Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marko Suvalj

Krivulje drugog reda i primjene

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Marko Suvalj

Krivulje drugog reda i primjene

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2012.

Sadržaj

1. UVOD **1**

2. Kružnica **2**

2.1. Jednadžba kružnice . . . 2

2.2. Pravac i kružnica . . . 2

2.2.1. Tangenta kružnice . . . 3

2.2.2. Pol i polara kružnice . . . 4

2.3. Potencija točke s obzirom na kružnicu. Potencijala dviju kružnica . . 5

2.4. Pramen kružnica . . . 6

2.4.1. Eliptični pramen . . . 7

2.4.2. Parabolični pramen . . . 7

2.4.3. Hiperbolički pramen . . . 7

3. Elipsa **8**

3.1. Jednadžba elipse . . . 8

3.1.1. Središnja jednadžba elipse . . . 8

3.1.2. Vršna jednadžba elipse . . . 10

3.1.3. Jednadžba translatirane elipse . . . 10

3.2. Konstrukcija elipse . . . 11

3.2.1. Vrtlarska konstrukcija elipse . . . 11

3.2.2. Približna konstrukcija elipse . . . 12

3.3. Tangenta elipse . . . 12

3.3.1. Jednadžba tangente u točki elipse . . . 13

3.3.2. Tangente povučene iz točke izvan elipse . . . 13

3.3.3. Zrcalno svojstvo elipse . . . 14

3.3.4. Pol i polara elipse . . . 15

3.4. Direktrise elipse . . . 16

4. Hiperbola **17**

4.1. Jednadžba hiperbole . . . 17

4.1.1. Jednadžba translatirane hiperbole . . . 18

4.2. Tangenta hiperbole . . . 18

4.2.1. Zrcalno svojstvo hiperbole . . . 20

4.2.2. Asimptote hiperbole . . . 21

4.2.3. Tangente povučene iz točke izvan hiperbole . . . 22
4.2.4. Pol i polara hiperbole . . . 23
4.3. Direktrise hiperbole . . . 23

5. Parabola **25**
5.1. Jednadžba parabole . . . 25
5.1.1. Jednadžba translatirane parabole . . . 26
5.2. Tangenta parabole . . . 27
5.2.1. Jednadžba tangente u točki parabole . . . 27
5.2.2. Zrcalno svojstvo parabole . . . 28
5.2.3. Tangente povučene iz točke izvan parabole . . . 28
5.2.4. Pol i polara parabole . . . 29
5.3. Dijametri parabole . . . 30

6. Pojava krivulja drugog reda u svakodnevnom životu **31**
6.1. Elipsa . . . 33
6.2. Parabola . . . 35
6.3. Hiperbola . . . 37

Literatura **39**

Sažetak **40**

Summary **41**

Životopis **42**

1. UVOD

O krivuljama drugog reda radove su pisali već stari Grci. To su bili Platonovi učenici koji su pisali o elipsi, paraboli i hiperboli te najranije o kružnici. No, važna znanstvena primjena tih radova pojavila se tek u 17. stoljeću, u trenutku kada je Johannes Kepler otkrio da se planeti kreću po elipsi i Galileo dokazao da je putanja projektila parabola.

Apolonije iz Perge, grčki matematičar iz 3. stoljeća prije Krista, napisao je najveću raspravu o krivuljama drugog reda. U njegovom djelu naziva „Konike“ po prvi puta su elipsa, parabola, hiperbola i kružnica prikazane kao presjek ravnine i stošca pod određenim kutom.

U ovom radu obrađena su analitička svojstva i jednadžbe svake od ovih krivulja. Navedeni su različiti slučajevi odnosa pravca s krivuljama drugog reda te definirani osnovni pojmovi vezani za određenu krivulju.

Prvo poglavlje donosi definiciju kružnice te izvod njene jednadžbe, kao i objašnjenje odnosa pravca i kružnice. Nadalje su, u prvom poglavlju, uvedeni pojmovi potencije i potencijale kružnice te opisani pojedini oblici pramena kružnice.

U drugom poglavlju najprije je definirana elipsa te izvedena njena jednadžba, a potom su opisani različiti oblici konstrukcije ove krivulje. Zatim su objašnjeni pojmovi tangente elipse i zrcalnog svojstva elipse, a na samom kraju poglavlja definirane su i direktrise elipse.

U trećem poglavlju dana je definicija hiperbole, njena jednadžba te izvod jednadžbe njene tangente. Također je opisano zrcalno svojstvo hiperbole, te slično prethodnom poglavlju, definirane direktrise hiperbole.

Pretposljednje, četvrto, poglavlje daje definiciju parabole, izvod njene jednadžbe te jednadžbe njene tangente. Nadalje, četvrto poglavlje se bavi zrcalnim svojstvom parabole te, na samom svome kraju, pojmom dijametra parabole.

Peto, ujedno i posljednje poglavlje donosi sintezu svih prethodnih poglavlja u obliku primjene elipse, hiperbole i parabole u svakodnevnom životu.

Opširnije o krivuljama drugog reda može se naći u knjigama Repetitorij više matematike 1, [1] te Elementarna matematika 2, [8], po uzoru na koje je veliki dio ovog rada napisan. Slikovni prikazi napravljeni su prema slikama iz [4] i [6].

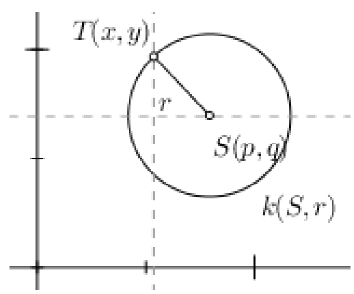
Posljednje poglavlje napisano je prema [2] odakle su i preuzete pojedine slike.

2. Kružnica

Definicija 2.1. *Kružnica je geometrijsko mjesto točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane čvrste točke koja se zove središte kružnice.*[1]

2.1. Jednadžba kružnice

Neka je $k(S, r)$ kružnica sa središtem S i polumjerom r i neka središte ima koordinate $S = (p, q)$. Nadalje, neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka te kružnice. Za svaku točku T na kružnici vrijedi da je njena udaljenost od središta kružnice jednaka duljini polumjera, tj. $d(S, T) = r$.



Slika 2.1.

Na slici vidimo da za svaki položaj točke T na kružnici vrijedi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Pošto svaka točka na kružnici zadovoljava ovu jednakost, tu jednadžbu nazivamo **jednadžbom kružnice**.
Specijalno, ako je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava, onda je $p = q = 0$, pa vrijedi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Prethodna jednadžba zove se **jednadžba centralne kružnice**.

2.2. Pravac i kružnica

Pravac

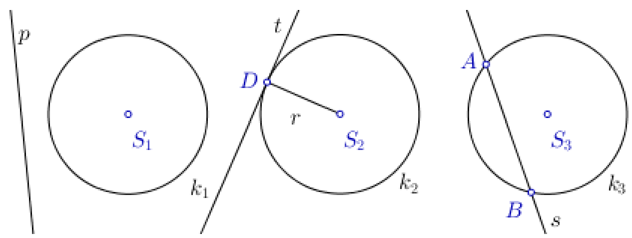
$$y = kx + l \tag{2.1}$$

[1] Boris Apsen, *Repetitorij više matematike 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990., str. 200.

i kružnica

$$(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0 \tag{2.2}$$

mogu imati jednu zajedničku točku (dirati se), mogu imati dvije zajedničke točke (sjeći se) ili nemati niti jednu zajedničku točku. Zanima nas kako iz jednadžbi prepoznati kakav je međusobni položaj pravca i kružnice. Očito je da pravac i kružnica imaju dvije zajedničke točke ako je udaljenost središta kružnice od pravca manja od njezinog polumjera, jednu zajedničku točku ako je ta udaljenost jednaka polumjeru, a nijednu ako je ta udaljenost veća od polumjera (Slika 2.2.).



Slika 2.2.

Udaljenost točke $S=(p,q)$ od pravca (2.1) jednaka je

$$d=\frac{kp-q+l}{-sign(l)\sqrt{1+k^2}}. \tag{2.3}$$

Kvadriranjem dobijemo

$$\frac{(kp-q+l)^2}{1+k^2}=d^2 \tag{2.4}$$

2.2.1. Tangenta kružnice

Pravac (2.1) je **tangenta**[2] kružnice (2.2) ako i samo ako vrijedi

$$(kp-q+l)^2=r^2(1+k^2) \tag{2.5}$$

tj. ako taj pravac ima s kružnicom samo jednu zajedničku točku. Jednadžba (2.5) zove se **uvjet dodira pravca i kružnice**. Specijalno, ako je se radi o centralnoj kružnici uvjet dodira glasi

$$r^2(1+k^2)=l^2.$$

Koristeći se uvjetom dodira kružnice i pravca možemo naći jednadžbu tangente kružnice ako je zadano diralište, jednadžbe tangenata povučenih iz točke van kružnice

[2] lat. tangens znači dodirivati se.

te jednadžbe zajedničkih tangenata dviju kružnica. Pokažimo kako odrediti jednadžbu tangente ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$. Tu jednadžbu je najlakše odrediti kao pravac koji prolazi diralištem D i okomit je na polumjer kružnice u toj točki. Ako je $S = (p, q)$ središte kružnice, onda koeficijent smjera pravca SD glasi $k_{SD} = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}$, pa je koeficijent smjera tangente $k = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$.
Jednadžba tangente tada glasi

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1),$$

odnosno

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0,$$

ili

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) + p(x_1 - p) + q(y_1 - q) - x_1(x_1 - p) - y_1(y_1 - q) = 0,$$

što sređivanjem daje

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) - [(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2] = 0.$$

Kako točka $D = (x_1, y_1)$ pripada kružnici prethodna jednadžba se može napisati u obliku

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) - r^2 = 0 \tag{2.6}$$

i to je jednadžba tangente kružnice (2.2) kojoj je $D = (x_1, y_1)$ diralište. Specijalno za centralnu kružnicu dobije se iz (2.6) jednadžba tangente

$$x_1 x + y_1 y - r^2 = 0$$

2.2.2. Pol i polara kružnice

Ako nam je dana kružnica (2.2) i točka $P = (x_0, y_0), (P \neq (p, q))$, onda točki P s obzirom na tu kružnicu, možemo pridružiti pravac l koji ima jednadžbu

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) - r^2 = 0.$$

Pravac l zovemo **polara točke P s obzirom na zadanu kružnicu**, a točku P zovemo **pol pravca l**. Prema [8] vrijedi sljedeće:

Propozicija 2.1. *Ako je točka P vanjska točka s obzirom na kružnicu k, onda je polara od P s obzirom na k spojnica dirališta tangenata povučenih iz P na k.*

Dokaz
Neka k ima jednadžbu $(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0$ i neka je $P=(x_0,y_0)$. Označimo redom sa $D_i=(x_i,y_i), i=1,2$ dirališta tangenata $t_i, i=1,2$ povučenih iz P na k. Jednadžbe tih tangenata su

$$(x_i-p)(x-p)+(y_i-q)(y-q)-r^2=0, \qquad i=1,2.$$

Kako t_1 i t_2 prolaze kroz P, vrijedi

$$(x_0-p)(x_i-p)+(y_0-q)(y_i-q)-r^2=0, \qquad i=1,2,$$

a ove jednakosti pokazuju da točke D_i leže na pravcu

$$(x_0-p)(x-p)+(y_0-q)(y-q)-r^2=0,$$

a to je upravo jednadžba polare točke P s obzirom na kružnicu k. □

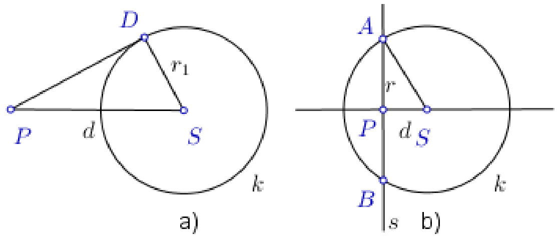
2.3. Potencija točke s obzirom na kružnicu. Potencijala dviju kružnica

U analitičkoj geometriji definiramo **potenciju točke** P **s obzirom na kružnicu** k kao skalarni produkt $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ gdje su A i B sjecišta bilo koje sekante kružnice k koja prolazi točkom P. To znači da su potencije točaka koje su izvan kružnice pozitivne, a onih unutar kružnice negativne. **Potencija točke na kružnici jednaka je** 0.

