Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Darija Primorac

BROJEVI U DREVNIM CIVILIZACIJAMA

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Darija Primorac

BROJEVI U DREVNIM CIVILIZACIJAMA

Diplomski rad

Mentor:
Doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2012.

Sadržaj

1. Uvod **4**

2. Egipat **6**

2.1. Povijesni pregled egipatske matematike 6

2.2. Egipatske znamenke 7

2.3. Primjeri računanja 9

2.4. Egipatski kalendar 12

3. Babilon **14**

3.1. Babilonski brojevi i brojevni sustav 14

3.2. Tablice množenja s 10 i s 5 15

3.3. Tablica recipročnih vrijednosti 18

3.4. Babilonski kalendar 19

4. Grčka **20**

4.1. Akrofonski sustav 20

4.2. Alfabetski sustav 21

4.3. Grčki kalendar 23

5. Rim **24**

5.1. Pravila zapisivanja rimskih brojeva 24

5.2. Upotreba rimskih brojeva 25

5.3. Rimski kalendar 26

6. Indija **29**

6.1. Brojevi u Indiji 29

6.2. Indijski kalendar 30

7. Arapi **32**

7.1. Brojevi kod Arapa 32

7.2. Islamski kalendar 34

8. Maje **36**
8.1. Povijesni pregled Maja 36
8.2. Brojevi kod Maja 37
8.3. Majanski kalendar 39

9. Inke **41**
9.1. Povijesni pregled Inka 41
9.2. Brojevi kod Inka 41
9.3. Kalendar Inka 45

Literatura **46**

1. Uvod

Brojevi su važan dio naše svakodnevice, a kako su izgledali u prošlosti prikazat ću u diplomskom radu Brojevi u drevnim civilizacijama. Ovdje su predstavljene neke od poznatih činjenica o brojevima kod najpoznatijih drevnih naroda staroga svijeta, kronološkim slijedom: Egipćana, Babilonaca, Grka, Rimljana, Indijaca i Arapa te civilizacija novoga svijeta: Maja i Inka. Obzirom na korelaciju teme s povijesnim podatcima nužan je i kratak povijesni pregled.

Egipatsko se carstvo protezalo duž rijeke Nil. Značajniji uzlet počinje ujedinjavanjem Gornjeg i Donjeg carstva oko 3050. g. pr. Kr. i traje sve do raspada carstva oko 300. g. pr. Kr. Babilonsko carstvo je osnovano 1867. g. pr. Kr. i trajalo je sve do asirskog osvajanja područja 911. pr. Kr sve do 608. pr. Kr. kada Babilonci opet postaju nezavisni te tijekom vladanja Nabukodonozora kreću veliki radovi na izgradnji. U 5. st. pr. Kr. Babilon pada pod vlast Perzije i kasnije pod vlast Grka. Grčka civilizacija je postojala od 8. st. pr. Kr. pa sve do kraja antike, dakle do 6 st. po. Kr. Rimska pak civilizacija je postojala od 8 st. pr. Kr. kada su po legendi Romul i Rem osnovali grad Rim, a trajala je sve do pada Zapadnog rimskog carstva 476. godine. Civilizacija na području Indije po zapisima postoji od 1500. g. pr. Kr., a u različitim političkim oblicima traje do danas. Arapi su skupina semitskih naroda koji se prvi put pojavljuju kao civilizacija u 7. st. pr. Kr., no istinski uzlet doživljavaju nakon prihvaćanja islama u 7. st. po. Kr. kada ujedinjeni osvajaju cijelu sjevernu Afriku i dijelove Azije i Europe.

Uočljivo je da drevni narodi nisu imali gotovo nikakve podudarnosti u svom razvoju zapisivanja brojeva – osim ako nije došlo do preuzimanja nekog do tada već poznatog znanja.

Mnogi narodi koristili su neku od varijanti desetičnog brojevnog sustava, primjerice Egipćani, Indijci i Inke, dok su ga Arapi preuzeli od Indijaca. Oni su uz to koristili i seksagezimalni brojevni sustav s bazom 60 od Babilonaca koji su ga jedini koristili. Neki od naroda koristili su i više različitih brojevnih sustava: Grci akrofonski koji je imao dvije baze, primarnu 10 i sekundarnu 5, i alfabetsku koja uopće nije imala bazu.

Broj nula bio je općenita nepoznanica kod drevnih naroda. Nulu su poznavali samo

Indijci, Arapi su je preuzeli od Indijaca te, Maje.

Premda je danas uobičajeno da broj simbola za zapis znamenaka odgovara broju elemenata baze brojevnog sustava, kod drevnih naroda to nije bilo tako. Dok su Babilonci svoj seksagezimalni brojevni sustav zapisivali sa svega dva simbola, a mogli su zapisati proizvoljno veliki broj, dotle su Egipćani u svom hijeratskom brojevnom sustavu imali čak 36 simbola, a najveći broj koji je bilo moguće zapisati tim sustavom je bio tek 9999.

Osim Babilonaca, broj bilo koje veličine su mogli zapisati i Grci u svom alfabetskom brojevnom sustavu, Indijci u brojevnom sustavu nagari, kao i Arapi, te Maje i Inke.

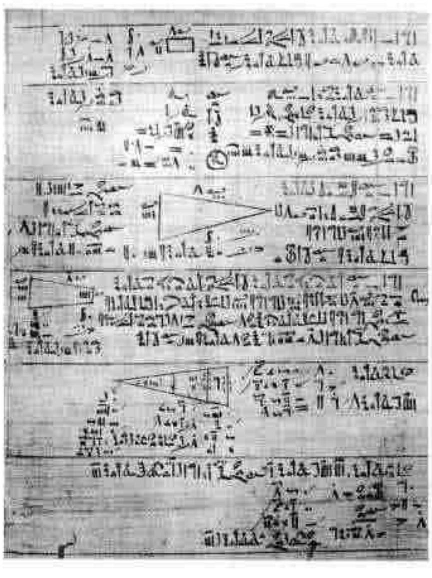
Zapis razlomka su razvile tek četiri civilizacije: Egipat, Babilon, Grčka i Indija, dok su ih Arapi preuzeli od Indijaca.

2. Egipat

2.1. Povijesni pregled egipatske matematike

Oko 3000. godine pr. Kr. dva drevna naroda su se spojila u egipatsku naciju. Narod je nastanjivao područje sliva rijeke Nil a glavna privredna djelatnost je bila obrada zemlje koja je ovisila o poplavama Nila, koje su donosile plodan mulj. Zbog toga je znanje o početku kišnih sezona bilo od životne važnosti, te se velika važnost posvećivala astronomiji zbog izrade kalendara. Kako je egipatski narod zauzimao veliko geografsko područje, bilo je važno imati učinkovitu državnu administraciju zbog naplate poreza i zbog ponovnog označavanja zemljišnih čestica nakon što bi se Nil povukao.

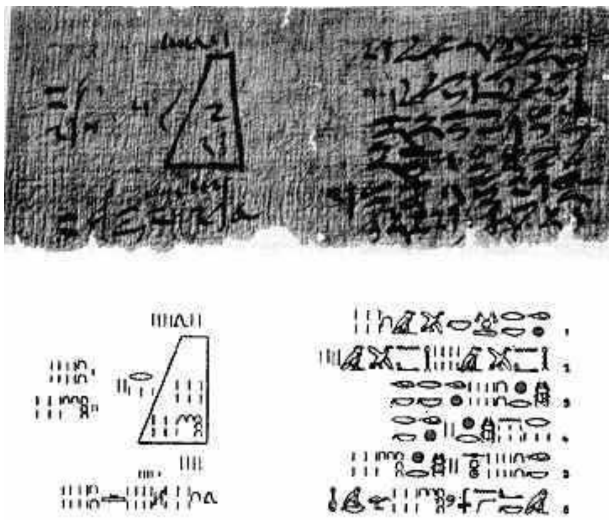
Do 3000. pr. Kr. Egipćani su već razvili hijeroglife, koji su služili kako za pisanje tekstova tako i za oznake znamenaka. Hijeroglifi nisu bili pogodni za aritmetiku, zbrajanje je bilo donekle lagano, dok je oduzimanje i množenje bilo komplicirano. Kako su potrebe trgovine zahtijevale računanje s razlomcima, Egipćani su matematiku razvili u tom pravcu, i to tako da su množenja i dijeljenja zahtijevala jedino zbrajanje.



Slika 1. *Rhindov papirus ili Ahmesova računica.*

Rani hijeroglifski brojevi pronađeni u hramovima i piramidama su davali malo podataka o brojevima i načinima računanja, te se vjeruje da su pisari u starom Egiptu imali papiruse na kojima su bili zapisani postupci računanja. Danas su sačuvana svega dva takva dokumenta, Rhindov papirus (Ahmesov papirus, Ahmesova računica) te Moskovski papirus.

Rhindov papirus ime je dobio po škotskom egiptologu Henryju Rhindu koji je kupio papirus u Luxoru 1858. godine. Sam papirus je smotak duljine 6 metara i širine $\frac{1}{3}$ metra, a napisao ga je oko 1650. godine pr. Kr. pisar Ahmes, po kojem se papirus nekada zove Ahmesova računica, koji kaže da je taj papirus kopija oko 200 godina starog dokumenta. Dakle, originalni papirus datira iz 1850. godine pr. Kr. Papirus se sastoji od 87 problema a danas se čuva u Britanskom muzeju u Londonu.



Slika 2. *Moskovski papirus.*

Moskovski papirus iz istog je razdoblja kao i Rhindov papirus. Nije poznat autor papirusa, a čuva se u Muzeju lijepih umjetnosti u Moskvi. Papirus sadrži 25 problema.

