T' = s_O(T)$, tako da je polovište dužine $\overline{TT'}$ točka O, nazivamo centralna simetrija prostora M_3.*

Točka O naziva se centar simetrije. Vrijedi sljedeće:

a) $s_O(O) = O$ i O je jedina fiksna točka preslikavanja s_O.

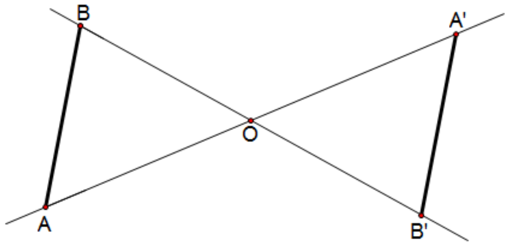
b) Svaki pravac kroz O je fiksni pravac od s_O.

c) Svaka ravnina kroz O je fiksna ravnina od s_O

d) Svaka centralna simetrija očito je bijekcija.

Propozicija 3.6. *Svaka centralna simetrija je izometrija prostora.*

Dokaz
Neka je $s_O : M_3 \to M_3$ centralna simetrija, te neka su dane bilo koje dvije točke A i B, točke prostora M_3. Razlikujemo dva slučaja. U slučaju kada su točke A, B i O kolinearne, tvrdnja je očita. U suprotnom, kada su točke A, B i O nekolinearne, onda je $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$, po S-K-S sukladnosti, gdje su A' i B' centralnosimetrične slike točaka A i B s obzirom na centar simetrije O.



Slika 18. *Centralna simetrija prostora*

Tada očito vrijedi: $|AB| = |s_O(A)s_O(B)|$. (Slika 18.)

$\square$

Navodimo primjer.

Primjer 3.1. *Dokažite da svaka centralna simetrija preslikava pravac u njemu paralelan pravac i ravninu u njoj paralelnu ravninu.*

Rješenje:
Razlikujemo dva slučaja kod pravca. U prvom slučaju, ako pravac p prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(p) = p$ i tvrdnja očito vrijedi. U drugom slučaju, ako pravac $p = AB$ ne prolazi centrom simetrije, onda iz sukladnosti trokuta OAB i trokuta $OA'B'$ slijedi $\angle BAO = \angle OA'B'$, a to povlači paralelnost pravaca p i p', odnosno vrijedi $p \,||\, p'= AB$.
Slično, i kod ravnine imamo dva slučaja. Ako ravnina α prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(\alpha) = \alpha$ pa je $\alpha || s_O(\alpha)$. Ako ravnina ne prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(\alpha) = \beta$ ravnina. Neka su p_1 i p_2 bilo koja dva pravaca ravnine α koji se sijeku i označimo sa p_1' i p_2' centralnosimetrične slike pravaca p_1 i p_2. Vidjeli smo da centralna simetrija preslikava pravac u njemu paralelni pravac pa vrijedi $p_1' \,||\, p_1$ i $p_2' \,||\, p_2$. Budući je ravnina β određena pravcima p_1' i p_2' i kako je svaka centralna simetrija izometrija prostora, vrijedi $\alpha \,||\, \beta$.

3.4. Simetrije prostora s obzirom na ravninu

Navodimo definiciju prema [4]:

Definicija 3.4. *Neka je $\alpha \subset M_3$ bilo koja ravnina.*
Preslikavanje $s_\alpha : M_3 \to M_3$, različito od identita, koje svakoj točki $T \in M_3$ pridružuje točku $T' = s_\alpha(T)$, tako da je $TT' \perp \alpha$, $|ST| = |ST'|$, gdje je S probodište pravca TT' s ravninom α, naziva se simetrija obzirom na ravninu α

Uobičajeno je ovu simetriju nazivati još i planarnom simetrijom ili zrcaljenjem na ravnini.
Navodimo svojstva simetrije prostora s obzirom na ravninu.

a) s_α je involutorno preslikavanje.