Propozicija 2.2. *Potencija* $h(P)$ *točke* $P=(x_0,y_0)$ *s obzirom na kružnicu* $k(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0$ *dana je formulom*

$$h(P)=k(x_0,y_0).$$

Dokaz
Ako je P izvan kružnice k, onda je potencija te točke s obzirom na kružnicu jednaka kvadratu udaljenosti točke P i dirališta tangente iz te točke na kružnicu k. Lako se vidi da vrijedi $|PD|^2=d^2-r^2>0$ (Slika 2.3.a). Nadalje, provjerimo još slučaj kada je točka P unutar kružnice k. Ako točkom P povučemo sekantu s koja je okomita na pravac PS i njezina sjecišta označimo sa A i B (Slika 2.3.b), tada je $h(P)=-|PA|\cdot|PB|=-|PA|^2=d^2-r^2<0$.



Slika 2.3.

U oba slučaja je $h(P) = d^2 - r^2$, a kako je $d^2 = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2$, vrijedi

$$h(P) = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 - r^2.$$

Kako je $k(x, y) = (x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$ slijedi

$$h(P) = k(x_0, y_0)$$

$\square$

Zanima nas i kako odrediti, s obzirom na zadane kružnice k_1 i k_2, skup svih točaka koje imaju iste potencije. Taj skup se zove **potencijala kružnica** k_1 **i** k_2.

Propozicija 2.3. *Potencijala dviju kružnica*

$$k_i(x, y) = (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = 0, \qquad i = 1, 2$$

je pravac okomit na spojnicu njihovih središta i njezina jednadžba glasi

$$k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0.[3] \qquad \square$$

2.4. Pramen kružnica

Definicija 2.2. *Pramenom kružnica u ravnini nazivamo skup svih onih kružnica od kojih svake dvije imaju isti pravac za potencijalu.*

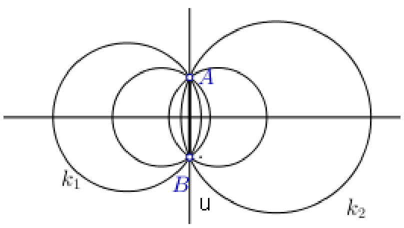
S obzirom na položaj potencijale i kružnica postoji:

- eliptični pramen
- parabolični pramen
- hiperbolični pramen

[3] B. Pavković, D. Veljan,, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 367.

2.4.1. Eliptični pramen

Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B. Tada je pravac $u = AB$ potencijala tih kružnica (Slika 2.4.).



Slika 2.4.

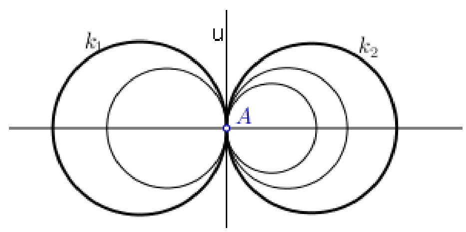
Za svake je dvije kružnice koje prolaze točkama A i B pravac u potencijala. Kružnicama k_1 i k_2 (**temeljne kružnice pramena**) određen je pramen kružnica kojeg čine sve one kružnice ravnine koje prolaze kroz točke A i B (**temeljne točke pramena**).

Na slici je prikazano nekoliko kružnica eliptičnog pramena.

2.4.2. Parabolični pramen

Neka se kružnice k_1 i k_2 dodiruju u točki A. Tada je zajednička tangenta u sa diralištem u A potencijala tih dviju kružnica. Kružnice k_1 i k_2 opet određuju pramen koji čine sve kružnice ravnine što se diraju u točki A, a kojima je u zajednička tangenta (Slika 2.5.).

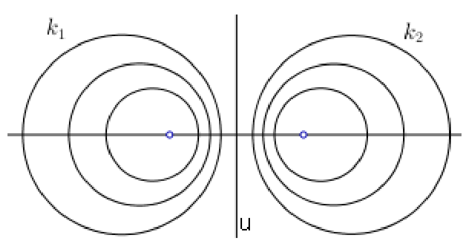
Ovakav pramen nazivamo paraboličkim pramenom, a točku A zovemo **centralnom točkom pramena**.



Slika 2.5.

2.4.3. Hiperbolički pramen

Ako se k_1 i k_2 ne sijeku i nisu koncentrične, onda one također određuju jedan pramen te se takav pramen naziva **hiperboličkim pramenom** (Slika 2.6.).



Slika 2.6.

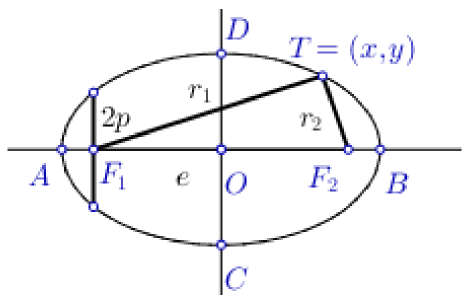
3. Elipsa

Definicija 3.1. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite fiksne točke ravnine M i neka je $|F_1F_2| = 2e$, te neka je $a > 0$ realni broj takav da je $a > e$.* ***Elipsa*** *je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $2a$.*[4]

Kraće, radi se o skupu točaka E definiranim kao

$$E = \{T \in M; |F_1T| + |F_2T| = 2a\}$$

Točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarištima** ili **fokusima** elipse.



Slika 3.1.

3.1. Jednadžba elipse

Postavlja se pitanje kako odrediti algebarsku jednadžbu dvije varijable koju zadovoljavaju sve točke elipse.

3.1.1. Središnja jednadžba elipse

Neka su F_1 i F_2 dane točke koje u pravokutnom koordinatnom sustavu leže na osi x tako da je polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ ishodište sustava (Slika 3.1.). Žarišta F_1 i F_2 tada imaju koordinate $F_1 = (-e, 0), F_2 = (e, 0)$. Realan broj e zove se **linearni ekscentricitet elipse**. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka elipse. Označimo $r_1 = |F_1T|, r_2 = |F_2T|$ te $a = |AO| = |BO|$. Vrijedi da je $r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ i $r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$. Prema definiciji elipse očito je $r_1 + r_2 = 2a$, tj.

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.1}$$

[4]B. Pavković, D. Veljan,, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 372.

Množenjem jednadžbe (3.1) s $\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}$, dobije se da je

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=\frac{2ex}{a}. \tag{3.2}$$

Zbrajanjem (3.1) i (3.2) slijedi

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=a+\frac{e}{a}x,$$

pa se kvadriranjem dođe do

$$(x+e)^2+y^2=a^2+2ex+\frac{e^2}{a^2}x^2,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1.$$

Pošto je $a>e$, slijedi da je $a^2>e^2$, pa se može uvesti nova oznaka $b^2=a^2-e^2$. Tada se tražena jednadžba elipse može konačno zapisati kao

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.3}$$

Jednadžba (3.3) zove se **kanonska jednadžba elipse**[5], a uobičajeno ju je još pisati u obliku $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Iz (3.3) i Slike 3.1. se vidi da je elipsa centralno simetrična krivulja te da joj je centar simetrije u ishodištu O koordinatnog sustava. Stoga se točka O naziva središte ili centar elipse, a jednadžba (3.3) još i **središnja** ili **centralna** jednadžba elipse. Nadalje, elipsa siječe os x u točkama $A=(-a,0)$ i $B=(a,0)$ te se dužina $\overline{AB}$ naziva **glavna (velika) os** elipse. Također, elipsa siječe i os y u točkama $C=(0,-b)$ i $D=(0,b)$, te se dužina $\overline{CD}$ naziva **sporedna (mala) os** elipse. Duljina tetive koja prolazi jednim od fokusa elipse i okomita je na glavnu os zove se **parametar elipse** i označava sa $2p$. Supstitucijom $x=e$ i $y=p$ u jednadžbu (3.3) dobije se vrijednost **poluparametra**

$$p=\frac{b^2}{a}$$

[5]Drugi naziv je osna jednadžba elipse.

3.1.2. Vršna jednadžba elipse

Izvrši li sePotrtebno je izvršiti translaciju koordinatnog sustava $XO'Y'$ prema kojem elipsa ima jednadžbu oblika

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$$

u položaj XOY tako da ishodište koordinatnog sustava dođe u lijevi vrh elipse (Slika 3.2.), $x' = x - a$, a $y' = y$, te jednadžba elipse tada ima oblik

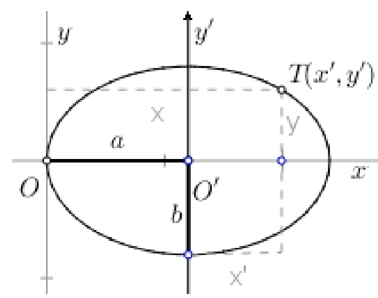
$$b^2(x-a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Kvadriranjem se dobije

$$b^2x^2 - 2b^2ax + a^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

što dijeljenjem s a^2 i sređivanjem daje

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$



Slika 3.2.

a kako je vrijednost poluparametra $p = \frac{b^2}{a}$, u konačnici se dobije

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Ova jednadžba zove se **vršna jednadžba elipse**.

3.1.3. Jednadžba translatirane elipse

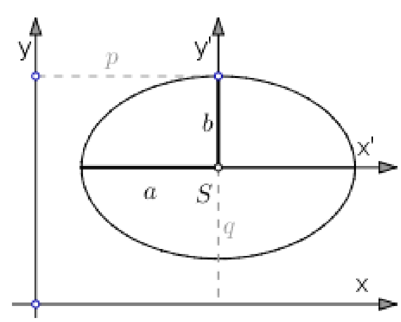
Izvrši li se translacija elipse duž osi X za dužinu p, a isto tako i duž osi Y za dužinu q, dobije se jednadžba elipse s obzirom na koordinatni sustav $X'SY'$ (Slika 3.3.)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

a s obzirom na koordinatni sustav XOY

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$

što je tražena jednadžba.