2.2. Egipatske znamenke

Egipćani su imali nepozicijski brojevni sustav s bazom 10. To znači da su imali različite simbole za znamenke jedan, deset, sto, tisuću, deset tisuća, sto tisuća i milijun.

Slika 3. *Egipatske znamenke.*

Na primjer, kako bi napisali broj 276, bilo je potrebno ukupno 15 simbola: 2 simbola za sto, 7 simbola za 10 i 6 simbola za jedan.

Slika 4. *Prikaz broja 276.*

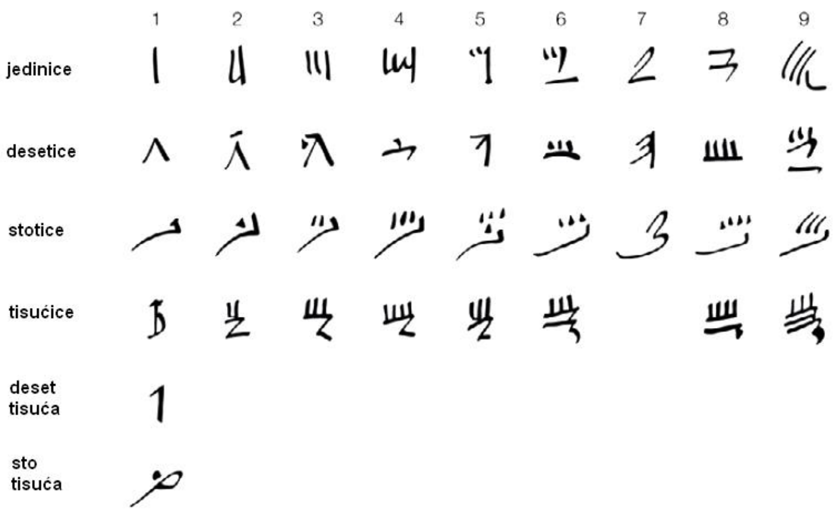
Uočava se da je zbrajanje bilo jednostavno - dodavali su se simboli dok se nije došlo do deset istih simbola, a potom su se ti simboli mijenjali simbolom više vrijednosti.

Razlomci su bili ograničeni na jedinične razlomke, odnosno razlomke s brojnikom 1, osim dva izuzetka, $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$. Jedinični razlomci oblika $\frac{1}{n}$ su se prikazivali hijeroglifima stavljanjem simbola "usta" iznad broja nazivnika. Primjerice, brojevi $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{249}$ bi se prikazali ovako

Slika 5. *Razlomci* $\frac{1}{3}$ *i* $\frac{1}{249}$.

Treba napomenuti da simboli nisu ostali jednaki tijekom cijelog egipatskog carstva već su se tijekom vremena mijenjali.

Drugi brojevni sustav pisanja, kojega su Egipćani počeli koristiti nakon pronalaska papirusa, je tzv. hijeratski sustav. Te su znamenke omogućavale pisanje brojeva u kompaktnijoj formi, premda je i dalje trebalo memorirati dosta simbola. Sustav je imao posebne simbole za jedinice, desetice, stotice i tisućice, dok su deset tisuća i sto tisuća imale po jedan simbol.



Slika 6. *Hijeratske znamenke.*

Dakako, i hijeratski simboli su se mijenjali tijekom vremena.

2.3. Primjeri računanja

Ahmes u svojoj računici ilustrira egipatsku metodu množenja brojeva. Pretpostavimo da treba pomnožiti 41 i 59. Zapišimo oba broja u tablicu, te ispod prvog broja pišemo brojeve 1, 2, 4, 8, ... dok ne dostignemo drugi broj, a ispod drugog broja pišemo isti broj dodan samom sebi, potom taj rezultat dodan samom sebi i tako dalje.

41	59
1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

Kako je $2 \cdot 32 = 64 > 59$, postupak zaustavljamo. Sada nizom oduzimanja rastavimo broj 41: $41 - 32 = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 1 = 0$, pa možemo zapisati $41 = 32 + 8 + 1$. Sada u gornjoj tablici označimo redove s brojevima 1, 8, 32 u lijevom stupcu i zbrojimo pripadajuće brojeve iz desnog stupca:

41	59	
1	59	–
2	118	
4	236	
8	472	–
16	944	
32	1888	–
	2419	

Dijeljenje se provodilo na sličan način. Ukoliko, primjerice, trebamo podijeliti 1495 s 65, u prvi stupac bi pisali brojeve 1, 2, 4, 8,..., dok bi u drugi pisali 65, 130, 260,... dok ne bi dostigli djeljenik:

1	65
2	130
4	260
8	520
16	1040

Lagano se može provjeriti da je $1495 = 1040 + 260 + 130 + 65$, pa označimo redove s tim pribrojnicima, i zbrojimo pripadajuće brojeve iz lijevog stupca:

1	65	–
2	130	–
4	260	–
8	520	
16	1040	–
23		

pa je $1495 : 65 = 23$.

Ostaje još pitanje što ako brojevi nisu djeljivi. Tada egipatska metoda dijeljenja dovodi do razlomaka. Da bi to ilustrirali, podijelimo 1500 sa 65, kao maloprije:

1	65	–
2	130	–
4	260	–
8	520	
16	1040	–
23		

pa, kako je $1500 = 1040 + 260 + 130 + 65 + \underline{5}$, a 5 je dodan jer je to višak iznad 1495, to je rezultat dijeljenja 1500 sa 65 broj $23\frac{5}{65} = 23\frac{1}{13}$.

Sljedeći je problem kako množiti i dijeliti brojeve koji imaju razlomke. Prva važna stvar za napomenuti je da su Egipćani koristili jedino razlomke s brojnikom 1, te da bi s njima računali, trebali su tablicu koja bi dvostruke razlomke pretvarala u zbroj jediničnih razlomaka. Vjerojatno izgleda da su primjerice dvostruku $\frac{1}{5}$ prikazivali kao $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, ali nisu. Dvostruke jedinične razlomke su uvijek prikazivali kao zbroj dvaju različitih jediničnih, pa bi tako dvostruku $\frac{1}{5}$ prikazali kao $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Rhindov papirus daje tablicu za dupliranje jediničnih razlomaka $\frac{1}{n}$ za neparne n između 5 i 101; za parne n nije dano u tablici jer je $n = 2m$. Tablica dupliranja počinje ovako:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{5} & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \\
\frac{1}{11} & \\
\frac{1}{13} & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \\
\frac{1}{17} & \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}
\end{array}$$

Uočeno je da nema grešaka u tablici. Čini se da je Ahmes bio ekspert u računanju i papirus nije bio samo vježba prepisivanja. Ipak, Papirus sadrži nekoliko grešaka, ali su one greške u računanju, ne prepisivanja.

Da bi ilustrirali korištenje tablice, riješit ćemo 21. problem iz Rhindovog papirusa, koji glasi: Dopuni $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{15}$ do 1.

U modernoj notaciji, to bi značilo da treba pronaći x takav da vrijedi

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} + x = 1.$$

Pomnožimo li gornje s 15, dobivamo

$$10 + 1 + y = 15,$$

odakle slijedi $y = 4$, što znači da zadan problem ima rješenje dvostruko dvostrukog $\frac{1}{15}$. Iz tablice pročitamo da je dvostruko $\frac{1}{15}$ iznosi $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$, te dupliranjem toga dobivamo $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$, što je rješenje problema 21.

Pogledajmo sada kako se množe brojevi, na primjeru množenja $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ i $30 + \frac{1}{3}$.

1	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
2	$2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = 3 + \frac{1}{15}$
4	$6 + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
8	$12 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$
16	$24 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}$

Ovdje je redak koji započinje s $\frac{2}{3}$ izračunat kao $\frac{2}{3}$ od 1 je $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{3}$ je dvostruko $\frac{1}{9}$ što je $\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{5}$ je dvostruko $\frac{1}{15}$ što je $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$.

Sada nađemo brojeve u lijevom stupcu koje ćemo zbrojiti; to su oni u označenim redovima:

1	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	
2	$2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = 3 + \frac{1}{15}$	–
4	$6 + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	–
8	$12 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$	–
16	$24 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	–
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}$	–

pa kada zbrojimo, dobijemo $46 + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{36}$.

2.4. Egipatski kalendar

Drevni egipatski kalendar je imao godinu dugu 365 dana podijeljenu na 12 mjeseci, a svaki je mjesec imao 30 dana. Preostalih 5 dana su se dodavali na kraju godine, nakon isteka 360 dana. Svaki je mjesec bio razdijeljen u 3 tjedna duljine 10 dana. Obzirom da je kalendar bio za četvrtinu dana kraći od solarne godine, astronomski su događaji malo odstupali tijekom vremena.

Tablica iz vremena kraljevstva prve dinastije Djer, oko 3000 g. pr. Kr., je od ranih egiptologa prepoznata kao prvi, premda nesiguran i spekulativan, dokaz da su već tada Egipćani povezivali pojavljivanje Sirijusa i početak godine.

Egipćani su možda i ranije koristili kalendar koji je dodavao dodatne mjesece kojima bi regulirali vrijeme do pojavljivanja Sirijusa ili izlijevanja Nila. U to su vrijeme godinu dijelili na 3 godišnja doba: vrijeme izlijevanja Nila, vrijeme rasta (zima) i vrijeme žetve (ljeto).

Poznato je da se Sirijus pojavi na istom mjestu svakih 1460 godina. Razlika između sezonske godine i civilne godine je tada 365 dana u ciklusu duljine 1460 godina, ili jedan dan u 4 godine. Slično, Egipćani su imali 309 mjeseci tijekom 9125 dana ili 25 egipatskih godina, što je kasnije iskorišteno za konstrukciju drugog, lunarnog kalendara koji nije ovisio o opažanjima.