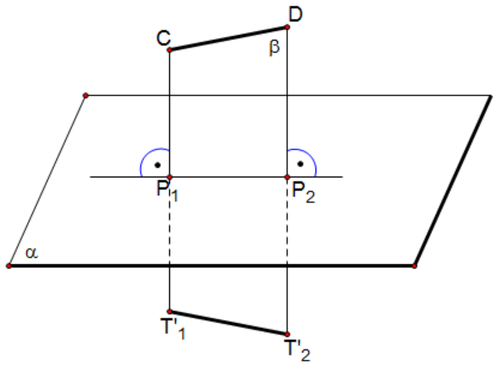
b) Sve točke ravnine su fiksne točke od s_α.

c) Pravci okomiti na ravninu α su fiksni pravci od s_α.

d) Ravnine okomite na ravninu α su fiksne ravnine od s_α.

Propozicija 3.7. *Svaka simetrija obzirom na ravninu je izometrija prostora.*

Dokaz
Uzmimo $T_1, T_2 \in M_3$ bilo koje dvije točke. Neka je s_α simetrija prostora s obzirom na ravninu te neka su T_1' i T_2' centralnosimetrične slike od $s_\alpha(T_1)$ i $s_\alpha(T_2)$. Budući su pravci T_1T_1' i T_2T_2' okomiti na ravninu α, oni su paralelni i određuju drugu ravninu β. Restrikcija od s_α na ravninu β je tada osna simetrija ravnine β obzirom na pravac P_1P_2, pa je $|T_1T_2| = |T_1'T_2'|$.



□

3.5. Simetrije prostora s obzirom na pravac

Navodimo definiciju prema [4]:

Definicija 3.5. *Preslikavanje $s_p : M_3 \to M_3$ koje ima sljedeća svojstva:*

1. *Svaka točka pravca p je fiksna točka od s_p*

2. *Pravac AA', gdje je $A' = s_p(A)$, okomit je na pravac p, za neku točku $A \in M_3$*

3. $|OA| = |OA'|$, *gdje je* O *sjecište pravaca* AA' *i* p.

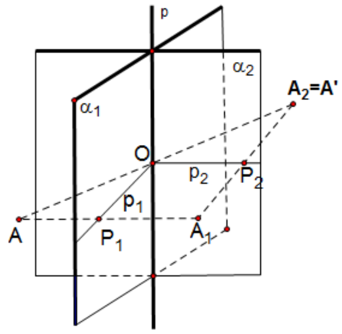
nazivamo simetrijom s_p *prostora obzirom na pravac* p.

Uobičajeno ju je još nazivati i aksijalna ili osna simetrija prostora. Pravac p zove se os simetrije.

Vezano uz planarnu i aksijalnu simetriju proizlazi i sljedeća propozicija.

Propozicija 3.8. *Svaka simetrija prostora obzirom na pravac je kompozicija dviju simetrija prostora obzirom na ravninu.*

Dokaz
Neka je s_p osna simetrija, te točka $A \in M_3$ točka koja ne leži na osi p. Neka su A' centralnosimetrična slika točke A s obzirom na os simetrije p, te točka $O \in p$ polovište dužine $\overline{AA'}$. Položimo pravcem p bilo koje dvije ravnine α_1 i α_2, okomite međusobno. Točke A_1 i A_2 su centralnosimetrične slike točaka A i A_1 s obzirom na ravnine α_1, odnosno α_2. Pokažimo da je $s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} = s_p$. Treba provjeriti da je $A' = A_2$. Kako je $AA_1 \perp \alpha_1$ vrijedi $AA_1 \perp p$. Isto tako, kako je $A_1A_2 \perp \alpha_2$ vrijedi $A_1A_2 \perp p$.