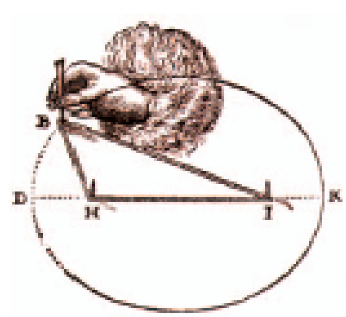
Slika 3.3.

3.2. Konstrukcija elipse

Elipsa se konstruira primjenjujući njezinu definiciju. Da bi se mogla konstruirati, trebaju biti zadane ili njezine osi ili jedna os i žarišta. Postupak konstrukcije sastoji se u tome da se odabire po volji mnogo točaka elipse koje se zatim povezuju u glatku krivulju.
Prvo se konstruira velika os AB i sa strane pomoćna dužina sukladna dužini AB. Odredi se zatim središte elipse te se u središtu konstruira mala os. Ako su zadane udaljenosti od žarišta do središta elipse onda ih se nanese na veliku os. U otvor šestara uzme se duljina a te se iz bilo kojeg žarišta zasiječe malu os. Tako se dobiju preostala dva tjemena elipse, tj. točke C i D. Ako su zadane osi, onda se žarišta dobiju tako da se u otvor šestara uzme duljinu a i iz tjemena C (ili tjemena D) zasiječe veliku os. Sada se pomoćna dužina podijeli na dva dijela tako da je jedan duljine r_1, a drugi duljine r_2. U otvor šestara uzme se duljina r_1 i iz oba žarišta povuku lukovi. Zatim se u otvor šestara uzme duljinu r_2 i ponovo iz oba žarišta povuku lukovi. Tamo gdje se lukovi sijeku, nalaze se točke T_1, T_2, T_3, T_4. Postupak se ponavlja tako da se na pomoćnoj dužini odaberu nove vrijednosti za udaljenosti r_1 i r_2. Svaki put se time dobiju nove četiri točke. Nakon što se opisanim postupkom konstruira dovoljan broj točaka, spoji ih se glatkom krivuljom.

3.2.1. Vrtlarska konstrukcija elipse

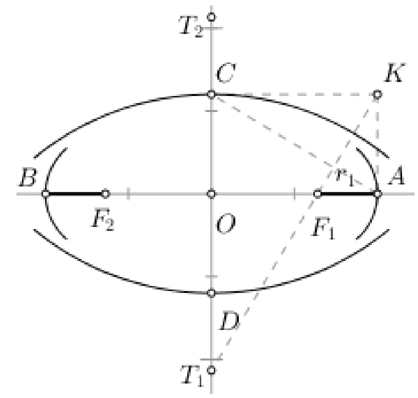
U Descartesovoj Dioptriji, jednom od triju dodataka njegovu djelu Rasprava o metodi iz 1637. godine nalazi se crtež, kojeg se vidi desno. Riječ o crtanju elipse na temelju njezine definicije. Takvu konstrukciju i danas zovemo vrtlarskom jer je to najjednostavniji način crtanja elipse za praktične potrebe. U zemlju se zabodu dva kolčića na mjestima F_1 i F_2 i uzme se nerastezljiva nit duljine $2a > |F_1F_2|$. a zatim se zašiljeni kolčić postavi između F_1 i F_2 i napne nit. Ako kolčić pomičemo u jednom smijeru tako da nit bude stalno napeta, onda njegov šiljak opisuje na zemlji oblik elipse.



Slika 3.4.

3.2.2. Približna konstrukcija elipse

Približna konstrukcija elipse, za koju su poznate obje poluosi a i b, sastoji se u tome da se lukovi elipse u vrhovima A, B, C i D zamjenjuju lukovima kružnica. Ti lukovi se međusobno spajaju u elipsu pomoću krivuljara (Slika 3.5.). Sam postupak započinje nanošenjem sva četiri vrha elipse A, B, C, i D, zatim se konstuira pravokutnik $OAKC$ s dijagonalom AC, na koju se povuče okomica iz točke K. Ta okomica siječe osi elipse u točkama F_1 i T_1, a to su središta zakrivljenosti za vrhove A i C, dok su F_1A i T_1C polumjeri zakrivljenosti. Nakon toga se kroz vrhove elipse vuku lukovi kružnica iz F_1 i F_2 s polumjerom F_1A, a iz T_1 i T_2 s polumjerom T_1C.



Slika 3.5.

3.3. Tangenta elipse

Tangenta elipse je pravac oblika $y = kx + l$ koji s elipsom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ima samo jednu zajedničku točku. Sva sjecišta pravca i elipse određuju se rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= kx + l \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}$$

Supstitucijom y u drugoj jednadžbi, dobije se nakon sređivanja

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2l^2 - a^2b^2 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = -\frac{1}{a^2k^2 + b^2}\left(a^2kl \pm ab\sqrt{a^2k^2 + b^2 - l^2}\right). \tag{3.4}$$

Vraćanjem u prvu jednadžbu dobije se

$$y_{1,2} = \frac{1}{a^2k^2 + b^2}\left(b^2l \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2 - l^2}\right). \tag{3.5}$$

Iz (3.4) i (3.5) slijedi da će pravac i elipsa imati samo jednu zajedničku točku u slučaju da je

$$a^2k^2 + b^2 = l^2. \tag{3.6}$$

Jednadžba (3.6) naziva se **uvjetom dodira pravca i elipse**.

3.3.1. Jednadžba tangente u točki elipse

Ideja je odrediti jednadžbu tangente ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$. Iz jednadžbi (3.4) i (3.5) te zbog uvjeta (3.6) slijedi da je $x_1 = -\frac{ka^2}{l}$ i $y_1 = \frac{b^2}{l}$, a iz toga je $k = -\frac{x_1 l}{a^2}$ te $l = \frac{b^2}{l}$. Iz prethodne dvije jednakosti je

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \tag{3.7}$$

Ukoliko se (3.7) i $l = \frac{b^2}{y_1}$ uvrsti u $y = kx + l$, dobije se

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1},$$

a odavde slijedi

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \tag{3.8}$$

ili

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0 \tag{3.9}$$

Jednadžba (3.8) je **segmentni oblik jednadžbe tangente elipse**, a (3.9) njezin **opći oblik**.

3.3.2. Tangente povučene iz točke izvan elipse

Točka T je **unutrašnja točka elipse** ako svaki pravac koji prolazi kroz T siječe elipsu u dvije različite točke. Točka koja nije unutarnja točka i ne leži na elipsi zove se **vanjska točka elipse**.

Propozicija 3.1. *Točka $T = (x_0, y_0)$ je unutarnja točka elipse $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$ ako i samo ako je $b^2{x_0}^2 + a^2{y_0}^2 - a^2b^2 < 0$.*

Propozicija 3.2. *Iz vanjske točke elipse mogu se povući točno dvije tangente na elipsu.*

Dokaz

Pravac $y = kx + l$ je tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ukoliko ispunjava uvjet dodira (3.6). Neka je $T = (x_0, y_0)$ vanjska točka elipse. Kako ona leži na spomenutom pravcu, slijedi

$$l = y_0 - kx_0.$$

Iz uvjeta dodira i prethodne jednakosti vrijedi da je

$$(a^2 - {x_0}^2)k^2 + 2x_0y_0k + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Točkom T moguće je povući dvije tangente ukoliko ova kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja k_1 i k_2, a to je slučaj kada je njezina diskriminanta $D > 0$. Kako je

$$D = 4{x_0}^2{y_0}^2 - 4(a^2 - {x_0}^2)(b^2 - {y_0}^2),$$

pa se sređivanjem dobije

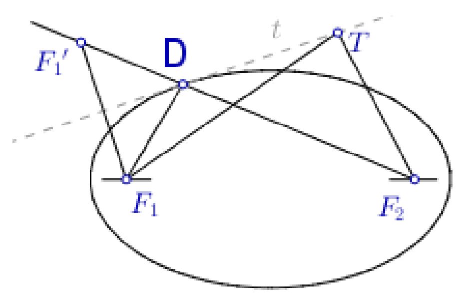
$$D = 4(b^2{x_0}^2 + a^2{y_0}^2 - a^2b^2),$$

pa iz **Propozicije 3.1** slijedi da je $D > 0$. □

Primjedba 3.1. *T je unutarnja točka elipse ako i samo ako je $|F_1T| + |F_2T| < 2a$, a vanjska ako je $|F_1T| + |F_2T| > 2a$.*

3.3.3. Zrcalno svojstvo elipse

Propozicija 3.3. ***(Zrcalno svojstvo elipse)*** *Simetrala vanjskog kuta radij vektora $\overline{F_1D}$,$\overline{F_2D}$ točke D na elipsi je tangenta elipse s diralištem u D (Slika 3.6.)*



Slika 3.6.

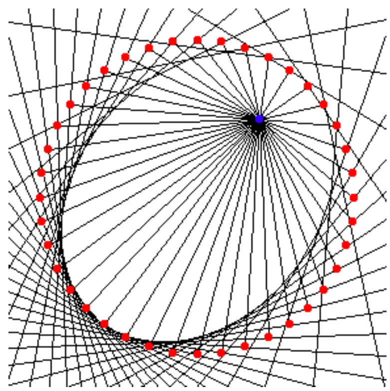
Dokaz

Neka je t simetrala vanjskog kuta radijvektora $\overline{F_1D}$ i $\overline{F_2D}$ i F_1' zrcalna slika od F_1 s obzirom na t. Da bi se pokazalo da je t tangenta, dovoljno je vidjeti da ona, osim D, nema drugih točaka zajedničkih s elipsom. Neka je $T \neq D$ bilo koja druga točka na t. Tada je (prema nejednakosti trokuta i definiciji elipse) $|F_1T| + |TF_2| = |F_1'T| + |TF_2| > |F_1'F_2| = |F_1'D| + |DF_2| = 2a$, gdje je a duljina velike poluosi elipse. Ako se pogleda početak i kraj prethodne nejednakosti dobije se $|F_1T|+|F_2T|>2a$, pa prema Primjedbi (3.1) slijedi da je T vanjska točka elipse, tj. ne leži na elipsi. □

Zrcalna slika F_1' fokusa F_1 s obzirom na tangentu t zove se **suprotište** fokusa F_1 s obzirom na tu tangentu.

Propozicija 3.4. *Skup svih suprotišta jednog fokusa elipse s obzirom na sve njene tangente je kružnica sa središtem u drugom fokusu. Polumjer te kružnice jednak je velikoj osi elipse.* □

Kružnica na kojoj leže sva suprotišta fokusa F_1 (Slika 3.7.) zove se **kružnica suprotišta s obzirom na fokus** F_1.



Slika 3.7.

3.3.4. Pol i polara elipse

Još jedan način određivanja jednadžbi tangenata povučenih iz neke vanjske točke elipse na elipsu dobije se pomoću pojma pola i polare.

Definicija 3.2. *Za zadanu točku* $P=(x_0,y_0)$ *i elipsu* $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ *pravac*

$$p \quad \ldots \quad b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$$

zove se ***polara od*** P *s obzirom na zadanu elipsu. Točka* P *zove se* ***pol pravca*** p.