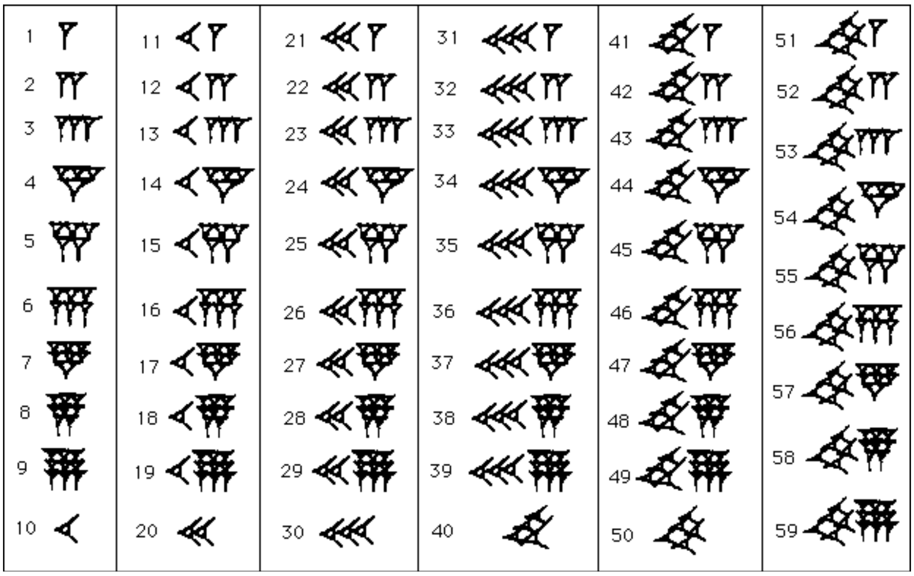
Veći dio egipatske povijesti, mjeseci nisu imali imena, već su zvani rednim brojem unutar sezone u kojoj su se nalazili. No, već u srednjem kraljevstvu svaki mjesec ima svoje ime, što konačno evoulira u imena u novom kraljevstvu, imena koja su u heleniziranom olbiku poslužila Ptolomeju za kronologiju u njegovu Almagestu.

3. Babilon

3.1. Babilonski brojevi i brojevni sustav

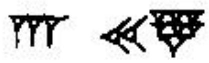
Oko 2000. godine pr. Kr. babilonska je civilizacija preuzela Mezopotamiju od Sumerana. Babilonci su imali izvanredne tablice kvadrata i recipročnih vrijednosti brojeva, te su mogli riješiti čak i neke algebarske jednadžbe trećeg stupnja.

Poznato je da su Sumerani koristili brojevni sustav s bazom 60, tj. seksagezimalni sustav davno prije negoli su Babilonci prevladali na tom području. Babilonci su nastavili koristiti isti brojevni sustav, ali su ga preradili da postane pozicijski, no, kao ni Sumerani, nisu poznavali broj nula. Sam zapis se sastojao od dva simbola, od kojih je jedan predstavljao 1 a drugi 10, dok su se veće vrijednosti prikazivale kombinacijom ta dva, kao što je prikazano na donjoj slici.



Slika 7. *Babilonski brojevi od 1 do 59.*

Da bi se prikazao bilo koji broj od 1 do 9, simbol za 1 se napisao isti broj puta. Da bi se, pak, prikazali brojevi od 10 do 50, koristio se simbol za 10 napisan potreban broj puta. Zapisivanje brojeva većih od 59 već zahtijeva korištenje pozicijskog sustava, pa se znamenka s većom potencijom piše lijevo od znamenke s manjom potencijom, kao što danas radimo u dekadskom pozicijskom sustavu. Primjerice, kako je $207 = 3 \cdot 60^1 + 27$, taj se broj zapisivao kao $3, 27$, odnosno



Slika 8. *Broj 207 = 3,27.*

Babilonci nisu poznavali broj nula, pa su mjesto gdje bi bila nula označavali velikom prazninom. Primjerice, broj $14423 = 4 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 23 = 4, 0, 23$ bi prikazali ovako:

Slika 9. *Broj 14222=4,0,23.*

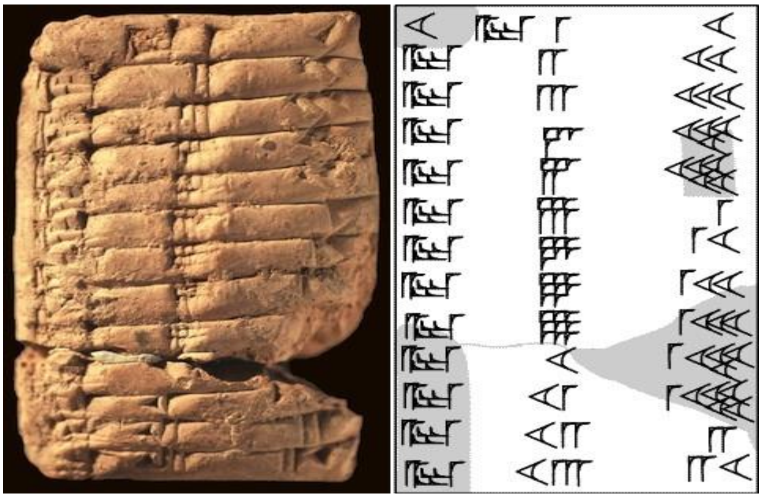
Kao i kod dekadskog pozicijskog brojevnog sustava, niti ovdje nema teorijske granice veličine broja koji je moguće prikazati.

Zbrajanje i oduzimanje se vrlo lagano provodilo, dok su za množenje i dijeljenje koristili tablice kvadrata i tablice recipročnih vrijednosti, pri čemu su razlomci bili zapisani kao "decimalni" brojevi.

Slika 10. *Glinena pločica iz Babilona s matematičkom tablicom.*

3.2. Tablice množenja s 10 i s 5

Dok množenje s 10 u dekadskom sustavu nije komplicirano, u seksagezimalnom ima detalja na koje treba paziti. Donja slika prikazuje tablicu množenja brojem 10. Preciznije, tablica prikazuje množenje broja 10 brojevima od 1 do 13, a sama se tablica čuva u Muzeju bliskog istoka u Berlinu.



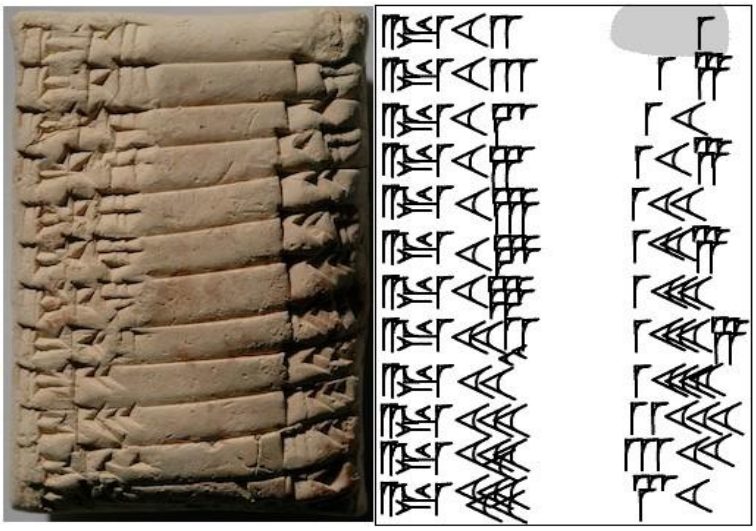
Slika 11. *Tablica množenja s 10.*

Njen sadržaj, napisan hrvatskim jezikom i modernom notacijom, je:

10 a-ra (puta)	1	10
puta	2	20
puta	3	30
	⋮	
puta	6	1,,0
puta	7	1,,10
	⋮	
puta	13	2,,10

Osim te tablice, zanimljive su i dvije tablice množenja s brojem 5, a čuvaju se u Babilonskoj kolekciji na Yaleu. Tablice prikazuju množenje broja 5 brojevima od 1 do 19, te potom s 20, 30, 40 i 50.

Slika 12. *Tablica množenja broja 5 s brojevima od 1 do 11.*



Slika 13. *Tablica množenja broja 5 s brojevima od 12 do 19, te 20, 30, 40 i 50.*

Sadržaj prve od ove dvije tablice je:

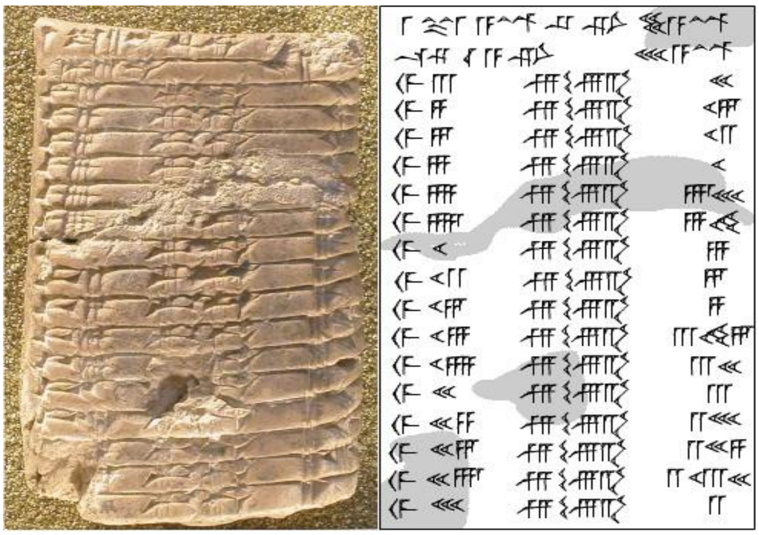
5 puta	1	5
puta	2	10
	⋮	
puta	11	55

a druge, na kojoj se vidi da je 19 prikazan kao $20 - 1$ umjesto $10 + 9$:

puta	12	1,,0
puta	13	1,,5
	⋮	
puta	19	1,,35
	⋮	
puta	20	1,,40
puta	30	2,,30
puta	40	3,,20
puta	50	4,,10

3.3. Tablica recipročnih vrijednosti

Standardne babilonske tablice recipročnih vrijednosti su tabelirale recipročne vrijednosti seksagezimalnih brojeva $\frac{3}{2}$, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 1,,0, 1,,4, 1,,21. Recipročne vrijednosti su zapravo bili seksagezimalni brojevi koji množeni s tabeliranim brojem daju 1. Neke tablice su imale i neke druge brojeve. Glavno je pravilo da brojevi moraju biti "regularni", odnosno da imaju 2,3 ili 5 kao prim-faktore.