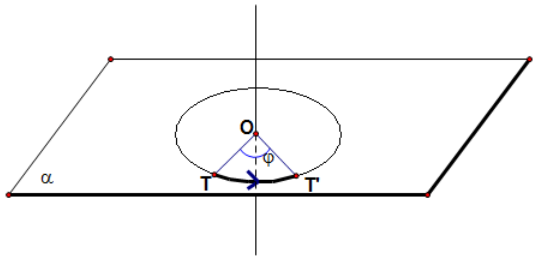


Pravac p okomit je na ravninu AA_1A_2, pa je i pravac AA_2 te ravnine okomit na pravac p te siječe taj pravac upravo u točki O. Ravnina AA_1A_2 siječe ravnine α_1 i α_2 u okomitim pravcima p_1 i p_2. Kako je $\angle AOP_1 = \angle POA_1$, $\angle A_1OP_2 = \angle POA_2$ i $\angle A_1OP_1 + \angle P_2OA_2 = \frac{\pi}{2}$, vrijedi da je $\angle AOA_2 = 2 \cdot \angle P_1OP_2 = \pi$, pa točke A, O i A_2 leže na istom pravcu okomitom na p. Kako je dalje $|OA| = |OA_1| = |OA_2|$, vrijedi $|OA_2| = |OA'|$, što povlači $A' = A_2$. □

Korolar 3.2. *Osna simetrija prostora ili simetrija prostora obzirom na pravac je izometrija.*

3.6. Rotacije prostora oko pravca

Neka je dan pravac p i točka $T \in M_3$ bilo koja točka koja ne leži na pravcu p. Točkom položimo ravninu α okomitu na pravac p. Točka O neka je probodište pravca p sa ravninom α (kao na slici).



Navodimo definiciju prema [4]:

Definicija 3.6. *Preslikavanje $T \to T'$ zove se rotacija prostora oko pravca p za kut φ i označava se sa r_p^{φ}. Vrijedi $r_p^{\varphi}(T) = T'$. Pravac p zovemo os rotacije.*

Vrijede sljedeća svojstva:

a) Točke pravca p su jedine fiksne točke rotacije r_p^{φ}.

b) Pravac p je jedini fiksni pravac rotacije.

c) Ravnine okomite na pravac p su jedine fiksne ravnine rotacije.

Navodimo korolar bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [3].

Korolar 3.3. *Svaka rotacija prostora oko osi je izometrija.*

Sve rotacije oko iste osi čine komutativnu grupu obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

3.7. Homotetija prostora

Definiramo je analogno kao i hometetiju ravnine. Prema [4] navodimo definiciju homotetije prostora:

Definicija 3.7. *Homotetija prostora M_3, s koeficijentom $k \neq 0$ i središtem $O \in M_3$, je preslikavanje $h : M_3 \to M_3$ koje svakoj točki $T \in M_3$ pridružuje točku $T' = h(T)$ tako da vrijedi $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$.*

Uobičajeno je pisati i $h = h(O, k)$.

Propozicija 3.9. *Svaka homotetija prostora bijektivno preslikava ravninu na njoj paralelnu ravninu.*

Dokaz
Neka je $h = h(O, k)$, O točka koja ne pripada ravnini α te pravci $p_1, p_2 \subset \alpha$. Pravci $h(p_1)$ i $h(p_2)$ određuju tada ravninu α'. Kako vrijedi da je $p_1 \parallel h(p_1)$ te $p_2 \parallel h(p_2)$, slijedi da su i ravnine α i α' paralelne što smo i trebali dokazati. $\square$

Primjer 3.2. *Kompozicija homotetija $h_1(O_1, k_1)$ i $h_2(O_2, k_2)$ takva da je $O_1 \neq O_2$ i $k_1 \cdot k_2 = 1$ je translacija.*

Rješenje:
Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka i $T' = (h_2 \circ h_1)(T)$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TT'} &= \overrightarrow{TO_2} + \overrightarrow{O_2T'} = \overrightarrow{TO_2} + \overrightarrow{O_2h_2(h_1(T))} \\
&= \overrightarrow{TO_2} + k_2\overrightarrow{O_2h_1(T)} = \overrightarrow{TO_2} + (\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1h_1(T)}) \\
&= \overrightarrow{TO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_2k_1\overrightarrow{O_1T}
\end{aligned}$$

Za $k_2 \cdot k_1 = 1$, odavde slijedi

$$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{TO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1T} = \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1}$$

i konačno

$$\overrightarrow{TT'} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2},$$

pa je $h_2 \circ h_1$ translacija za vektor $(1 - k_2)\overrightarrow{O_2O_1}$.