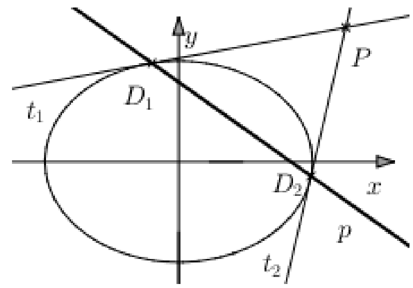
Može se primijetiti da je polara točke elipse tangenta elipse s diralištem u toj točki.

Propozicija 3.5. *Polara vanjske točke elipse je spojnica dirališta tangenata povučenih iz te točke na elipsu.*

Dokaz

Neka su $D_1 = (x_1, y_1), D_2 = (x_2, y_2)$ dirališta tangenata povučenih iz vanjske točke $P = (x_0, y_0)$ na elipsu $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$. Tangente elipse imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} t_1 \quad \ldots \quad b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 &= 0, \\ t_2 \quad \ldots \quad b^2x_2x + a^2y_2y - a^2b^2 &= 0. \end{aligned}$$



Slika 3.8.

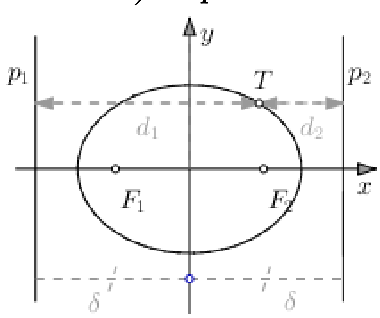
Kako točka P leži i na tangenti t_1 i na tangenti t_2, slijedi

$$b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 - a^2b^2 = 0, \qquad b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 - a^2b^2 = 0,$$

a iz tih jednakosti se vidi da točke D_1 i D_2 leže na polari $b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$ točke P. □

3.4. Direktrise elipse

Definicija 3.3. *Neka je F fokus elipse. Pravac p koji ima svojstvo da za svaku točku T elipse vrijedi $\frac{d(T,p)}{d(T,F)} = c$, gdje je c pozitivna konstanta zove se* ***direktrisa (ravnalica) elipse****.*



Slika 3.9.

Dakle, ako elipsa ima direktrisu, onda ih mora imati dvije je ima i dva fokusa. Neka je d_i udaljenost točke T elipse od direktrise p_i i sa r_i radijvektor te točke, $i = 1, 2$. Ako elipsa ima direktrise onda vrijedi

$$r_i = c \cdot d_i, \tag{3.10}$$

gdje je c pozitivna konstanta. Iz jednadžbe (3.10) koju direktrisa mora zadovoljavati slijedi da ona ne može sjeći krivulju i da ona mora biti okomita na veliku os elipse. Dakle ako direktrise postoje, to su pravci koji imaju jednadžbe oblika

$$p_1 \quad \ldots \quad x + \delta = 0, \qquad p_2 \quad \ldots \quad x - \delta = 0, \quad \delta > a,$$

gdje je a duljina velike poluosi elipse.

4. Hiperbola

Definicija 4.1. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke u ravnini i $|F_1F_2| = 2e$. Hiperbolom nazivamo skup svih točaka ravnine kojima je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od tih točaka konstantna i jednaka $2a$, gdje je $0 < a < e$.*

Dakle, to je skup

$$H = \{T \in M; ||F_1T| - |F_2T|| = 2a\}$$

Točke F_1 i F_2 zovu se **žarišta** ili **fokusi** hiperbole. Udaljenost $2a$ naziva se **glavna** ili **realna os hiperbole**. Druga os hiperbole, oznake $2b$, zove se **sporedna** ili **imaginarna os hiperbole** jer hiperbola ne siječe tu os. Njena duljina određena je izrazom

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Odatle slijedi **linearni ekscentricitet** hiperbole

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

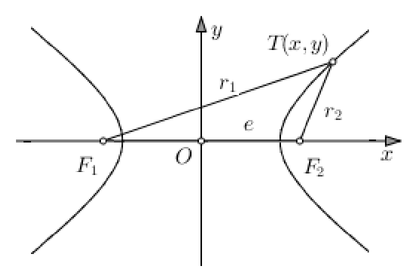
te **numerički ekscentricitet**

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

pri čemu je $\varepsilon > 1$ za hiperbolu.

4.1. Jednadžba hiperbole

Da se odredi jednadžba hiperbole uzme se koordinatni sustav tako da fokusi F_1 i F_2 imaju koordinate $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ i neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka hiperbole. Označimo s $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$ (Slika 4.1.). Prema definiciji hiperbole vrijedi



Slika 4.1.

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Kako je $r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ te $r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ prethodnu jednakost se može napisati u obliku

$$|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}| = 2a,$$

pa slijedi da je

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{4.1}$$

Pomnoži li se prethodna jednakost s $\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}$, dobije se

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=\pm\frac{2e}{a}x \tag{4.2}$$

Zbrajanjem (4.1) i (4.2) dobije se

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}=\pm\left(a+\frac{e}{a}x\right),$$

a kvadriranjem te jednadžbe slijedi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1.$$

Kako je $a^2-e^2=-b^2$, prethodna jednadžba dobiva oblik

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.3}$$

Jednadžba (4.3) zove se **središnja** ili **centralna jednadžba hiperbole**.

4.1.1. Jednadžba translatirane hiperbole

Slično kao kod elipse, translacijom koja točku $O=(0,0)$ preslikava u točku $O'=(p,q)$ hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ se preslikava u hiperbolu koja ima jednadžbu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Prethodna jednadžba zove se **jednadžba translatirane hiperbole**.

4.2. Tangenta hiperbole

Neka je zadan pravac $y=kx+l$ i hiperbola $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Potrebno je analitički pronaći uvjet da zadani pravac bude tangenta hiperbole, tj. da s hiperbolom ima samo jednu zajedničku točku. Koordinate sjecišta pravca i hiperbole su rješenja sustava

$$\begin{aligned} y &= kx+l \\ b^2x^2-a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu i sređivanjem dobije se

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2klx - a^2(b^2 + l^2) = 0$$

- Ako je $b^2 - a^2k^2 \neq 0$ vrijedi

$$x_{1,2} = \frac{1}{b^2 - a^2k^2}(a^2kl \pm ab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}), \tag{4.4}$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{b^2 - a^2k^2}(b^2l \pm kab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}). \tag{4.5}$$

  Iz (4.4) i (4.5) je očito da, ako je $a^2k^2 - b^2 < l^2$, pravac siječe hiperbolu u dvije točke, ako je $a^2k^2 - b^2 > l^2$, pravac i hiperbola nemaju zajedničkih točaka, a ako je

$$a^2k^2 - b^2 = l^2 \tag{4.6}$$

  onda pravac i hiperbola imaju točno jednu zajedničku točku. Jednadžbu (4.6) zovemo **uvjetom dodira pravca i hiperbole.**

- Ako je $b^2 - a^2k^2 = 0$, onda iz (4.4) i (4.5) slijedi da pravac i hiperbola imaju "beskonačno daleku" zajedničku točku i takav pravac se zove **asimptota hiperbole**. Iz $b^2 - a^2k^2 = 0$ slijedi $k = \pm\frac{b}{a}$, pa je očito da hiperbola ima dvije asimptote. Iz (4.6) slijedi da je $l = 0$ pa asimptote imaju jednadžbu

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{4.7}$$

Ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$, lako se može izvesti jednadžba tangente hiperbole. Iz (4.4) i (4.5) zbog (4.6) slijedi $x_1 = -\frac{a^2k}{l}, y_1 = -\frac{b^2}{l}$, pa je $k = -\frac{x_1l}{a^2}, l = -\frac{b^2}{y_1}$. Slijedi

$$k = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \tag{4.8}$$

što je koeficijent smjera tangente hiperbole ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$. Uvrsti li se (4.8) i $l = -\frac{b^2}{y_1}$ u $y = kx + l$, dobije se

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1},$$

pa je

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1, \tag{4.9}$$

ili

$$b^2x_1x - a^2y_1y - a^2b^2 = 0 \tag{4.10}$$

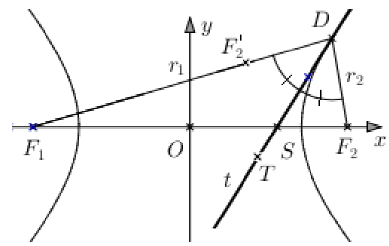
Jednadžba (4.9) je **segmentni oblik jednadžbe tangente hiperbole**, a (4.10) njen **opći oblik**.

4.2.1. Zrcalno svojstvo hiperbole

Propozicija 4.1. *(**Zrcalno svojstvo hiperbole**)Tangenta hiperbole je simetrala unutrašnjeg kuta između radijvektora dirališta.*

Dokaz

Neka je t simetrala vanjskog kuta radijvektora $\overline{F_1D}$ i $\overline{F_2D}$ i F_2' zrcalna slika od F_2 s obzirom na t (Slika 4.2). Da bi se pokazalo da je t tangenta, dovoljno je vidjeti da ona, osim D, s hiperbolom nema drugih zajedničkih točaka. Neka je $T \neq D$ bilo koja druga točka na t. Tada je (prema nejednakosti trokuta) $F_1T - TF_2 = F_1T - TF_2' < F_1F_2' + F_2'T - TF_2'$.



Slika 4.2.

Slijedi da je

$$F_1T - TF_2 < F_1F_2' = F_1D - F_2'D = F_1D - DF_2 = 2a.$$

Konačno, dobije se

$$F_1T - F_2T < 2a$$

pa prema definiciji točka T ne leži na hiperboli. $\square$

Zrcalna slika fokusa F_2 hiperbole s obzirom na tangentu t zovemo **suprotište** fokusa F_2 s obzirom na t.

Propozicija 4.2. *Suprotišta fokusa F_1 s obzirom na sve tangente hiperbole leže na kružnici kojoj je središte u drugom fokusu F_2, a polumjer jednak duljini realne osi hiperbole.*

Dokaz

Neka je t tangenta hiperbole s diralištem u D (Slika 4.2.). Nadalje, neka je S_1 suprotište fokusa F_1 s obzirom na t. Zbog **Propozicije 4.1.**točka S_1 leži na $\overline{F_2D}$. Stoga je $|F_2S_1| = r_2 - |DS_1|$. Kako je $|DS_1| = |DF_1| = r_1$ vrijedi da je $|F_2S_1| = |r_2 - r_1| = 2a$, gdje je $2a$ duljina realne poluosi hiperbole. $\square$

4.2.2. Asimptote hiperbole

Granični položaj tangente kada se njezino diralište po beskonačnoj grani hiperbole giba prema neizmjernosti zovemo **asimptotom hiperbole**. Do jednadžbi asimptota hiperbole dolazi se tako da se potraže koordinate presjeka pravca $y = kx$, koji prolazi ishodištem, i hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tj. rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} y &= kx \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

Dobije se

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \qquad y = \frac{\pm abk}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}.$$

Ako je izraz pod korijenom $b^2 - k^2a^2 > 0$, pravac $y = kx$ siječe hiperbolu u dvije točke, za $b^2 - k^2a^2 < 0$, x i y su imaginarni, pa pravac ne siječe hiperbolu.
Ako je

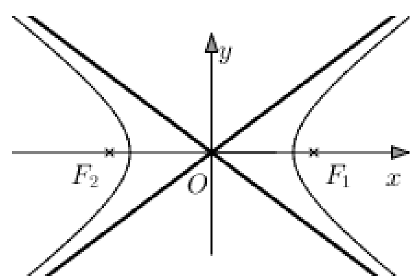
$$b^2 - k^2a^2 = 0 \tag{4.11}$$

tada je $x = \pm\infty$ i $y = \pm\infty$, tj. pravac s hiperbolom ima dvije zajedničke točke u beskonačnosti.
Iz (4.11) slijedi

$$k = \pm\frac{b}{a}. \tag{4.12}$$

Uvrsti li se taj izraz za koeficijent smijera u jednadžbu pravca $y = kx$, dobiju se **jednadžbe dviju asimptota hiperbole** (Slika 4.3.):

$$\begin{aligned} y &= +\frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}$$



Slika 4.3.