Slika 14. *Tablica recipročnih vrijednosti.*

Gornja tablica se čuva u Schoyenovoj kolekciji, a sadržaj joj je:

1, od toga	$\frac{2}{3}$	je	40
od toga	pola	je	30
recipročno od	3	je	20
recipročno od	4	je	15
recipročno od	5	je	12
recipročno od	6	je	10
recipročno od	8	je	7,,30
recipročno od	8	je	7,,30
recipročno od	9	je	6,,40
	⋮		
recipročno od	27	je	2,,13,,20
recipročno od	30	je	2

3.4. Babilonski kalendar

Babilonski je kalendar bio lunisolarni. Godina je sadržavala 12 mjeseci, a svaki je započinjao kada bi se prvi puta pojavio mjesec mlađak na horizontu. Kalendar je u suštini baziran na sumeranskom kalendaru.

Godina je počinjala u proljeće i bila je razdijeljena na početni, srednji i završni dio svaki duljine 4 mjeseca. Tijekom 6. stoljeća pr. Kr. babilonska se imena mjeseca prihvaćaju u židovskom kalendaru. Vjeruje se da Sirijski kalendar koristi ista imena za mjesece.

Sve do 5 st. pr. Kr. kalendar je bio u potpunosti temeljen na astronomskim opažanjima, ali početkom 499. g. pr. Kr. se godina definira kao ciklus koji tijekom 19 godina ima 235 mjeseci. Premda se to obično zove Metonov ciklus, čini se da je Meton o ciklusu naučio od babilonskih astronoma.

Slika 15. *Prikaz babilonskog kalendara.*

4. Grčka

Čini se da su Grci znali koristili brojeve prije 2000. godine pr. Kr. Postoje manje varijacije u brojevnim sustavima između različitih država, stoga ćemo predstaviti standardni model zapisa. Grci su koristili dva glavna brojevna sustava, akrofonski i alfabetski.

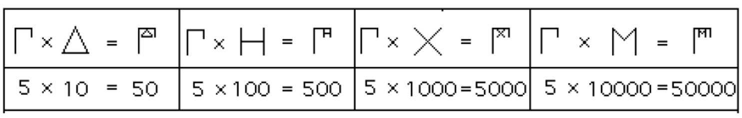
4.1. Akrofonski sustav

U akrofonskom sustavu, broj 1 je prikazan okomitom ravnom crtom. Broj 10 i njegove potencije su pridružene simbolima koji su prvo slovo njihovog imena, a odatle je i sustav dobio ime. Za broj 5 akrofonski simbol nije onaj za koji bi se u prvi mah trebalo činiti da bi bio; simbol za broj 5 nije Π, a razlog tome bi mogao biti da se alfabet promijenio nakon što su simboli za znamenke čvrsto usvojeni.

I	Γ	Δ	Η	Χ	Μ
1	Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
	Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
	5	10	100	1000	10000

Slika 16. *Grčke akrofonske znamenke.*

Kombinacijom simbola za 5 i simbola za potencije broja 10 se dobiju njihovi umnošci kako je prikazano u donjoj tablici. Postoje još neke kombinacije za zapisivanje brojeva 50, 500, 5000 i 50000, ali su varijacije prikazanih.



Slika 17. *Grčki akrofonski simboli za potencije broja 10 pomnoženih s 5.*

Akrofonski je sustav imao 6 različitih simbola. Osim za umnoške broja 5 s potencijama broja 10, ostali su simboli nastali kombiniranjem ovih 6 pravilom dodavanja. Prvih 10 brojeva je prikazano na donjoj slici.

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Slika 18. *Brojevi u rasponu 1-10.*

Akrofonski sustav nije bio mjestno-pozicijski niti dekadski. Ali kako su simboli bili vezani za broj 5 i potencije broja 10, obično se kaže da je imao primarnu bazu 10 i sekundarnu bazu 5.

Pozicijski je bio u smislu da je pisanje simbola smanjivalo njihov red pišući ih s lijeva na desno. Tako su brojevi 108 i 256 bili zapisani kao

ΗΓΙΙΙ ΗΗ𐅄ΓΙ

Slika 19. *Brojevi 108 i 256.*

Pravila za zapisivanje brojeva su stavila ograničenja da se bilo koja potencija broja 10 može upotrijebiti maksimalno 4 puta, dok se simbol za umnožak broja 5 s potencijom broja 10 može upotrijebiti najviše jednom. Zbog toga je najveći broj koji se može zapisati 99999.

4.2. Alfabetski sustav

Drugi brojevni sustav kod Grka bio je alfabetski sustav. Taj sustav ima više numeričkih simbola u usporedbi s akrofonskim, pa je svih 27 dostupnih slova alfabeta bilo pridijeljeno različitim brojevima, te je još postojao ekstra simbol za 10000.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϟ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Slika 20. *Grčki alfabetski sustav.*

Tako bi brojeve od 11 do 19 zapisali na sljedeći način:

ια	ιβ	ιγ	ιδ	ιε	ιϛ	ιζ	ιη	ιθ
11	12	13	14	15	16	17	18	19

Slika 21. *Brojevi u rasponu 11-19.*

Veće brojeve zapisivali bi na isti način. Na sljedećoj slici je zapisan broj 269.

ΣΞΘ
269

Slika 22. *Broj 269.*

Kao ni akrofonski, niti ovo nije bio pozicijski sustav. U njemu nema niti baze, niti ima nulu. Pozicijska priroda je potpuno nepotrebna, jer svaki simbol ima svoju apsolutnu vrijednost. Ipak, Grci su prilikom zapisivanja brojeva pazili da s lijeva na desno opada red, pa se 108 zapisivao kao PH ili $\rho\eta$.

Za brojeve veće od 999, bili su dizajnirani kompozitni simboli. Prefix ι u predeksponentu ili predindeksu bilo kojeg simbola od 1 do 9 je značilo njegovo množenje s 1000.

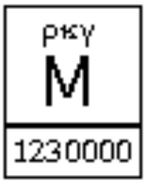
ʹΑ, ͵Α, ʹα, ͵α	ʹΒ, ͵Β, ʹβ, ͵β	ʹΓ, ͵Γ, ʹγ, ͵γ	ʹΔ, ͵Δ, ʹδ, ͵δ	ʹΕ, ͵Ε, ʹε, ͵ε	ʹϚ, ͵Ϛ, ʹς, ͵ς	ʹΖ, ͵Ζ, ʹζ, ͵ζ	ʹΗ, ͵Η, ʹη, ͵η	ʹΘ, ͵Θ, ʹθ, ͵θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Slika 23. *Alfabetski sustav za umnoške s 1000.*

To za sada diže granicu prikazivanja brojeva do 9999. Za sljedeći broj, 10000, se koristi simbol za mirijadu M, koji se koristio u dva različita oblika. Množenje s mirijadom se prikazivalo tako da se broj kojim se množi pisao ispred mirijade, pa se 90000 pisalo kao ΘM, a kombiniranjem svih pravila bi se broj 12345678 pisao kao $^{\iota}$ΑΣΛΔΜ$^{\iota}$ΕΧΟΗ.

Drugi oblik korištenja mirijade je da se iznad nje napiše slovo koje tada označava potenciju mirijade, što je pravilo koje je uveo Apolon da bi se mogli zapisivati veliki brojevi. Tako bi $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ označavalo 10000^2. Kako je potencija mirijade bila napisana ispred znamenki na koje se odnosi, da bi se znalo dokle djeluje, koristio se simbol $\chi^{\alpha\iota}$.

Primjenjujući sva pravila broj 1230000 je prikazan na sljedećoj slici



Slika 24. *Broj 1230000.*

Broj 1234567890123456 bi se, pak, zapisao kao

$$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ {}^{\iota}\mathrm{A}\Lambda\Sigma\Delta\chi^{\alpha\iota}\ \ \overset{\beta}{\mathrm{M}}\ {}^{\iota}\mathrm{EXOH}\chi^{\alpha\iota}\ \ \overset{\alpha}{\mathrm{M}}\ {}^{\iota}\Theta\mathrm{IB}\chi^{\alpha\iota}\ {}^{\iota}\Gamma\mathrm{YN}{/\!\!\lfloor}$$

4.3. Grčki kalendar

U drevnoj Grčkoj nije bilo jedinstvenog kalendara, već je svaki grad-država imao vlastiti kalendar. Poznatiji od tih kalendara je onaj iz Atene. Godina se sastojala od 12 mjeseci koji su naizmjenično imali 29 ili 30 dana. Svaki je mjesec bio podijeljen na 3 tjedna od 10 + 10 + 10 ili 10 + 10 + 9 dana. Dani u mjesecu imali su ime prema poziciji unutar tjedna, tako bi se 12. dan nekog mjeseca zvao "2. dan srednjeg tjedna", osim prvog i zadnjeg dana mjeseca, koji su se tako i zvali. Zanimljivo je da su se dani u zadnjem tjednu brojali unazad.

