Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivana Tržić

Verižni razlomci

Diplomski rad

Osijek, 2011.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Tržić

Verižni razlomci

Diplomski rad

Voditelj: prof.dr.sc. Kristian Sabo

Osijek, 2011.

Sadržaj

Uvod

Verižni razlomci spadaju u dio matematike koji se razvio na samim početcima njenog stvaranja. Mnogi povjesničari misle da ideja o verižnim razlomcima seže još iz Euklidova doba, čiji algoritam danas upotrebljavamo prilikom raspisa racionalnog broja u verižni razlomak. Ovi razlomci ne samo da su neobični i zanimljivi samim svojim izgledom, nego je i njihova primjena neobično široka. U ovom radu pokušali smo na što jednostavniji način obraditi osnovne pojmove i tvrdnje vezane uz verižne razlomke, prateći njihove jednostavne i intuitivne dokaze, te pokazati neka njihova svojstva i primjene.

U prvom poglavlju definiramo konačne verižne razlomke i pokazujemo postupak kojim se svaki racionalan broj može zapisati u obliku jednostavnog konačnog verižnog razlomka kao i obratan postupak. Govorimo o konvergentama konačnog verižnog razlomka i njihovim svojstvima. Pomoću programa Mathematice pokazujemo kako na jednostavan način možemo odrediti konvergente konačnog verižnog razlomka. Na kraju poglavlja je pokazano kako svojstva konvergenti možemo iskoristit prilikom rješavanje linearnih diofantskih jednadžbi. Pri tome je najviše korištena literatura pod [1], [6] i [7], a programi u Mathematici se mogu pronaći u [4].

Drugo poglavlje govori o beskonačnim verižnim razlomcima, odnosno o tome kako oni predstavljaju iracionalne brojeve. Pomoću procedure u Mathematici pokazujemo kako se može odrediti prvih nekoliko konvergenti beskonačnog verižnog razlomka, tj. iracionalnog broja. Opisana je i uloga verižnih razlomaka u zadacima aproksimacije realnih brojeva racionalnim, koja je jedna od najočiglednijih i najkorisnijih. Naime, upravo konvergente ovih razlomaka predstavljaju jako dobre aproksimacije iracionalnih brojeva. Malo više pažnje posvećujemo i periodičnim verižnim razlomcima te kvadratnim iracionalnostima. Pokazujemo da periodični verižni razlomci odgovaraju kvadratnim iracionalnostima. Procedurom u Mathematici pokazujemo i obratni postupak, kvadratne iracionalnosti odgovaraju beskonačnim periodičnim verižnim razlomcima. Naveden je i dokaz da se svaki broj oblika $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ može prikazati kao beskonačni periodičan verižni razlomak. U ovom poglavlju je uglavnom korištena literatura pod [1], [2] i [4].

U posljednjem, trećem poglavlju su navedene neke zanimljivosti i neobične formule u kojima se pojavljuju verižni razlomci, koje se mogu pronaći u [3] i [7].

1 Konačni verižni razlomci

1.1 Konačni verižni razlomci

Definicija 1.1 *Neka su* $a_0, a_1, ..., a_n$ *realni brojevi. Izraz oblika:*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} \tag{1.1}$$

nazivamo ***konačni verižni razlomak****. Brojevi* a_i*, i=0,...,n nazivaju se* ***parcijalni kvocijenti*** *verižnog razlomka. Ako je* a_0 *cijeli, te* a_i*, i=1,...,n prirodni brojevi, kažemo da je verižni razlomak jednostavan.*

Izraz (1.1) možemo kraće zapisati kao $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Sređivanjem konačnog verižnog razlomka dobiva se racionalan broj. Dakako, vrijedi i obrat. Svaki racionalan broj $x = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ može se zapisati u obliku (1.1). To se onda zove razvoj broja x u verižni razlomak. Ispod primjera se nalazi i dokaz ove tvrdnje.

Primjer 1.1 *Razvijmo* $\frac{84}{25}$ *u verižni razlomak.*

Prisjetimo se postupka određivanja zajedničke mjere dvaju brojeva pomoću Euklidova algoritma. Odredimo najveću zajedničku mjeru brojeva 84 i 25. Euklidov postupak dijeljenja završava kad dobijemo dijeljenje bez ostatka, a posljednji količnik je zajednička mjera svih parova brojeva koji sudjeluju u postupku (uključujući i početna dva):

$$\begin{aligned} 84 &= \mathbf{3} \cdot 25 + 9 \\ 25 &= \mathbf{2} \cdot 9 + 7 \\ 9 &= \mathbf{1} \cdot 7 + 2 \\ 7 &= \mathbf{3} \cdot 2 + 1 \\ 2 &= \mathbf{2} \cdot 1. \end{aligned}$$

Najveća zajednička mjera ovih brojeva je 1. Kažemo da su relativno prosti. Ovaj postupak dijeljenja možemo pisati i malo drugačije. Svaki redak algoritma zapišimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{84}{25} &= 3 + \frac{9}{25} \\ \frac{25}{9} &= 2 + \frac{7}{9} \\ \frac{9}{7} &= 1 + \frac{2}{7} \\ \frac{7}{2} &= 3 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Prvi redak Euklidovog algoritma možemo i ovako napisati: $\frac{84}{25} = 3 + \frac{9}{25} = 3 + \frac{1}{\frac{25}{9}}$.