3.8. Preslikavanja sličnosti prostora

Prema [4] navodimo definiciju:

Definicija 3.8. *Preslikavanje $f : M_3 \to M_3$ s koeficijentom sličnosti $k > 0$, tako da za svake dvije točke $A, B \in M_3$ vrijedi $|f(A)f(B)| = k|AB|$, nazivamo preslikavanje sličnosti ili ekviformno preslikavanje.*

Uobičajeno je umjesto preslikavanje sličnosti govoriti samo sličnost.

Za sličnost vrijede sljedeća svojstva:

a) Sličnost s koeficijentom sličnosti 1 je izometrija.

b) Homotetija $h(O, k)$ je sličnost s koeficijentom $|k|$.

c) Kompozicija homotetije $h(O, k)$ i izometrije je sličnost s koeficijentom $|k|$

d) Svaka sličnost kompozicija je homotetije i izometrije.

e) Sve sličnosti prostora tvore grupu s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

Vrijedi i sljedeće, sličnost preslikava pravce na pravce te kružnice na kružnice.

3.9. Inverzija

Inverzija u prostoru, definira se analogno inverziji u ravnini.
Prema [4] navodimo sljedeću definiciju:

Definicija 3.9. *Neka je $O \in M_3$ čvrsta točka, a $R > 0$ zadani pozitivni broj. Preslikavanje*

$$\mathcal{I}_O^R : M_3 \backslash \{O\} \to M_3 \backslash \{O\}, T \mapsto T' = \mathcal{I}_O^R(T),$$

zove se inverzija s centrom O i polumjerom $R > 0$, ako su točke O, T i T' kolinearne, T i T' s iste strane točke O i ako vrijedi $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.
Sfera s centrom O polumjera R zove se sfera inverzije $\mathcal{I}_O^R$.

Sva svojstva koja ima inverzija u ravnini ima i inverzija u prostoru.

Propozicija 3.10. *Inverzija preslikava ravninu α, koja ne prolazi centrom inverzije O, u sferu koja prolazi centrom O.*

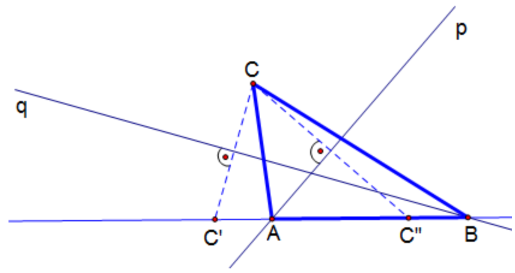
Dokaz
Neka je N nožište okomice spuštene iz O na α i N' inverzna slika točke N s obzirom na sferu $\sum^2(O, R)$. Ako je $T \in \alpha$ bilo koja točka, onda je restrikcija inverzije $\mathcal{I}_O$ na ravninu ONT inverzija u toj ravnini, pa slika T' točke T leži na onoj kružnici te ravnine kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar. Sve točke pravca TN preslikaju se na tu kružnicu. Dakle je slika ravnine α skup svih kružnica kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar, pa je $\mathcal{I}_O(\alpha)$ sfera dijametra $\overline{ON'}$. $\square$

4. Primjene preslikavanja

Preslikavanja koja smo do sada naveli mogu svoju primjenu naći u rješavanju raznih zadataka. Pokažimo kako možemo primjeniti preslikavanja na sljedećim zadatcima.