Prema gornjem, godina je imala 354 dana. Zbog očuvanja kalendara i usklađivanja sa sezonom, dodatni mjesec je bio dodan svake 2., 5. i 8. godine osmogodišnjeg ciklusa, tako da je prosječna godina bila duljine 365.25 dana. Kako je postojala uočljiva razlika između opažanja Mjeseca i mjeseca unutar kalendara, Meton je predložio ciklus od 19 godina koji bi imao 235 mjeseci, od čega bi ih 125 imalo 30 dana a ostali 29. Metonov ciklus nije imao alternirajući broj dana u mjesecu već bi se svaki 64 dan izostavio, pa bi duljina godine bila 365 dana, 6 sati, 18 minuta i 56.84 sekunde. Metonov je prijedlog prihvaćen.

Metonov ciklus je imao grešku od 7.5 sati. Da bi to popravio, Kalipos je 330. pr. Kr. predložio 76-ogodišnji ciklus koji bi imao jedan dan manje od Metonovog. Premda je prijedlog prihvaćen, nikada nije primijenjen u praksi.

Daljnje poboljšanje je predložio Hiparh koji je oko 150. pr. Kr. predložio ciklus od 304 godine koji sadrži 3760 mjeseci, od čega ih 1795 ima 30 dana a ostali 29 dana. Hiparhova korekcija je dovela do kalendara koji je imao grešku od 1 dana u 222 godine.

Kao referentna točka kalendara se koristio dan otvorenja Olimpijskih igara u Ateni 776. pr. Kr., i koristio se dugo vremena, do otprilike 4. st. po. Kr.

5. Rim

5.1. Pravila zapisivanja rimskih brojeva

Rimski brojevi se sastoje od pojedinih latiničnih slova koja predstavljaju određene vrijednosti. Premda je rimski brojevni sustav dekadski, nije direktno pozicijski te ne poznaje nulu. Rimski su se brojevi koristili i nakon pada rimskog carstva sve dok u 14. stoljeću nisu napušteni jer su se počeli koristiti tzv. arapske znamenke.

U modernom se zapisu koristi sedam slova za zapisivanje rimskih brojeva:

Slovo	Vrijednost
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Ne postoji univerzalni standard za pisanje rimskih brojeva, te se isti broj može zapisati na više načina. Na primjer, američki Nacionalni institut za standarde i tehnologiju nije mogao pronaći eksperta koji bi rekao piše li se 1999 kao MDCCCCLXXXXVIIII, MCMXCIX ili MIM.

Slika 25. *Pročelje Admiraliteta u Londonu s 1910. godinom.*
Po uobičajenim pravilima, ta bi se godina trebala pisati MCMX.

Unatoč nepostojanju standarda, zadnjih nekoliko stotina godina se primjenjuju sljedeća pravila:

1. Znamenke se pišu s lijeva počevši s većim vrijednostima.
2. Ukoliko je znamenka manje vrijednosti napisana ispred znamenke veće vrijednosti, tada se ona oduzima od veće. Na primjer, $IV = 5 - 1 = 4$.
3. Ukoliko piše više znamenki iste vrijednosti, tada se one zbrajaju. Na primjer, $XX = 10 + 10 = 20$.
4. Broj zapisan arapskim znamenkama se rastavi na dekadske jedinice, svaka se od njih zapiše rimskim znamenkama i potom sve spoje. Primjerice, broj 1953 se rastavi kao $1000 + 900 + 50 + 3$. Potom se izvrši zamjena: 1000=M, 900=CM, 50=L, 3=III te se dobije
$$1953 = \text{MCMLIII}.$$
5. Znamenke I, X, C i M se mogu ponoviti najviše tri puta zaredom. Dakako, mogu se pojaviti ukupno više od 3 puta ako nisu zaredom, kao kod broja $39 = \text{XXXIX}$. Znamenke V, L i D se ne mogu ponavljati.
6. Znamenka I može biti oduzeta jedino od V i X. X može biti oduzet jedino od L i C. C može biti oduzet jedino od D i M. V, L i D ne mogu biti oduzeti.
7. Točno jedna znamenka manje vrijednosti može biti oduzeta od znamenke veće vrijednosti.

5.2. Upotreba rimskih brojeva

Unatoč tome što se službeno ne koriste od 14. stoljeća, rimski se brojevi i danas koriste u nekim posebnim slučajevima.

(i) Brojevi u pobrojanim listama se ponekad pišu rimskim brojevima, ali malim latiničnim slovima, kao što je ova lista.

(ii) U nekim knjigama se stranice koje prethode sadržaju knjige, a na kojima se obično nalazi naslovnica knjige, predgovor i sadržaj, numeriraju malim rimskim brojevima. Osim toga, ukoliko je neko djelo izdano u više tomova, tomovi znaju biti numerirani rimskim znamenkama.

(iii) U nekim se europskim zemljama, uključujući Hrvatsku, mjeseci u zapisu datuma pišu rimskim znamenkama. Primjerice, Božić se obilježava 25. XII. Nadalje, redni brojevi stoljeća se ponekad pišu rimskim znamenkama, te se na nekim satovima se i broj sata označava rimskim brojem, s tim da se često broj 4 nalazi zapisan kao IIII umjesto IV.

(iv) Imena potomaka istog imena, monarha i papa imaju redni broj pisan rimskim brojem. Primjerice, osnivač Microsofta je William Gates III., britanska kraljica je Elizabeta II., dok je papa Benedikt XVI.

(v) Različite manifestacije koje se održavaju jednom godišnje redni broj u svom nazivu pišu rimskim znamenkama. Tako će se 2012. godine u Vinkovcima održati XLVII. Vinkovačke jeseni, a u Đakovu XLVI. Đakovački vezovi.

Slika 26. *Logo prošlogodišnjih XLVI. Vinkovačkih jeseni.*

5.3. Rimski kalendar

Rimski je kalendar povijesna osnova današnjeg kršćanskog i civilnog kalendara. Prije 45. g. pr. Kr. rimski je kalendar bio u neredu i većina spoznaja o njemu do tog trenutka je više nagađanje negoli skup čvrstih činjenica.

Izvorno godina je počinjala 1. ožujka (lat. Martius) i sadržavala samo 304 dana raspoređenih u 10 mjeseci (Martius, Aprilis, Maius, Junius, Quintilis, Sextilis, September, October, November i December). Nakon njih je slijedio zimski period od neodređenog broja dana. U 7. stoljeću je kralj Pompilije uveo još dva mjeseca, veljaču i siječanj tako da je godina sadržavala 354 ili 355 dana. Kasnije, 450. g. pr. Kr. su siječnju i veljači zamijenjena mjesta.

U želji da se popravi gubitak dana koji se tijekom vremena nakupio, uveden je dodatan mjesec nazvan Intercalaris duljine 22 ili 23 dana, autoriteti se ne slažu oko točnog broja dana, tako da je tijekom 8 godina njihova duljina u danima iznosila:

1. 12 mjeseci duljine 355 dana
2. 13 mjeseci duljine 377 dana
3. 12 mjeseci duljine 355 dana
4. 13 mjeseci duljine 378 dana
5. 12 mjeseci duljine 355 dana
6. 13 mjeseci duljine 377 dana
7. 12 mjeseci duljine 355 dana
8. 13 mjeseci duljine 378 dana.

Ukupno je 2930 dana raspoređeno u 8 godina, pa je prosječna duljina bila $366\frac{1}{4}$ dana. Otkriveno je da je godina bila predugačka, stoga je u 8. godini odbačeno 7 dana te je prosječna godina bila duljine 365.375 dana. Tako je barem bilo u teoriji. U praksi su se rijetki držali pravila.

Želeći uvesti reda Julije Cezar provodi reformu kalendara i od 45. g. pr. Kr. uvodi svoj tzv. julijanski kalendar. Da bi to napravio, 46. g. pr. Kr. je produljio godinu na 15 mjeseci i ukupno 445 dana. Donja tablica prikazuje 47. pr. Kr., zadnju standardnu rimsku godinu, 46. pr. Kr., godinu u kojoj je Julije Cezar ispravio sve greške, te 45. pr. Kr., standardnu julijansku godinu:

	47. pr. Kr.	46. pr. Kr.	45. pr. Kr.
Januarius	29	29	31
Februarius	28	24	28
Intercalaris		27	
Martius	31	31	31
Aprilis	29	29	30
Maius	31	31	31
Junius	29	29	30
Quintilis	31	31	31
Sextilis	29	29	31
September	29	29	30
October	31	31	31
November	29	29	30
bez imena		33	
bez imena		34	
December	29	29	31
UKUPNO	355	445	365

Julijanski se kalendar održao sve do gregorijanske reforme u 16. stoljeću.

6. Indija

6.1. Brojevi u Indiji

Dostupni zapisi potvrđuju da su Indijci bili dobri poznavatelji matematike već oko 3000. godine pr. Kr. Sav je rani razvoj civilizacije, tako i matematički, imao religijske uzroke.

Više je zapisa iz vremena po. Kr. Najveći doprinos je bio tekst poznat kao Sulbasutras, koji je sadržavao mnoge formule, pokrivao je problem broja nule, negativne cijele brojeve i aritmetiku s njima, geometriju, astronomiju te rješavanje jednadžbi.

U Indiji su bila tri glavna brojevna sustava: brahmi, gupta i nagari.