Hiperbole kojoj su osi jednake, tj. za koju vrijedi $b = a$ zove se **jednakostranična** hiperbola. Njezina jednadžba glasi

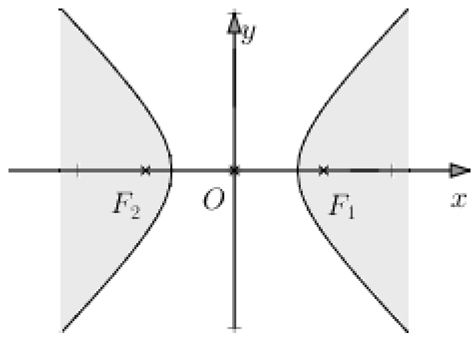
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Asimptote jednakostranične hiperbole su pravci $y = \pm x$, dakle njezine asimptote su okomite.

4.2.3. Tangente povučene iz točke izvan hiperbole

Za točku T kaže se je **unutarnja točka** hiperbole ako svaki pravac koji prolazi kroz T siječe hiperbolu u dvije različite točke. Točka koja nije unutarnja točka hiperbole i ne leži na njoj zove se **vanjska točka** hiperbole. Skup svih unutarnjih točaka zove se **nutrina hiperbole**, a skup svih vanjskih točaka **vanjština hiperbole** (Slika 4.4.).

Propozicija 4.3. *Točka $T = (x_0, y_0)$ je unutarnja točka hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 - -a^2b^2 = 0$ ako i samo ako vrijedi $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$, a vanjska ako je $b^2x_0^2 - -a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$.* □



Slika 4.4.

Propozicija 4.4. *Iz vanjske točke hiperbole koja ne leži ni na jednoj od asimptota mogu se povući točno dvije tangente na tu hiperbolu.*

Dokaz

Pravac $y = kx + l$ je tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ukoliko ispunjava uvjet dodira (4.6). Neka je $T = (x_0, y_0)$ vanjska točka hiperbole. Kako ona leži na spomenutom pravcu, slijedi

$$l = y_0 - kx_0.$$

Iz uvjeta dodira i prethodne jednadžbe vrijedi da je

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k - (b^2 + y_0) = 0.$$

Točkom T moguće je provući točno dvije tangente ukoliko prethodna kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja k_1 i k_2, a to je slučaj kada je njezina diskriminanta $D > 0$. Kako je

$$D = 4x_0^2y_0^2 + 4(a^2 - x_0^2)(b^2 + y_0^2)$$

sređivanjem se dobije

$$D = 4(a^2y_0^2 + a^2b^2 - b^2x_0^2).$$

Iz **Propozicije (4.3)** slijedi da je $D > 0$. □

4.2.4. Pol i polara hiperbole

Slično kao kod elipse, drugi način određivanja tangenata povučenih iz točke izvan hiperbole na hiperbolu moguć je pomoću pojmova pola i polare.

Definicija 4.2. *Za zadanu točku $P = (x_0, y_0)$ i hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ pravac*

$$p \quad \ldots \quad b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0$$

zove se ***polara*** *točke P s obzirom na hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, a točka P zove se* ***pol*** *pravca p.*

Također se može primijetiti da je polara točke hiperbole tangenta hiperbole s diralištem u toj točki.

Propozicija 4.5. *Polara vanjske točke hiperbole, koja ne leži ni na jednoj od njezinih asimptota, spojnica je dirališta tangenata povučenih iz te točke na hiperbolu.*
□

4.3. Direktrise hiperbole

Direktrise hiperbole definirane su analogno kao i direktrise elipse.

Definicija 4.3. *Neka je F jedan od fokusa hiperbole. Pravac takav da za svaku točku T hiperbole vrijedi*

$$\frac{d(T,p)}{d(T,F)} = c,$$

gdje je c pozitivna konstanta, zove se ***direktrisa (ravnalica)*** *hiperbole.*

Kako hiperbola ima dva fokusa, ako ima direktrisu, onda ih ima dvije.
Neka je s d_i označena udaljenost točke T hiperbole od direktrisa p_i i s r_i, $i = 1, 2$, radijvektori te točke. Ako direktrise hiperbole postoje, onda za njih mora vrijediti

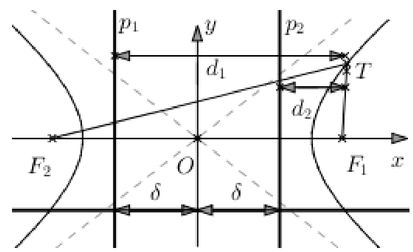
$$r_i = c \cdot d_i. \tag{4.13}$$

Iz predhodne jednadžbe slijedi da direktrisa (ako postoji) ne smije sjeći hiperbolu i da mora biti okomita na njezinu realnu os, dakle paralelna s osi y. Kako je hiperbola simetrična i njene direktrise moraju biti simetrične s obzirom na os y. To su, dakle, pravci koji imaju jednadžbe oblika

$$p_1 \quad \ldots \quad x+\delta=0, \qquad p_2 \quad \ldots \quad x-\delta=0, \quad 0<\delta<a, \tag{4.14}$$

gdje je a realna poluos hiperbole.
Neka je $T=(x,y)$ bilo koja točka na hiperboli. Bez smanjenja općenitosti, neka se T nalazi desno od osi y, tj. neka je $x>0$ (Slika 4.4). Iz slike se jasno vidi da vrijedi

$$d_1=\delta+x, \qquad d_2=\delta-x. \tag{4.15}$$



Slika 4.4.

Kako je $x>0$, vrijedi

$$r_1=a+\varepsilon x, \qquad r_2=\varepsilon x-a. \tag{4.16}$$

Ukoliko se uvrste prve od jednakosti (4.15) i (4.16) u prvu od jednakosti (4.13) dobije se $a+\varepsilon x=c\delta+cx$, pa je odavde $c=\varepsilon$ i iz prethodne jednadžbe slijedi da je $\delta=\frac{a}{\varepsilon}$. Analogni rezultati se dobiju uvrštavanjem drugih jednakosti iz (4.15) i (4.16) u (4.13). Zaključak je da hiperbola ima dvije direktrise i one zbog (4.14) imaju oblik

$$p_1 \quad \ldots \quad \varepsilon x+a=0, \qquad p_2 \quad \ldots \quad \varepsilon x-a=0.$$

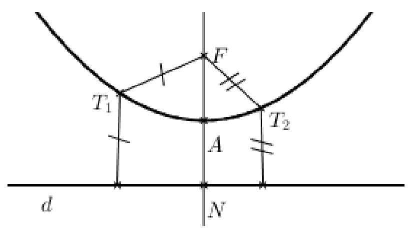
5. Parabola

Definicija 5.1. *Neka je d bilo koji pravac u ravnini i F točka te ravnine M koja ne leži na d. Skup svih točaka ravnine kojih je udaljenost od pravca d jednaka udaljenosti od točke F zove se* ***parabola****.*

Kraće, to je skup

$$P = \{T \in M; d(T,d) = d(T,F)\}$$

Pravac d zove se **direktrisa** ili **ravnalica** parabole, a F **fokus** ili **žarište**.
Ako točkom F povučemo okomicu na d i s N označimo njezino sjecište s d, onda očito polovište A dužine $\overline{NF}$ pripada paraboli (Slika 5.1). Točka A se zove **tjeme parabole**. Okomica na d koja ima nožište u N zove se **os parabole**. Na slici 5.1. se jasno vidi da se parabola lako konstruira ako je poznato žarište F i direktrisa d. Također se vidi da parabola nije definirana "ispod" tjemena A. Ukoliko se pravokutni koordinatni sustav odabere tako da je os x os parabole, a ishodište O je u njezinom tjemenu, također je moguće odrediti i jednadžbu te parabole.



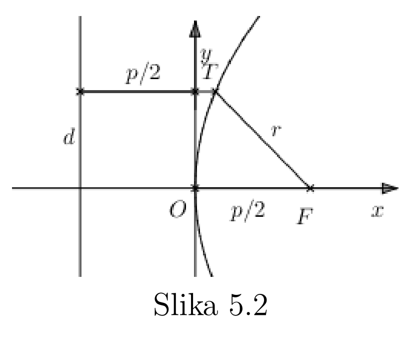
Slika 5.1

5.1. Jednadžba parabole

Neka u Kartezijevom koordinatnom sustavu direktrisa ima jednadžbu $x + \frac{p}{2} = 0$, gdje je $p > 0$ bilo koji realan broj. Broj p zove se **poluparametar**, dok se broj $2p$ zove **parametar parabole** (Slika 5.2). Fokus parabole tada ima koordinate $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Prema definiciji parabole, točka T leži na paraboli ako je $d(T,F) = d(T,d)$, gdje je $d(T,F) = r$ **radijvektor** točke T parabole. Tada vrijedi

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem prethodne jednadžbe dobije se



Slika 5.2

$$y^2 = 2px. \tag{5.1}$$

Stoga, ako točka T leži na paraboli, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu (5.1). Da bi se pokazalo da je ta jednadžba uistinu i jednadžba parabole, potrebno

je još pokazati da ako koordinate neke točke $T = (x, y)$ zadovoljavaju (5.1), onda T leži na paraboli.
Za svaku točku $T = (x, y)$, koja leži u I. i IV. kvadrantu, vrijedi sljedeće:

$$d(T, p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \qquad d(T, F) = x + \frac{p}{2}. \tag{5.2}$$

Ako koordinate točke T zadovoljavaju (5.1), onda iz prve od jednadžbi (5.2) slijedi

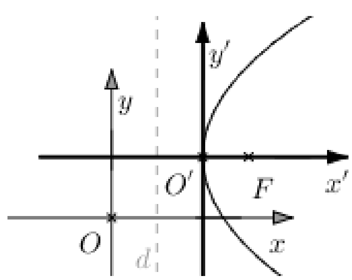
$$d(T, p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Kako je T u I. ili IV. kvadrantu, slijedi da je $x > 0$, a kako je i $p > 0$, iz predhodne jednadžbe slijedi $d(T, p) = x + \frac{p}{2}$, pa iz druge od jednadžbi (5.2) vrijedi da je $d(T, p) = d(T, F)$, tj. točka T leži na paraboli. Prema tome, jednadžba (5.1) jest jednadžba parabole koja se ujedno zove i **tjemena jednadžba parabole**.
Jednadžba $y^2 = -2px, p > 0$ također je jednadžba parabole. Ta se parabola dobije zrcaljenjem parabole $y^2 = 2px$ s obzirom na y-os. Njezin fokus je u točki $F = (-\frac{p}{2}, 0)$, a direktrisa je pravac $x - \frac{p}{2} = 0$.