Zadatak 4.1. *U ravnini su nacrtani točka C, pravci p i q koji se sijeku, a C ne leži ni na jednom od pravaca. Konstruirajte trokut ABC kojemu je jedan vrh u zadanoj točki C, a kojem simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu A leži na p, a simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu B leži na q.*

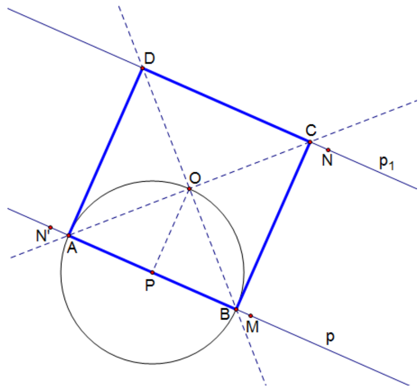
Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći osnu simetriju.
Točku C preslikamo osnom simetrijom preko pravca q i dobijemo točku C'. Isto tako, preslikamo je i preko pravca p te dobijemo točku C''. Tada pravac kroz te dvije točke, tj. pravac $C'C''$ siječe p u vrhu A, a q u vrhu B. Imamo traženi trokut ABC (Slika 19).



Slika 19.

Zadatak 4.2. *U ravnini su zadane tri nekolinearne točke M, N i O. Konstruirajte kvadrat kojemu je središte u točki O i kojemu nasuprotne stranice pripadaju pravcima koji prolaze točkama M i N.*

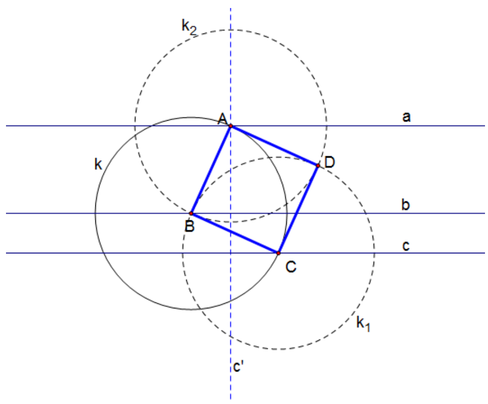
Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći centralnu simetriju.
Točku N centralnom simetrijom preslikamo preko točke O i dobijemo točku N'. Sada povučemo pravac kroz točke N' i M, nazovimo ga s p, te kroz točku N pravac paralelan s pravcem p, nazovimo ga s p_1. Iz točke O spustimo okomicu na p i dobijemo točku P. Duljina OP jednaka je polovini duljine stranice kvadrata. Oko P opišemo kružnicu radijusa $|OP|$ te dobijemo točke A i B u presjeku s pravcem p. Povučemo pravac AO, te u presjeku s pravcem p_1 dobijemo točku C. Isto tako, povučemo pravac BO, te u presjeku s pravcem p_1 dobijemo točku D. Imamo traženi kvadrat $ABCD$ (Slika 20).



Slika 20.

Zadatak 4.3. *U ravnini su nacrtana tri usporedna pravca a, b i c. Konstruirajte kvadrat $ABCD$ tako da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$.*

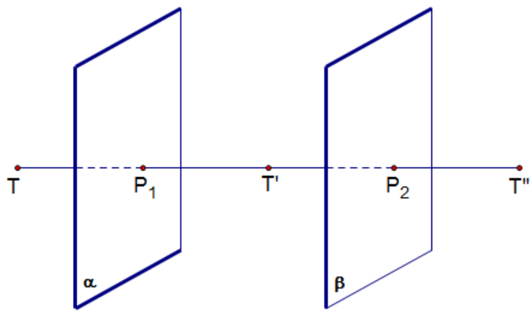
Rješenje:
Zadatak rješavamo koristeći rotaciju.
Odaberemo točku B s pravca b proizvoljno. Rotacijom točke B oko pravca c za kut od $90°$ dobijemo rotirani pravac c'. Pravci c' i a u presjeku daju točku A. Imamo jednu stranicu traženog kvadrata, to je stranica $\overline{AB}$. Oko točke B opišemo kružnicu k polumjera $\overline{AB}$ i u sjecištu s pravcem c dobivamo točku C. Dobivamo i drugu stranicu kvadrata $ABCD$, to je stranica $\overline{BC}$. Isto tako, iz vrha C opišemo kružnicu k_1 polumjera $\overline{AB}$, te iz vrha A kružnicu k_2 polumjera $\overline{AB}$. U sjecištu tih dvaju kružnica nalazi se vrh D traženog kvadrata. Imamo kvadrat $ABCD$ (Slika 21).