Brojevni sustav brahmi ima više varijacija. To je brojevni sustav koji nije pozicijski, a za svaku od vrijednosti 1, 2,. . . , 10, 20, 30,. . . 100, 200, 300,. . . ima nekoliko simbola. Sustav nije imao nulu.

Glavna nalazišta ovog brojevnog sustava su zapisi na špiljama i na novčićima u pokrajinama Puna i Utar Prades. Datiranje je pokazalo da se koristio čak do 4. st. po. Kr.

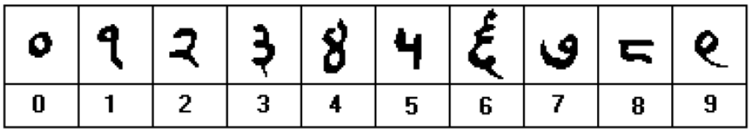
Slika 27. *Brojevi 1-9 u indijskom brojevnom sustavu brahmi.*

Iz brahmija su razvio brojevni sustav gupta, koji je bio raširen u imperiji Gupta koja je zauzimala pokrajinu Magadu u sjeveroistočnoj Indiji. Koristio se od početka 4. st. pa sve do kraja 6. st. Direktnom se usporedbom vidi da su pojedini brojevi iz gupta-sustava jednake onima iz brahmi sustava.

Slika 29. *Brojevi 1-9 u indijskom brojevnom sustavu gupta.*

Iz brojevnog sustava gupta se početkom 7. st. razvio brojevni sustav nagari ili devangari i razvijao do 11. st. kada se, pod utjecajem Arapa, proširio po cijelom svijetu. Ime doslovno znači *pisanje bogova* i smatra se najljepšom formom pisanja brojeva. Arapski je matematičar Abu Rayhan al Biruni zapisao:

"*Ono što koristimo za pisanje brojeva je izbor najljepših i najraširenijih simbola u Indiji!*"



Slika 30. *Brojevi 0, 1,..., 9 u brojevnom sustavu nagari, danas općeprihvaćenom sustavu za pisanje brojeva.*

Zanimljiv aspekt sustava je da je pozicijski, odnosno da vrijednost svake znamenke ovisi o relativnoj poziciji prema drugim znamenkama u zapisu broja. Istina, ovo nije prvi pozicijski sustav, već su ga i Babilonci imali, ali u sustavu s bazom 60, no, prvi je u sustavu s bazom 10.

Najstariji indijski dokument koji sadrži broj zapisan pozicijski je pravni dokument iz 594. godine, u kojem je zabilježena donacija Dade III. iz Sankeda pokrajini Barukachcha, pa sa sigurnošću znamo da se od 7. st. koristi pozicijski nagari.

Nagari je prvi svjetski decimalni sustav s nulom. Vrijednost simbola ovisi o poziciji unutar zapisa, odnosno u pitanju je pozicijski brojevni sustav.

Sustav nema ograničenja glede veličine broja koji bi se njime mogao zapisati. Sve aritmetičke operacije se lagano izvode, dok se razlomci mogu zapisati i kao decimalni brojevi.

6.2. Indijski kalendar

Indijci koriste nekoliko različitih varijanti hinduističkog kalendara koje su međusobno dovoljno različite da otežavaju komunikaciju. U pitanju su: nepalski kalendar, bengalski kalendar, tamilski kalendar, malajalamski kalendar itd.

Slika 31. *Detalj s hinduističkog kalendara.*

Svi ti kalendari kao osnovu koriste kalendar opisan u svetim spisima Vedama, kasnije reformiran od strane Arjabhate u 499. g. po. Kr., Varahamihire u 6. st. i Bhaskare u 12. stoljeću. Kalendar je vrlo usko vezan uz religijsko poimanje svijeta te je zbog uvjeta vrlo kompleksan za razumijevanje ili korištenje.

U osnovi, to je lunisolarni kalendar kojemu se godina sastoji od 12 mjeseci duljine 29 ili 30 dana, a mjesec počinje prvog dana od uočavanja mladog mjeseca na obzoru. Ukoliko ne postoji teološki razlog za drukčiji pristup, svake treće godine se dodaje dodatni mjesec koji nadopunjuje broj dana tako da prosječna godina ima 365.25 dana. Problem kalendara je taj što zbog vjerskih razloga broj dana u mjesecu može odstupati od 15 do 41, te je detaljniji opis gotovo nemoguć.

7. Arapi

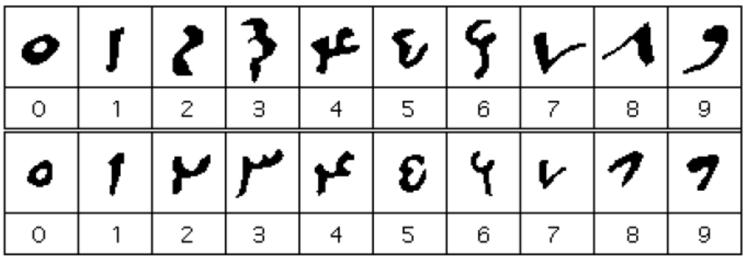
7.1. Brojevi kod Arapa

Signifikantni razvoj arapske matematike počinje u 8. stoljeću, njihovim dodirom s Indijcima i indijskom matematikom na istoku, te na zapadu s prijevodima grčkih matematičara na arapski. Ključna točka razvoja je bila napuštanje grčkog modela razvoja matematike kao geometrijske discipline i početak razvoja algebre.

Do 10. stoljeća su Arapi imali 3 glavna brojevna sustava. Popularan način računanja među trgovcima je bio "na prste" gdje je svaki prst imao ime po nekom broju, a kada bi dolazilo do zapisivanja brojeva, zapisivali su se riječima, što se pokazalo nezgrapnim kako u trgovini, tako i u državnoj administraciji.

U drugom sustavu su brojevi, po uzoru na grčki alfabetski sustav, bili predstavljeni arapskim alfabetom. Baza mu je bila 60 i vjerojatno je preuzet od Babilonaca i bio je dosta korišten za astronomska izučavanja.

Najrašireniji brojevni sustav kod Arapa je bio onaj s bazom 10, pozicijski s nulom, kojemu su znamenke bile jednake onima indijskim. U različitim dijelovima arapskog carstva i u različitim vremenima su se znamenke manje ili više mijenjale, a njihov izgled u 10. i 11. stoljeću je bio sljedeći:



Slika 32. *Arapski decimalni brojevni sustav iz 10. i 11. stoljeća.*

Prihvaćanje dekadskog sustava nije bilo glatko, jer je bilo matematičara koji su se tome odupirali. Tako su Abu l-Wafa i Al Karki u 10. i 11. stoljeću objavili aritmetike u kojima su brojeve pisali riječima.

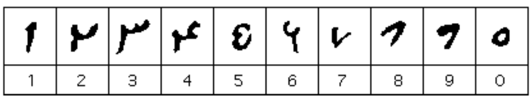
Slika 33. *Stranica iz Al Horezmijeve Aritmetike.*

Prvu arapsku aritmetiku koja je postala poznata u zapadnom svijetu je napisao Al Horezmi, a napisao ju je slijedeći tradiciju nekih ranijih autora. Ta Aritmetika sustavno objašnjava općenita pravila računanja, pravila provjere grešaka u računu, metodu lažnih položaja za rješavanje nekih algebarskih jednadžbi, zatim, izračunavanje kvadratnih i kubnih korijena te računanje s razlomcima.

Tijekom vremena arapski brojevi koje su preuzeli od Indijaca su se mijenjali. Tako u istočnom dijelu arapskog carstva u sljedećoj tablici je prikazan zapis brojeva iz al-Sizjievog rada (969. g):

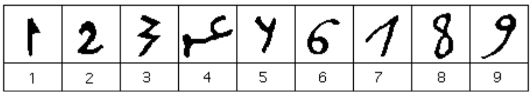
Slika 34. *Brojevi u al-Sizjievom radu.*

Sljedeća tablica prikazuje zapisivanje brojeva iz al-Birunijevog rada (1082. g.):



Slika 35. *Brojevi u al-Birunijevom radu.*

Oblik brojeva iz zapadnog dijela arapskog carstva jako je sličan brojevima koje mi danas koristimo, što nije ni čudno jer su Europljani preuzeli brojeve od Arapa. Al-Banna al-Marrakushi u svojoj knjizi praktične aritmetike iz 15. stoljeća brojeve zapisuje na sljedeći način:



Slika 36. *Brojevi u radu al-Banna.*

Arapski brojevi u Europi pojavljuju se puno prije al-Banna. Prvi put primjer arapskih brojeva u Europi pojavljuje se u iluminacijama povijesnih španjolskih dokumenata Codex Vigilanus iz 976. godine. Međutim, veliki dio Europe nije bio spreman prihvatiti nove ideje o zapisivanju brojeva. Arapska matematika je posebno utjecala na pojavu djela Liber Abaci (1202.g.) koje je napisao Leonardo iz Pise i koji u svom djelu opisuje i arapske brojeve. Prihvaćanje arapskih brojeva u Europi teče jako sporo i općeprihvaćeni su tek u 15. stoljeću kada je počeo brzi razvoj europske matematike.

7.2. Islamski kalendar

Islamski kalendar je čisti lunarni kalendar. Sadrži 12 mjeseci koji su temeljeni na gibanju Mjeseca i kako sinodički mjesec ima 29.53 dana, islamski je kalendar kraći od tropske godine ($12 \cdot 29.53 = 354.36$ dana). Služben je u islamskim zemljama bliskog istoka, premda se u svjetovne svrhe koristi i gregorijanski kalendar.