5.1.1. Jednadžba translatirane parabole

Translacijom koja ishodište O koordinatnog sustava preslikava u točku $O' = (a, b)$ parabola $y^2 = 2px$ preslikava se u parabolu

$$(y - b)^2 = 2p(x - a). \tag{5.3}$$



Slika 5.3

Fokus translatirane parabole nalazi se u točki $F = (\frac{p}{2} + a, b)$, tjeme u $O' = (a, b)$, direktrisa je pravac $x = a - \frac{p}{2}$, a os joj leži na pravcu $y - b = 0$ (Slika 5.3). Svi zadaci analitičke geometrije vezani za parabolu (5.3) rješavaju se tako da se riješe za pripadnu parabolu $y^2 = 2px$ te se zatim rješenja translatiraju. Slično, translacijom parabole $y^2 = -2px, p > 0$, koja ishodište O koordinatnog sustava translatira u točku $O' = (a, b)$ dobije se parabola

$$(y - b)^2 = -2p(x - a).$$

5.2. Tangenta parabole

Pravac, koji nije paralelan s osi parabole, zove se tangenta parabole ako s njome ima točno jednu zajedničku točku. Potrebno je naći uvjet da neki pravac $y = kx+l, k \neq 0$ bude tangenta parabole $y^2 = 2px$. Koordinate sjecišta pravca i parabole dobiju se kao rješenje sustava:

$$\begin{aligned} y &= kx + l \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti prethodnog sustava u drugu, dobije se

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0$$

Rješenja prethodne kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{p - kl \pm \sqrt{p(p - 2kl)}}{k^2} \tag{5.4}$$

Pravac dira parabolu ako sustav ima jedinstveno rješenje, tj. ako je $p(p - 2kl) = 0$. Kako je $p \neq 0$, slijedi

$$p = 2kl. \tag{5.5}$$

Jednakost (5.5) zove se **uvjet dodira pravca i parabole**.

5.2.1. Jednadžba tangente u točki parabole

Ako je zadano njezino diralište $D = (x_1, y_1)$, moguće je pronaći jednadžbu tangente parabole. U slučaju dodira iz (5.4) slijedi da je

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2},$$

a kako D leži i na tangenti, slijedi da je $y_1 = kx_1 + l$, pa uvrštavanjem prethodne jednakosti dobije se $y_1 = \frac{p}{k}$. Znači, k i l su rješenja sustava

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2}, \qquad y_1 = \frac{p}{k}.$$

Kako je $y_1^2 = 2px_1$, iz prethodnog sustava slijedi

$$k = \frac{p}{y_1}, \qquad l = \frac{px_1}{y_1},$$

pa ako se to uvrsti u jednadžbu pravca $y = kx + l$, sređivanjem se dobije:

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{5.6}$$

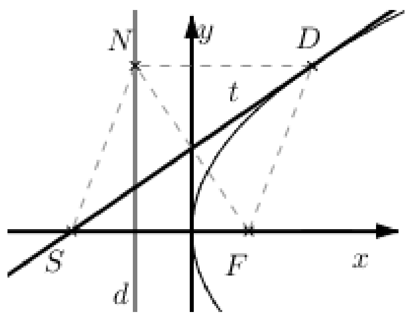
Jednadžba (5.6) je **jednadžba tangente parabole** kojoj je diralište $D = (x_1, y_1)$.

5.2.2. Zrcalno svojstvo parabole

Propozicija 5.1. ***(Zrcalno svojstvo parabole).*** *Tangenta parabole je simetrala kuta radijvektora dirališta i paralele povučene diralištem s osi parabole.*

Dokaz

Neka je $D = (x_1, y_1)$ diralište tangente parabole $y^2 = 2px$ i $\overline{FD}$ radijvektor dirališta.



Slika 5.4

Paralela s osi parabole u provučena kroz točku D siječe direktrisu u točki N (Slika 5.4). Točka S je sjecište tangente s osi x. Iz jednadžbe tangente slijedi da je $S = (-x_1, 0)$. Treba pokazati da je $|\angle FDS| = |\angle SDN|$ tj. da su trokuti $\triangle SFD$ i $\triangle SDN$ sukladni. Po definiciji parabole je $|FD| = |DN|$. Nadalje, $N = (-\frac{p}{2}, \pm\sqrt{2px_1})$ pa je

$$|SN| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2},$$

a kako je $|SF| = x_1 + \frac{p}{2}$, slijedi da je $|SN| = |SF|$. Kako je $\overline{SD}$ pak zajednička stranica tih trokuta slijedi da se oni podudaraju u sve tri stranice, pa su sukladni, što povlači da je $|\angle FDS| = |\angle SDN|$. □

5.2.3. Tangente povučene iz točke izvan parabole

Točka T zove se u**nutarnja točka parabole** ako svaki pravac (osim paralele s osi parabole) kroz T siječe parabolu u dvije različite točke. Nadalje, skup svih unutarnjih točaka naziva se **nutrinom parabole**. Točka koja ne leži na paraboli i nije unutarnja zove se **vanjska točka parabole**. Skup svih vanjskih točaka parabole zove se **vanjština parabole**.

Propozicija 5.2. *Točka $T = (x_0, y_0)$ unutarnja je točka parabole $y^2 = 2px$ ako i samo ako vrijedi $y_0^2 - 2px_0 < 0$, a vanjska ako je $y_0^2 - 2px_0 > 0$.* □

Propozicija 5.3. *Iz vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, mogu se povući točno dvije tangente na parabolu. Iz točke na tjemenoj tangenti može se povući samo jedna tangenta na parabolu.*

Dokaz

Pravac $y = kx + l$ tangenta je parabole $y^2 = 2px$ ako ispunjava uvjet (5.5). Neka je

$T = (x_0, y_0)$ vanjska točka parabole. Kako ona leži na spomenutom pravcu, vrijedi

$$l = y_0 - kx_0.$$

Iz uvjeta dodira i prethodne jednakosti slijedi da je

$$2x_0k^2 - 2y_0k + p = 0.$$

Točkom T moguće je povući dvije tangente ukoliko prethodna kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja, a to je slučaj kada je njezina diskriminanta $D > 0$. Kako je

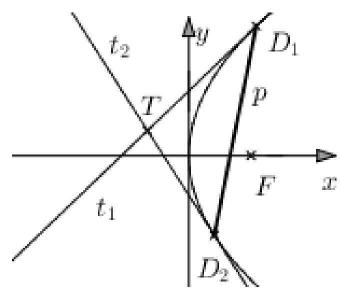
$$D = 4(y_0^2 - 2px_0),$$

$D > 0$ ako i samo ako je $y_0^2 - 2px_0 > 0$, a to je prema Propoziciji (5.2.) ako je T vanjska točka parabole. □

5.2.4. Pol i polara parabole

Tangente povučene iz točke T na parabolu mogu se odrediti i pomoću polare.
Polara točke $T = (x_0, y_0)$ s obzirom na parabolu $y^2 = 2px$ je pravac p zadan jednadžbom

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{5.7}$$



Slika 5.5

Točka T zove se **pol pravca** p.
Geometrijski gledano, značenje polare dano je sljedećom propozicijom.

Propozicija 5.4. *Polara one vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, spojnica je dirališta tangenata povučenih iz te točke na parabolu.*

Dokaz
Neka su $D_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dirališta tangenata povučenih iz točke $T = (x_0, y_0)$ na parabolu $y^2 = 2px$ (Slika 5.5). Jednadžbe tih tangenata glase $yy_i = p(x+x_i), i = 1, 2$. Kako te tangente prolaze točkom T, slijedi da je
$y_0y_i = p(x_0 + x_i)$, $i = 1, 2$, a iz ovih jednadžbi se može zaključiti da dirališta D_i, $i = 1, 2$ leže na polari $yy_0 = p(x - x_0)$ točke T. □

5.3. Dijametri parabole

Skup polovišta paralelnih tetiva naziva se **dijametrima parabole**.

Propozicija 5.5. *Dijametri parabole su pravci paralelni s njezinom osi.*

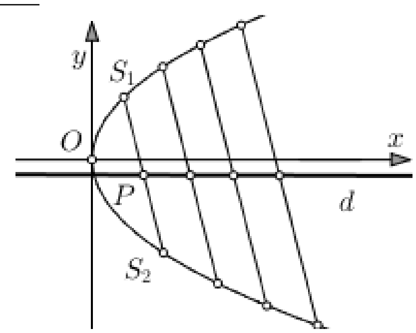
Dokaz Parabola $y^2 = 2px$ presiječe se pramenom paralelnih pravaca $y = kx + l$, gdje je $k \neq 0$ fiksan realan broj, a $l \in \mathbb{R}$ promjenjivi parametar. Ordinate sjecišta S_1 i S_2 parabole i pravca tog pramena rješenja su jednadžbe koja se dobije uvrštavanjem $x = \frac{y-l}{k}$ u jednadžbu parabole. Ona glasi

$$y^2k - 2py + 2pl = 0.$$

Neka su y_1 i y_2 ordinate tih sjecišta. Ordinata polovišta P tetive $\overline{S_1S_2}$ jednaka je $y_p = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ (Slika 5.6). Iz prethodne kvadratne jednadžbe dobije se

$$y_{1,2} = \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 8pkl}}{2k}$$

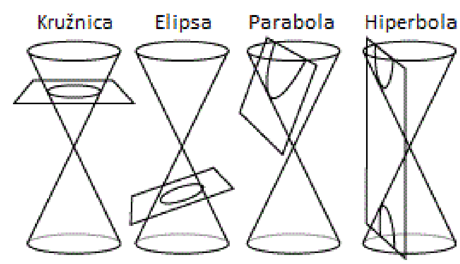
pa uvrštavanjem u $y_p = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ slijedi da je $y_p = \frac{p}{k}$. Lako se vidi da ordinate polovišta imaju uvijek istu vrijednost (p i k su fiksni parametri, y_p ne ovisi o promjenjivom parametru l). Prema tome, polovišta tetiva leže na pravcu $ky - p = 0$, tj. na paraleli s osi parabole. □



Slika 5.6

6. Pojava krivulja drugog reda u svakodnevnom životu

Pronalazak konika (kružnice, elipse, hiperbole i parabole) pripisuje se Menehmu (4. st. prije Krista), pripadniku Platonove Akademije u Ateni. On je otkrio da se presjekom stošca i ravnine koja je okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje je ovisila o vrsti stošca. Za stožac šiljastog vrha dobivamo elipsu, pravokutnog vrha parabolu i tupog vrha dobivamo hiperbolu. Ti nazivi su tek kasnije pridruženi krivuljama.
Konikama se također bavio i Euklid (325. – 265. prije Krista), ali su njegova djela koja se tiču konika izgubljena. Arhimedova djela (287. – 212. prije Krista) sadrže neke važne rezultate o svojstvima konika, pogotovo parabole.
Apolonije iz Perge (262. – 190. prije Krista) je napisao rad o konikama koji se sastoji od osam knjiga. On je prvi uvidio da se na jednom te istom stošcu (bez obzira bio on kos ili uspravan, šiljast ili tup) mogu kao presjek stošca i ravnine dobiti sve tri krivulje. Apolonije je također uveo nazive koje danas koristimo: elipsa, parabola i hiperbola (Slika 6.1).