Slika 21.

Zadatak 4.4. *Dokažite ako su α i β paralelne ravnine, onda je $s_\beta \circ s_\alpha$ translacija prostora.*

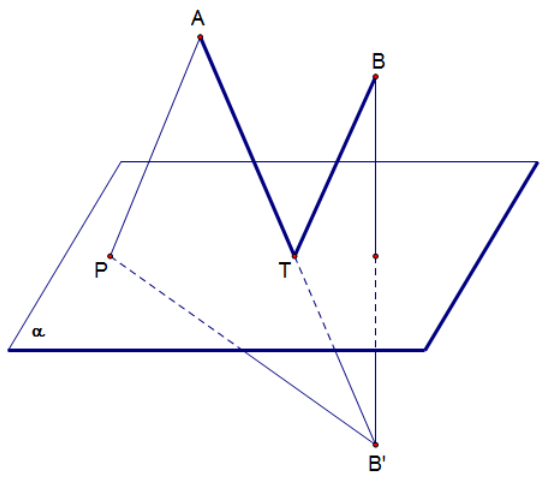
Rješenje:



Slika 22.

Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka, $T' = s_\alpha(T)$, $T'' = (s_\beta \circ s_\alpha)(T)$ (slika 22). Neka je d udaljenost ravnina α i β. Iz definicije planarne simetrije, tj. simetrije prostora obzirom na ravninu slijedi $|TT''| = |P_1T'| + |T'P_2| = 2|P_1P_2| = 2d$. Dakle je $s_\beta \circ s_\alpha$ translacija za vektor okomit na ravnine α i β kojemu je modul jednak $2d$.

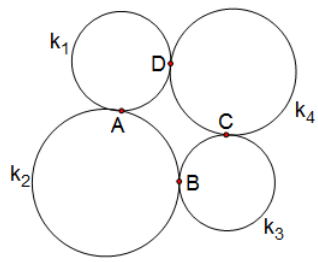
Zadatak 4.5. *Zadana je ravina α i točke $A, B \notin \alpha$. Odredite u α točku T tako da je $|AT| + |TB|$ minimalan.*



Slika 23.

Rješenje:
Ako su točke A i B s različitih strana ravnine α, onda je tražena točka probodište T pravca AB s ravninom α. Neka su A i B s iste strane od α, $B' = s_\alpha(B)$ i T probodište pravca AB' s α. Tvrdimo da je T tražena točka (slika 23). Kako je s_α izometrija, to je $|BT| = |B'T|$, pa je $|AT| + |TB| = |AB'|$. Ako je $P \in \alpha$ neka druga točka onda prema nejednakosti trokuta slijedi $|AP| + |PB'| > |AB'|$. Zbog $|PB| = |PB'|$ je $|AP| + |PB| > |AB'|$, dakle $|AT| + |TB| < |AP| + |PB|$ i tvrdnja je dokazana.