Slika 37. *Stranica s objašnjenjem kalendara.*

Svaki mjesec počinje pojavljivanjem mladog Mjeseca na horizontu. Premda se vrijeme početka mjeseca može točno izračunati ponegdje se još čeka da se Mjesec uoči, te vjerske vođe tada proglašavaju početak mjeseca. Ta preksa dovodi do nemogućnosti tiskanja kalendara.

Godine se u kalendaru broje od Muhamedovog dolaska u Medinu 622. po. Kr. Dan 16. srpnja 622. po julijanskom kalendaru je zapravo 1. dan islamskog kalendara.

Islamska 1434. godina počinje otprilike 15. studenog 2012.

Treba primijetiti da kako je islamska godina za približno 11 dana kraća od svjetovne, to je tijekom 1390 svjetovnih godina prošlo 1433 godine po islamskom kalendaru.

8. Maje

8.1. Povijesni pregled Maja

Maje su bile jedan od indijanskih naroda Amerike nastanjen na poluotoku Yucatan u Meksiku i Belizeu, te susjednoj Gvatemali. Civilizacija Maja propala je prije dolaska konkvistadora.

Povijest Maja se dijeli na 3 razdoblja: klasični period, post-klasični period i post-Kolumbovo doba.

U klasičnom periodu, od 300. do 900. godine, Maje su bili na svome vrhuncu, njihovi gradovi bili su povezani mrežom cesta od kojih su neke još u upotrebi. Maja je tada živjelo oko dva milijuna. Najveći grad Tikal imao je 75 000-100 000 stanovnika.

Post-klasični period, 1000. do 1500. godine, početak je kraja opstanka civilizacije Maja. Obilježeno je neprestanim ratovima između plemstva nastanjenog u gradovima. U ovom vremenu javljaju se Nahua-Tolteci i njihovi gradovi dolaze pod toltečki utjecaj.

Post-Kolumbovo doba obilježava konačan kraj civilizacije. Dolaskom Španjolaca na Yucatan (1520.) završava slobodan život ovog naroda. Za današnje poznavanje majanske kulture najveću prepreku je postavio biskup Diego de Landa koji je došao u Novi svijet 1549. te zapalio je više tisuća knjiga Maja jer je, vidjevši pismo sastavljeno od lica, pomislio da su to lica vraga. Landa se ipak kasnije pokušao iskupiti djelom *Relacion de las Cosas Yucatan*.

Slika 38. *Stranica iz Dresdenskog kodeksa s licima kakva su mogla uplašiti Landu.*

8.2. Brojevi kod Maja

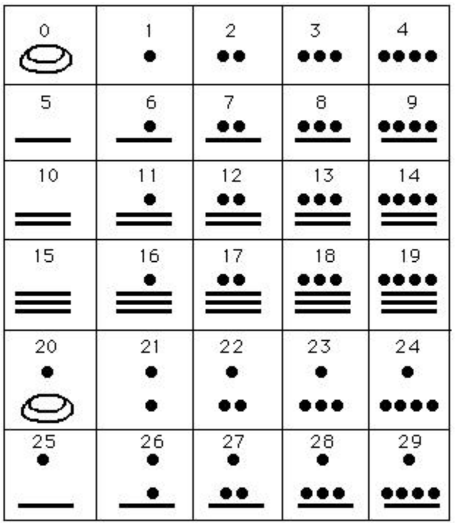
Svega je mali broj dokumenata preživio Landino uništavanje. Najvažniji su Dresdenski kodeks koji se danas čuva u Sächsische Landesbibliothek Dresden, Madridski kodeks koji se sada čuva u Američkom muzeju u Madridu, te Pariški kodeks koji se sada čuva u Nacionalnoj biblioteci u Parizu.

Slika 39. *Dresdenski kodeks*

Dresdenski kodeks obrađuje astronomiju, a vjeruje se da je kopija iz 11. stoljeća originalnog dokumenta iz 8. stoljeća. Astronomija je Majama bila važna jer je bila isprepletena s mitologijom. Dakako, astronomija i izrada kalendara zahtijevaju poznavanje matematike, te su Maje imale sofisticiran brojevni sustav, kojemu je baza bila broj 20. To znači da su umjesto 1, 10, 100, 1 000 i 10 000 koristili 1, 20, 400, 8 000 i 160 000.

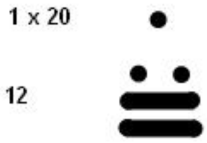
Gotovo je sigurno da su imali bazu 20 jer je toliko prstiju na rukama i nogama. Premda je baza sustava bila 20, kako je prstiju na ruci ili nozi po 5, to se lako uočava da je broj 5 imao glavnu ulogu.

Iznenađujuće svojstvo njihovog brojevnog sustava je da su poznavali nulu, te da je imao pozicijsku prirodu, premda nije bio pozicijski brojevni sustav u današnjem smislu tog pojma.



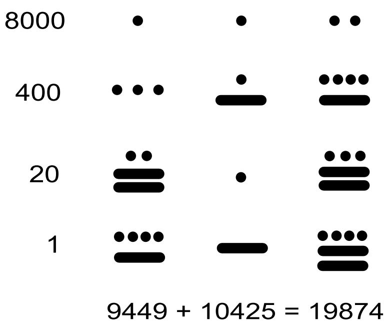
Slika 40. *Brojevni sustav Maja*

Način pisanja brojeva je bio vrlo jednostavan, naprosto su veće potencije broja 20 pisali iznad manjih. Primjerice, broj 32, kojeg bi mi danas prikazali kao $3 \cdot 10 + 2$ su Maje prikazivale kao $1 \cdot 20 + 12$, jer im je baza bila 20, te u prvom redu stavili broj 1 jer je jedna 20-ica i ispod njega 12, kao na slici dolje.



Slika 41. *Broj 32 u Majanskom zapisu*

Zbrajanje i oduzimanje se lagano izračunavalo, bilo je dovoljno napisati dva broja jedan uz drugi poravnata po dvadeseticama, što ilustriramo zbrajanjem $9449 + 10425 = 19874$:



Slika 42. *Broj 32 u Majanskom zapisu*

Zanimljivo je da Maje nisu znale množiti niti dijeliti brojeve, premda im je brojevni sustav dobar za efikasne algoritme množenja i dijeljenja.

8.3. Majanski kalendar

Maje su koristile kalendar nevjerojatne složenosti i točnosti. Kalendar su prihvatili i drugi narodi Južne Amerike.

Majanski kalendar paralelno koristi 3 različita sustava datiranja: dugobrojeći, toltečki ili božanski kalendar i haab ili civilni kalendar, a jedino je haab u direktnoj vezi s duljinom godine.

Slika 43. *Prikaz Majanskog kalendara.*

Dugobrojeći kalendar je mješavina prikazivanja brojeva u bazama 20 i 18, koji prikazuju broj dana od početka Majanske ere.

Osnovna jedinica kalendara je kin (dan). Od desno prema lijevo su komponente datuma:

kin	1 dan
uinal	mjesec od 20 dana
tun	godina od 18 uinala, 360 dana
katun	20 tuna, približno 20 godina
baktun	20 katuna = 144 000 dana, približno 394 godine

Kin, tun i katun se numeriraju od 0 do 19, dok se uinal numerira od 0 do 17.

Datum se prikazivao u obliku 12.19.19.7.10.

Osim toga, za dugobrojeći kalendar su Maje imale i imena za puno dulja razdoblja:

1 pictun	20 baktuna, približno 7885 godina
1 calabtun	20 pictuna, približno 158 000 godina
1 kinchiltun	20 calabtuna, približno 3 milijuna godina
1 alautun	20 kinchiltuna, približno 63 milijuna godina.

Toltečki kalendar se sastojao od kombinacije od 2 "tjedne" duljine. Prva se sastojala od 13 dana koji su bili numerirani, a druga od 20 dana koji su imali imena, pa se nakon što bi se iskoristio neki od manjih ciklusa s njime kretalo ispočetka, sve dok se ne bi potrošilo svih $13 \cdot 20 = 260$ kombinacija, odnosno dana. Svaki dan se označavao s brojem prvog manjeg ciklusa i imenog drugog većeg ciklusa. Godine se, kao takve, nisu brojale.

Haab ili civilni kalendar je brojao dane u godini koja se sastojala od 18 mjeseci od po 20 dana, te dodatnih 5 dana zvanih uayeb, tako da je godina imala 365 dana. Tih dodatnih 5 dana nisu imale niti ime niti numeričku vrijednost te su se smatrali danima loše sreće. Godine kao takve se isto nisu brojale.

9. Inke

9.1. Povijesni pregled Inka

Premda se često smatra da se matematika može razvijati jedino u okviru civilizacija koje poznaju pismo, neke civilizacije, a jedna od njih su Inke, dostigle su razmjerno visok stupanj razvoja matematike bez da su bile pismene.

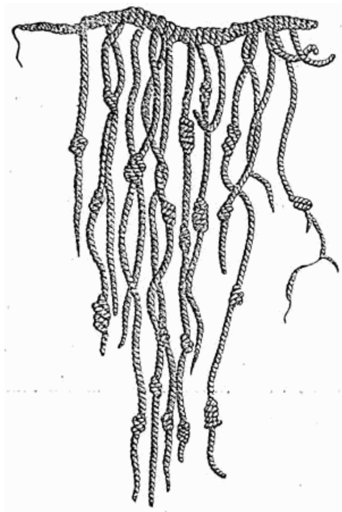
Inke su nestale početkom 16. stoljeća, prije nego su stigli španjolski konkvistadori. Carstvo Inka se prostiralo od sjeverne granice Ekvadora do Mendoze u Argentini i rijeke Maule u Čileu. Na vrhuncu razvijenosti ih je živjelo oko 12 milijuna, a sastojali su se od većeg broja etničkih grupa koje su govorile 20 različitih jezika.