Slika 6.1

Papo iz Aleksandrije (290.– 350.) je napisao djelo poznato kao *"Colection"* koje je sadržavalo navode i komentare rezultata svojih prethodnika. Uveo je pojmove fokusa i direktrisa hiperbole.
Od tada je povijest konika gotovo prazna sve do petnaestog stoljeća. Renesansa je donijela oživljavanje interesa za grčko znanje što za posljedicu ima povećan interes za konike i ostale krivulje. Prve četiri Apolonijeve knjige o konikama su do tog vremena bile sačuvane na grčkom (prijevod na latinski objavljen je u Veneciji 1537.), a još tri knjige su bile arapski prijevodi (pronađene u 17. stoljeću). Osma knjiga je izgubljena. Papusova djela su originalno bila napisana u osam knjiga, ali su do petnaestog stoljeća samo djelomice sačuvana.
Prvo originalno djelo o konikama u kršćanskoj Europi se zove *"Libellus super viginti duobus elementis conicis"* čiji autor je Johannes Werner (1468. –1528.). On se bavio problemima koje su već obradili grčki matematičari.

Bavio se samo parabolom i hiperbolom jer je njegovo glavno zanimanje bilo udvostručavanje kocke[6], pri čemu mu elipsa nije imala značaja.
Tijekom renesanse se povećao i interes za primjenu geometrijskih spoznaja i u umjetnosti. Proučavanjem raznih optičkih problema konike su dobile još više na važnosti. Također, nove spoznaje u astronomiji su značajno potakle zanimanje za konike. Nikola Kopernik (1473. – 1543.) je ostao pri uvjerenju da je kružnica glavna kada se govori o gibanju nebeskih tijela, ali je Johanes Kepler (1571. – 1630.) prepoznao eliptičnu putanju Marsa oko Sunca. Svojstva konika primjenjivih na astrologiju su tada postala vrlo zanimljiva za cijeli svijet. Kao dio svoje knjige *"Astronomiae pars Optica"* jedno je poglavlje (peto) posvetio konikama.
Kepler razlikuje pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu i pravac. Tvrdi da se jedna krivulja može dobiti iz druge neprekidnim mijenjanjem. Pravac i parabola su dva ekstremna oblika hiperbole, a parabola i kružnica su dva ekstremna oblika elipse. Kepler je prvi uveo naziv "fokus" za značajne točke na osi konike.
Rene Descartes 1637. godine objavljuje djelo *La Géométrie*. Descartes je shvatio krivulje kao geometrijsko mjesto točaka kojima koordinate zadovoljavaju određenu jednadžbu.
Za razliku od Descartesa, Ruđer Bošković (1711. - 1787.) izgradio je teoriju konika posve geometrijski i svoju teoriju objavio u djelu *Sectionum conicarum elementa* godine 1754. u Rimu.

[6]Problem udvostručavanja kocke sastoji se u tome da se prema zadanoj kocki konstruira kocka dvostruko većeg volumena.

6.1. Elipsa

Unatoč tomu što nije tako jednostavna kao kružnica, elipsa je krivulja koja se najčešće može „vidjeti“ u svakodnevnom životu. Razlog tome je što svaki krug, promatran iskosa, postaje eliptičan.

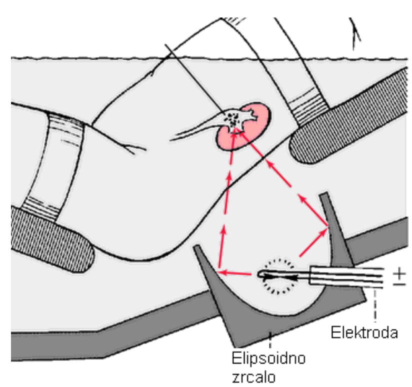
Svaki valjak presječen ravninom pod nekim kutem u poprečnom presjeku prikazuje elipsu. Primjer takvog presjeka vidi se na slici 6.2 na kojoj je prikazan planetarij Tycho Brahe u Kopenhagenu. Nadalje, ukoliko se čaša tekućine nagne, površina te tekućine u njoj poprimit će elipsoidni oblik.

Slika 6.2

Rani grčki astronomi smatrali su da se ostale planete kreću u kružnim orbitama oko Zemlje, jer je kružnica ipak najjednostavnija matematička krivulja. Tek u 17. stoljeću Johannes Kepler otkriva da svaka planeta putuje oko Sunca po eliptičnim orbitama, sa Suncem u jednom od žarišta tih elipsa. Orbite Mjeseca i ostalih umjetnih Zemljinih satelita također su eliptične kao i staze kometa u stalnoj orbiti oko Sunca. Halleyevom kometu je potrebno oko 76 godina da obiđe putanju oko Sunca. Edmund Halley komet je ugledao 1672. godine te je točno predvidio njegov ponovni dolazak 1759. godine. Iako nije doživio vidjeti da se njegovo predviđanje ispunilo, komet je nazvan njegovim imenom njemu u čast.

Zrcalno svojstvo elipse primjenjuje se pri refleksiji svjetlosnih i zvučnih valova.

Svaki svjetlosni signal poslan iz jednog fokusa elipse reflektira se u drugi fokus. Ovaj princip koristi se u **litotripsiji**, medicinskom postupku liječenja bubrežnih kamenaca. Pacijent se postavi u eliptični rezervoar s vodom tako da se oboljeli bubreg nalazi u jednom od fokusa. Visokoenergični udarni valovi koji nastaju u drugom fokusu završavaju u fokusu s oboljelim bubregom te na taj način razbijaju kamenac (Slika 6.3).



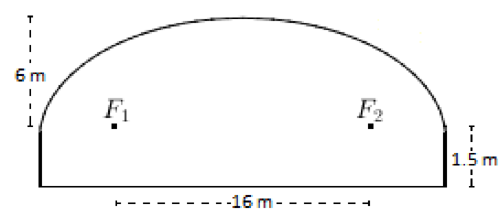
Slika 6.3

Isti princip se također primjenjuje pri izgradnji

akustičnih prostorija kao što je katedrala sv. Pavla u Londonu ili bazilika sv. Ivana Lateranskog u Rimu. Ako osoba koja se nalazi blizu fokusa u tim prostorijama šapće, može ju se čuti kod drugog fokusa iako se ne čuje u mnogim mjestima između. Tu pojavu u katedrali sv. Pavla otkrio je John William Strutt oko 1878. godine.
Također, Statuary Hall u zgradi Kapitola u Washingtonu eliptičnog je izgleda. U toj dvorani je John Quincy Adams, dok je bio član Doma zastupnika, otkrio ovaj akustični fenomen. Naime, on je postavio svoj stol u fokus eliptičnog stropa te na taj način jednostavno prisluškivao privatne razgovore ostalih članova Doma čiji su stolovi bili u drugom fokusu stropa.

Primjer:
Ako netko stoji u jednom fokusu akustične dvorane eliptičnog stropa, njegovo šaptanje jasno se može čuti u drugom fokusu tog stropa. Neka visina stropa takve dvorane doseže maksimalno 6 m iznad 1.5 metara visokih okomitih zidova. Neka su žarišta stropa udaljena 16 m. Koja je visina stropa kod „mjesta šaputanja“?

Pošto je sam strop polovina elipse (točnije gornja polovina) te su žarišta te elipse na liniji koja spaja vrhove zidova, ona su na visini od 1,5 metara od poda što je prilično blizu visine lica prosječno visoke osobe (Slika 6.4).



Slika 6.4

Središte elipse postavi se iznad ishodišta koordinatnog sustava, tj. u točku $O' = (0, 1.5)$. Žarišta su udaljena 16 metara, pa su ona od središta udaljena po 8 metara na svaku stranu. Stoga je $e = 8$. Kako je visina stropa iznad žarišta 6 m vrijedi da je $b = 6$.
Iz jednakosti $b^2 = a^2 - e^2$ dobije se da je $a = 10$. Znači, jednadžba eliptičnog stropa je

$$\frac{(x-0)^2}{10^2} + \frac{(y-1.5)^2}{6^2} = 1$$

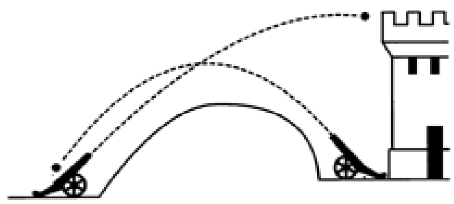
Nadalje se odabere žarište s koordinatom $x = 8$. Uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu te njenim sređivanjem dobije se:

$$\begin{aligned} (y-1.5)^2 &= 12.96 \\ y - 1.5 &= \pm 3.6 \\ y &= 5.1 \end{aligned}$$

Dakle, visina stropa kod fokusa, tj. "mjesta šaputanja" iznosi 5.1 m.

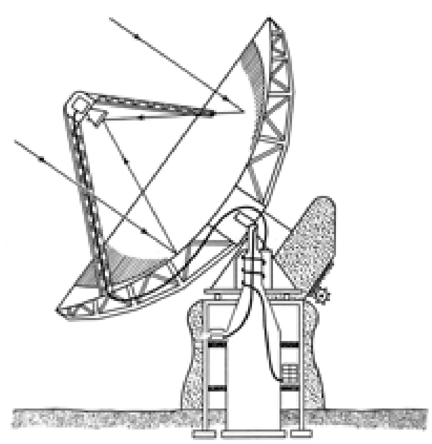
6.2. Parabola

Najpoznatija aproksimacija parabole vidljiva u svakodnevnom životu je put kojeg prevali tijelo ispaljeno kosim hicem, npr. loptica za golf. Otpor zraka i privlačenje gravitacijske sile utječu na razliku putanje projektila od stvarnog oblika parabole, no u mnogim slučajevima ta razlika je zanemariva. Da je putanja projektila parabola, pokazao je Galileo u 17. stoljeću, te je na taj način omogućio topnicima izračunati kut pod kojim bi trebali ispaljivati svoje hice s ciljem pogađanja određene mete (Slika 6.5).