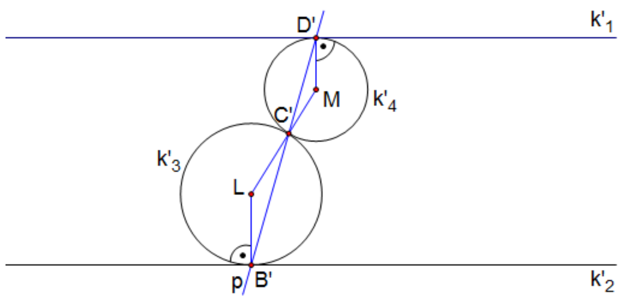
Zadatak 4.6. *Od četiri kružnice, dvije po dvije se diraju izvana. Dokažite da četiri dirališta tih kružnica leže na jednoj kružnici.*



Slika 24.

Rješenje:

Koristimo oznake kao na slici 24. Neka je inverzija s centrom u točki A radijusa R, $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{R}} = \mathcal{I}$. Tom se inverzijom kružnice k_1 i k_2 preslikaju u paralelne pravce $k_1' = \mathcal{I}_A(k_1)$ i $k_2' = \mathcal{I}_A(k_2)$, dok se kružnice k_3 i k_4 preslikaju u kružnice $k_3' = \mathcal{I}_A(k_3)$ i $k_4' = \mathcal{I}_A(k_4)$ koje se diraju u točki $C' = \mathcal{I}_A(C)$. Kružnica k_3' dira k_2' u točki $B' = \mathcal{I}_A(B)$, a k_4' dira k_1' u točki $D' = \mathcal{I}_A(D)$. Potrebno je pokazati da su točke B', C' i D' kolinearne.



Označimo sa M i L središta kružnica k_3' i k_4'. Kako je $MD' \parallel LB'$, vrijedi da je $\angle C'MD = \angle B'LC'$. Vrijedi $|MC'| = |MD'|$ pa je zbog toga $\angle MC'D' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\angle C'MD'$. Slično, $\angle B'C'L = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\angle B'LC'$, pa je $\angle MC'D' = \angle B'C'L$, što povlači kolinearnost traženih točaka. Budući inverzija čuva dodir i kako se inverzijom pravac p preslika u kružnicu koja prolazi centrom inverzije, dobivamo traženu kružnicu koja prolazi točkama A, B, C, D.

Literatura

[1] D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija, skripta, 2007.

[2] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 1994.

[3] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.

[4] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika II, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] M. Pavleković, Metodika nastave matematike s informatikom I, Element, Zagreb, 1997.

[6] http://e.math.hr

Sažetak

U diplomskom radu se proučavaju preslikavanja ravnine i prostora te njihove primjene. U radu je pokazana sukladnost zadanih figura te su objašnjene transformacije ravnine koje se vežu uz sukladnost, tj. izometrije ravnine.
Promatrane su sljedeće izometrije ravnine: osna simetrija, rotacija, centralna simetrija, translacija i produkt osne simetrije i translacije, tzv. klizna simetrija. Definirana je i sličnost trokuta te neka preslikavanja sličnosti poput homotetije i inverzije. Navedene izometrije i preslikavanja sličnosti poopćena su na prostor te su prikazane primjene preslikavanja pri rješavanju zadataka.

Summary

Transferring of plane and space and application

The thesis is studying the transferring of plane and space and their applications. The thesis shows the compliance of the given figures, and explains the transformation of the plane that are associated with compliance, i.e. plane isometry. The following isometrics planes were observed: axial symmetry, rotation, the central symmetry, translation and product of axial symmetry and translation, the so called sliding symmetry. The triangle similarity and some other similarities have been defined, such as homothety and inversion. These isometries and transfers of similarities are generalized to the area and the applications of transferring in solving tasks has also been shown.

Životopis

Rođen je 19. studenoga 1985. godine u Đakovu. Osnovnoškolsko obrazovanje završio u Đakovu. Srednjoškolsko obrazovanje stekao u Srednjoj Strukovnoj školi Braće Radića u Đakovu. Od 2004. godine student je Odjela za matematiku u Osijeku. Završio je sveučilišni preddiplomski studij matematike 2008. godine uz završni rad "Potpuni metrički prostori" pod mentorstvom prof. dr. sc. Dragana Jukića.