Civilizacija je dostigla visok stupanj razvoja sa značajnim sustavom puteva, razvijenom poljoprivredom, izradom tekstila i administracijom.

Inke su svoje građevine gradile samo od kamena. Nije im bio potreban cement, a umjesto njega oni su koristili preciznu geometriju za izračunavanje dvanaestokutnog središnjeg kamena oko kojeg su slagali sve ostale kamene blokove. Njihove građevine izdržale su stoljeća i potrese.

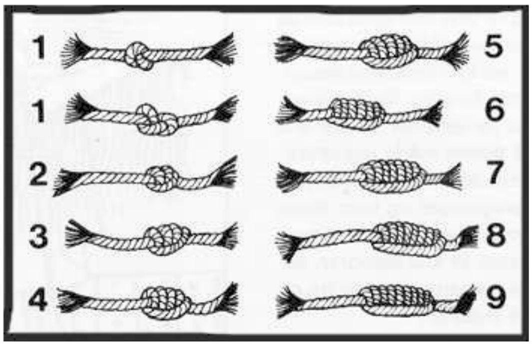
9.2. Brojevi kod Inka

Premda nisu bili pismeni, Inke su razvile metodu čuvanja brojevnih informacija koja nije zahtijevala poznavanje pisma. Metoda se sastojala od vezanja čvorova na nitima koji su se zvali *quiptu*. Quiptu, dakako, nije bio kalkulator, već prije uređaj za čuvanje numeričkih vrijednosti.



Slika 44. *Izgled quipte.*

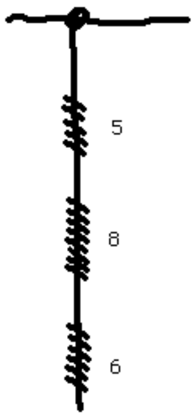
Boje užeta, način na koji su spojena užad, relativni položaj od uzice, prostori između užadi, vrste čvorova i relativni položaj između čvorova su svi dio logičko-numeričkog zapisa. Na pr. žuta boja može predstavljati zlato ili kukuruz, bijela boja može predstavljati ovce ili koze, zelena boja broj goveda itd. Prema tvrdnjama Gary Upona, antropologa s Harvarda, kombinacija vlakana pomoću vrste vlakana, njihove boje, različitog vezanja čvorova itd. quipta bi bio novi oblik pisanog jezika. On je dokazao da quipta sadrži sedam-bitni kod koji može prenijeti više od 1500 zasebnih informacija.



Slika 45. *Brojevi na quipti.*

Brojevni sustav Inka bio je pozicijski i dekadski - baš kao i naš današnji. Da bi zapisali nekakav broj, Inke su na niti zavezale određen broj čvorova, gdje je znamenka s najvećom dekadskom jedinicom bila predstavljena kao prva grupa čvorova, sljedeća je bila niža itd.

Primjerice, broj 586 bi se zapisao kao na donjoj slici:

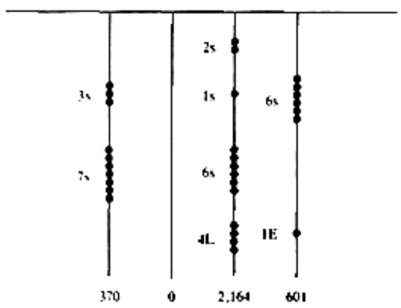


Slika 46. *Broj 586 na quipti.*

Postoji puno opisa i crteža quipti koje su izradili španjolski osvajači. Garcilaso de la Vega, čija je majka bila Inkinja a otac Španjolac, je napisao:

"*Prema poziciji, čvorovi označavaju jedinice, desetice, stotice, tisućice, deset tisućice i ponegdje sto tisućice te su dobro poravnate na svojim nitima.*"

Nedostatak čvorova na užetu predstavlja nulu, a znali su zapisivati i decimalne brojeve.



Slika 47. *Zapis na quipti.*

Tzv. quipucamayocsi, računovođe u Inka carstvu stvarali su i dešifrirali quipte. To su bili muškarci iz višeg sloja društva koji su se za taj posao školovali u tvz. "kući učenja". Broj računovođa bio je proporcionalan veličini grada ili sela. Računovođe su pomoću quipti zapisivale važne poruke koje su se odnosile na napredak kulture, iznos prikupljenog poreza, napredovanje ili povlačenje neprijatelja u ratovima, podatke o broju stanovništva itd.

Kako je quiptu služio za prijenos informacija, od kojih je većina bila zapisana u decimalnom obliku, većina istraživača smatra da je tzv. yupana služila kao neka vrsta abakusa.

Slika 48. *Računovođa.*

Yupana je izvorno izrađena od gline ili kamena. To je ploča s utorima u koje su stavljali kukuruzna zrna i s njima su računali.

Slika 49. *Yupana.*

Španjolski svećenik Jose de Acosta koji je polovinom 16. st živio među Inkama u svojoj knjizi Historia naravni moralni de las Indians (Povijest prirode i morala Indijanaca) piše:

"*Kada bi ste ih vidjeli kako koriste drugu vrstu kalkulatora, s jezgrama od kukuruza, to je prava radost. Da bi izračunali nešto vrlo teško za što je potrebna olovka i papir, ovi Indijanci koriste svoja zrna. Oni su jedno mjesto ovdje, tri negdje drugdje i osam, ne znam gdje. Premještaju jedno zrno tu i tamo i činjenica je da su u mogućnosti da završe računanje bez najmanje pogreške. Oni su, naime, bolji u praktičnoj aritmetici nego mi s perom i tintom. Tko može suditi jesu li ti ljudi zvijeri ili genijalci? Ono što s mrtvom sigurnošću mogu potvrditi je da su ti ljudi u onome što rade superiorniji od nas.*"

Šteta što de Acosta nije imao matematičke vještine da nam da precizan opis što bi omogućilo da razumijemo ovu metodu računanja. Istraživači nisu postigli dogovor o tome kako je yupana bila korištena u vrijeme Inka carstva, međutim dogovorili su se da se za današnju upotrebu yupane u školama koristi decimalni sustav. Ploča je okrenuta u horizontalni položaj, gornje kutije koristile su se kao memorije, a ispod njih su poredani deset krugova i to po dva kruga u pet polja, ispod njih je petnaest i to po tri kruga u pet polja, a ispod njih dvadeset i pet i to po pet krugova u pet polja.

Neki istraživači vjeruju da se yupana temelji na bazi Fibonnacijevog niza 0,1,1,2,3,5,... kako bi se smanjio broj potrebnih zrna, a takav način računanja pomoću yupane otkrio je talijanski matematičar Nicolino De Pasquale. U njegovu tumačenju yupane prvih 39 brojeva je bilo smješteno u prvi red, brojevi od 40 do 1560 u redu iznad itd. Takav način odabira brojeva prikazuje nam bazu 40. Njegova metoda računanja radi na svih jedanaest pronađenih vrsta yupana a jedini nedostatak joj je što nema početni broj 0. Ima još mnogo teorija pomoću koje baze su računali, ali za ni jednu sa sigurnošću ne možemo reći da je točna.

9.3. Kalendar Inka

Kalnedar Inka bio je čvrsto vezan uz astronomske događaje. Astronomi su poznavali pojmove koje danas zovemo ekvinocij i solsticij, a vjerojatno i zenit, te Venerine cikluse. Čak štoviše, mogli su predvidjeti i pomrčine.

Kalendar im je bio lunisolaran, sastavljen od dva paralelna dijela, lunarnog i solarnog. Vrijeme su mjerili u mjesecima kojih je bilo 12, no, kako je nedostajalo 11 dana do pune godine, nakon zimskog solsticija dodali bi 11 dana. Svaki je od 12 mjeseci bio vezan uz specifičan ritual ili festival. Zanimljivost kalendara je da najvjerojatnije nisu mjesece dijelili u tjedne, a slično tome, niti mjesece nisu grupirali u godišnja doba.

Literatura

[1] Burton. D. M., *The History of Mathematics*, McGraw-Hill, 2006

[2] Eves. H., *Introduction to History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1965

[3] The MacTutor History of Mathematics, *History Topics: Numbers and Number Theory*
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Number_Theory.html

[4] Phillips. T., *Old Babylonian Multiplication and Reciprocal Tables*
http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-05

[5] Wikipedia, *History of Mathematics*
http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics

[6] Znam. Š., *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

Životopis

Rođena sam u Vinkovcima 1977. g. gdje sam završila osnovnu školu i Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića.

Tadašnji Pedagoški fakultet Sveučilišta u Osijeku upisujem 1995. godine, nastavnički smjer matematika-informatika.

Udana sam i majka djeteta.

Kao apsolvent od 2001. g. do 2009. g. izvodila sam nastavu matematike u Poljoprivredno-šumarskoj školi u Vinkovcima, kada prestajem s radom zbog trudnoće i dovršetka studija.

Sažetak

U diplomskom radu su prikazane osnovne činjenice o brojevima i brojevnim sustavima nekih drevnih naroda: Egipćana, Babilonaca, Grka, Indijaca, Arapa, Maja i Inka. Svakoj civilizaciji posvećeno je jedno poglavlje, u kojem su promotrene osnovne značajke brojevnih sustava koje su koristili. Također su opisana i neka druga obilježja civilizacija tih drevnih naroda, kao što je računanje vremena i uporaba kalendara.

Summary

In this diploma thesis are presented basic facts about numbers and number systems at some of ancient civilizations: Egypt, Babylon, Greece, India, Arabia, Maya and Incas. To every civilization is given one chapter in which are considered basic features about their number systems. Some other features, such calculating of time and calendar are also described.