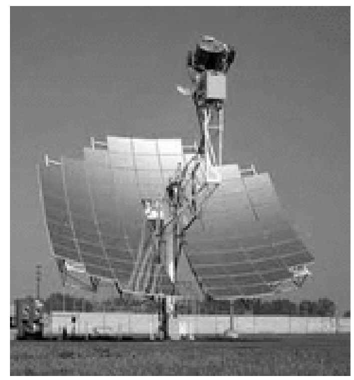
Slika 6.5

Parabole također pokazuju neobična i zanimljiva reflektirajuća svojstva. Ukoliko se svjetlost nalazi u žarištu paraboličnog zrcala (zakrivljena površina nastala rotacijom parabole oko njene osi) zrake svjetlosti će se reflektirati paralelno sa spomenutom osi. Na taj način se oblikuje pravilni snop svjetlosti. Iz tog razloga se parabolične površine primjenjuju u svjetlosnim reflektorima te svjetiljkama.
Suprotno načelo primjenjuje se u golemim ”zrcalima” u reflektirajućima teleskopima i antenama koje se koriste za prihvaćanje svjetlosnih i radio valova iz svemira (Slika 6.6.). Zrake dolaze prema paraboličnoj površini i sve se odbijaju prema žarištu zrcala. Njemački fizičar Heinrich Rudolf Hertz je konstruirao prvu paraboličnu reflektorsku antenu 1888. To je bio parabolični reflektor napravljen od cinkovih metalnih limova, koji je imao drvenu konstrukciju. Objektiv je bio širok 1.2m, žarišna udaljenost 0.12m i radio je na frekvenciji od $450MHz$. Sa dvije takve antene, jedne za slanje, a druge za primanje signala, Hertz je dokazao postojanje radio valova. Prva parabolična antena za satelitske komunikacije je proradila 1962. u Velikoj Britaniji, za komunikaciju sa satelitom Telstar.



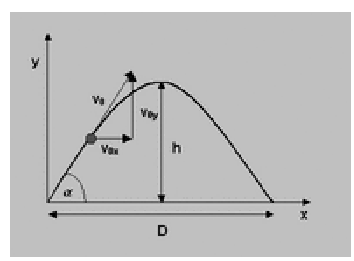
Slika 6.6

Toplinski valovi, kao svjetlosni i zvučni, reflektiraju se ka žarištu paraboličkih površina. Ovo svojstvo toplinskih valova ima veliku primjenu u solarnim termalnim elektranama. Zbog potrebe za visokim temperaturama, gotovo svi oblici solarnih termalnih elektrana moraju koristiti nekakav oblik koncentriranja Sunčevih zraka s velikog prostora na malu površinu. Tu dolazi do izražaja svojstvo parabole da fokusira toplinske valove prema svom žarištu gdje se postavlja toplinski kolektor. Upravo se jedna od vrsta solarnih termalnih elektrana zove parabolični koletori (Slika 6.7). Oni se sastoje od dugih nizova paraboličnih zrcala (zakrivljenih oko samo jedne osi) i kolektora koji se nalazi iznad njih. Njihova je prednost što je potrebno pomicanje zrcala samo kada je promjena položaja Sunca u ortogonalnom smjeru, dok prilikom paralelnog pomaka to nije potrebno jer svjetlost i dalje pada na kolektore. Ukoliko se parabolični kolektor okrene prema Suncu, zapaljivi materijal bi izgorio kad bi se našao u fokusu[7] kolektora.



Slika 6.7

Primjer:(Kosi hitac)
Kosi hitac je gibanje koje tijelo izvodi kad je izbačeno u kosom smjeru u odnosu na tlo (pod nekim kutom u odnosu na x-os vezanu za tlo). Tijelo se giba zbog trenutačno mu dane početne brzine u smjeru bacanja i stalnog utjecaja sile teže prema dolje te opisuje specifičnu putanju. Putanja je krivulja koja eksplicitno govori o ovisnosti y-komponente vektora položaja o x-komponenti. Pitanje je koja putanja odgovara kosom hicu.



Slika 6.8

Iz relacije

$$x(t) = v_{0x}t$$

se izrazi t, a zatim se taj t uvrsti u ovisnost

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Kao rezultat se dobije izraz za putanju

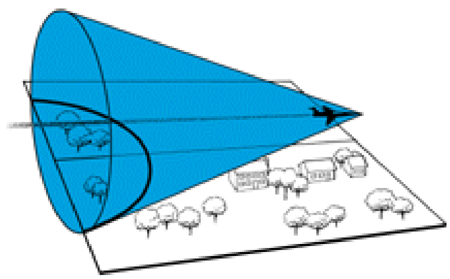
$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2.$$

[7]riječ focus latinski znači ognjište (žarište)

Iz izraza se vidi da je ovisnost kvadratna, dakle, graf funkcije kosog hica je parabola.

6.3. Hiperbola

Postoje mnoge prirodne pojave koje uključuju pojavu hiperbola. Jedna od takvih je zvučni udar koji nastaje kada avion dosegne brzinu zvuka, tj. kada avion probije zvučni zid (Slika 6.9). Val zvučnog udara tada poprima oblik stošca, a kada dođe do tla, postaje jedna grana hiperbole.

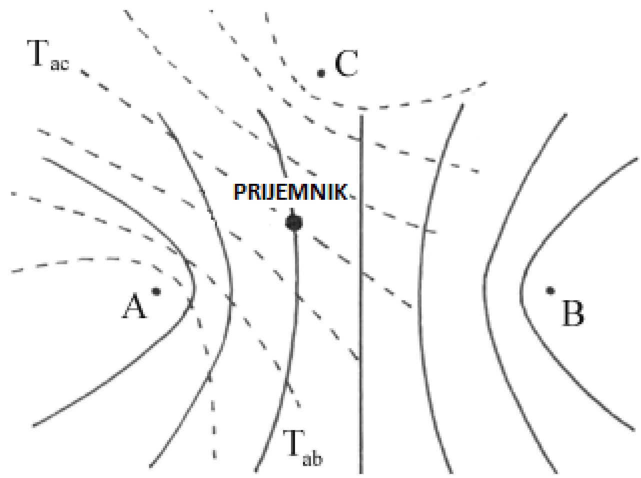


Slika 6.9

Druga primjena hiperbole uključuje radiovalove. Ako se radio signali emitiraju s dva različita mjesta, oni oblikuju dva niza koncentričnih kružnica koji se međusobno presijecaju. Oblici nastali presijecanjem tih nizova koncentričnih kružnica su hiperbole. Ova pojava čini osnovu **LORAN** dalekometnih sustava za navigaciju. Ovaj sustav upotrebljava vremensku razliku u primanju radio signala s dvije različite postaje kako bi odredio geografsku lokaciju prijemnika pomoću hiperbole. Da bi se još točnije odredio položaj prijemnika, dodaje se još jedna postaja. LORAN su izumili Amerikanci kao odgovor na primitivniji britanski sustav iz Drugog svjetskog rata. Rani LORAN sustavi bili su dometa oko 2 km. Ovaj sustav je ostao popularan sve do pojave GPS-a.

LORAN-sustav koristi se pretpostavkom da je brzina rasprostiranja radiovalova konstantna u cijelom području pokrivanja sustava. S obzirom na to da su udaljenost, vrijeme i brzina međusobno ovisni, ako se pretpostavi da je brzina propagacije signala konstantna, moglo bi se mjerenjem vremena potrebnoga da signal od odašiljača dođe do naše pozicije, izračunati udaljenost do odašiljača.

Sustav se sastoji od jednoga glavnog i dva ili više pomoćnih odašiljača, kojima se međusobni rad sinkronizira emisijom glavnog odašiljača. Spajanjem točaka istih razlika udaljenosti ili istih razlika faza dobivaju se hiperbole u fokusima kojih su odašiljači. Utvrđivanjem hiperbola za više razlika udaljenosti ili razlika faza dobiva se polje hiperbola što pokriva područje oko odašiljača. Za svaki hiperbolni navigacijski sustav postojale su posebne navigacijske karte na kojima su bile ucrtane mreže hiperbola, obično u boji, posebno označene za sve parove odašiljača koji rade na tom području.



Slika 6.10

Prijemnik prima signale iz LORAN odašiljača A, B i C. Vremenska razlika u primanju signala s odašiljača A i B smiješta prijemnik na bilo koju točku hiperbole T_{ab}. Isto tako, vremenska razlika u primanju signala s odašiljača A i C smiješta prijemnik na bilo koju točku hiperbole T_{ac}. Točan položaj prijemnika nalazi se u sjecištu hiperbola T_{ab}i T_{ac}.

Još jedna primjena hiperbole može se pronaći u graditeljstvu, konkretnije pri izgradnji golemih rashladnih tornjeva nuklearnih elektrana (Slika 6.11). Prilikom dizajniranja ovih tornjeva inženjeri su suočeni sa sljedećim problemima:

- struktura mora biti dovoljno izdržljiva
- treba iskoristiti što manje materijala

Hiperbolični oblik uspješno rješava oba problema. Za dani promjer, visinu i jačinu vjetra, ovaj oblik zahtjeva manje materijala od bilo kojeg drugog oblika.

Slika 6.11

Literatura

[1] B. Apsen, *Repetitorij više matematike 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] J. Britton, *Occurrence of the Conics*, 2012.S mreže skinuto 25. svibnja 2012.s:
\\ http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm

[3] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3 - udžbenik za treći razred gimnazije*, Element, Zagreb, 1999.

[5] J. Durović, I. Durović, S. Rukavina, *Matematika za 4. razred ekonomskih škola*, Neo-didacta, Zagreb, 2002.

[6] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 2 - udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola*, Element, Zagreb, 1999.

[7] N. Elezović, B. Dakić, *Matematika 3, Analitička geometrija, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovne gimnazije*, Element, Zagreb, 1998.

[8] B. Pavković, D. Veljan,, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Sažetak

Ideja ovog diplomskog rada bila je definiranje krivulja drugog reda, opisivanje njihovih osnovnih svojstava te prikazivanje različitih primjena određene krivulje. Svako poglavlje započeto je definicijom te izvođenjem jednadžbe pojedine krivulje. Također je objašnjen odnos pravca i krivulja, posebno pojam tangente. Najvažniji dio diplomskog rada, primjena krivulja drugog reda, popraćen je primjerima iz svakodnevnog života u svrhu zanimljivosti i lakšeg shvaćanja pojedinih pojmova.

Second-order curves and their applications

Summary

The idea of this dissertation has been to define the second-order curves, describe their basic properties, and demonstrate the different uses of certain curve. Each chapter has begun with definition and performance of certain curve equation. It has also explained the relationship between the line and the curve, especially the notion of tangent. The most important part of the dissertation, the application of the second-order curves, has been accompanied by examples from everyday life, to interest and to facilitate understanding of certain terms.

Životopis

Rođen sam 22. studenog 1986. godine u Slavonskom Brodu. 2001. godine završio sam osnovnu školu "Josip Kozarac" u Slavonskom Šamcu, a 2005. godine opću gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. Godine 2005. upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike, a 2008. Diplomski sveučilišni studij matematike, smjer financijska i poslovna matematika na "Odjelu za matematiku", Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Od rujna 2010. zaposlen sam u OŠ "Josip Kozarac", Slavonski Šamac kao nastavnik matematike.