Nastavljamo s dijeljenjem opisanim u drugom retku i tako dalje do kraja. Dobiveni niz jednakosti možemo sažeti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\frac{84}{25} &= 3 + \frac{9}{25}\\ &= 3 + \frac{1}{\frac{25}{9}}\\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{7}{9}}\\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{9}{7}}}\\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}}\\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}}\\ &= \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{1}{\mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2}}}}}\end{aligned}$$

ili $[3; 2, 1, 3, 2]$. *Dobili smo razvoj razlomka* $\frac{84}{25}$ *u verižni razlomak.*

Primijetimo kako je zapis svakog "pravog" razlomka, razlomka kojemu je brojnik manji od nazivnika oblika $[0; a_0, a_1, ..., a_n]$, npr. $\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}$, dok je $\frac{29}{67} = 0 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}}$.

Postupak prikazan u prethodnom primjeru može se primijeniti na bilo koji racionalan broj kako bismo dobili konačan jednostavan verižni razlomak. Obratno, vrijedi da svaki konačni jednostavan verižni razlomak predstavlja racionalan broj. Dokažimo tu tvrdnju!

Teorem 1.1 *Svaki konačni jednostavan verižni razlomak može se prikazati kao racionalan broj. Obratno, svaki racionalan broj može se prikazati kao konačni jednostavan verižni razlomak.*

Dokaz. (vidi [4]) Prva tvrdnja lako se pokaže matematičkom indukcijom po duljini verižnog razlomka. Primijetimo prvo da vrijedi $[a_0;] = a_0$. Pokažimo sada bazu indukcije za $n = 1$.

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

Budući da je a_0 cijeli, a a_1 prirodan broj, tvrdnja vrijedi, tj. $\frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ je racionalan broj i time je pokazana baza indukcije. Pretpostavimo da je $[a_1; a_2, ..., a_n]$ racionalan broj. Za $n > 1$ imamo

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]}.$$

Iskoristimo pretpostavku da je $[a_1; a_2, ..., a_n]$ racionalan broj. Možemo pisati

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}},$$

gdje je $\frac{p}{q}$ racionalan broj. Desnu stranu jednakosti zapišemo u obliku

$$\frac{a_0 p + q}{p}$$

koji je racionalan. Time je tvrdnja dokazana, tj. $[a_0; a_1, ..., a_n]$ je racionalan broj. Dokažimo sada obrat prethodne tvrdnje. Pretpostavimo da je $\frac{a}{b}$ racionalan broj, gdje je $b > 0$. Dokazat ćemo da se $\frac{a}{b}$ može zapisati kao konačan verižni razlomak matematičkom indukcijom po b. Pokažimo prvo bazu indukcije. Za $b = 1$ vrijedi

$$\frac{a}{b} = a = [a;].$$

Pretpostavimo da se svaki racionalan broj s nazivnikom manjim od b može prikazati kao konačni jednostavan verižni razlomak. Koristeći teorem o dijeljenju s ostatkom možemo pisati

$$a = ba_0 + r,$$

gdje su a_0 i r cijeli brojevi i vrijedi $0 \leq r < b$. Ako podijelimo jednakost s b, dobivamo

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b}.$$

Ako je $r = 0$, tada je $\frac{a}{b} = a_0 = [a_0;]$ i tvrdnja vrijedi. Ako je $r \neq 0$, onda je

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r}}.$$

Iskoristimo pretpostavku indukcije za $\frac{b}{r}$:

$$\frac{b}{r} = [a_1; a_2, ..., a_n],$$

za neke prirodne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$. Kako je $\frac{b}{r} > 1$, znamo da je a_1 pozitivan broj, te slijedi

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]. \tag{1.2}$$

Što je i trebalo dokazati. ■

Primijetimo da u (1.2) uvijek možemo preoblikovati posljednji parcijalni kvocijent a_n tako da broj članova razvoja bude paran ili neparan. Za svaki $a_n > 1$ možemo pisati

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}},$$

pa (1.2) možemo zamijeniti s

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Znači da svaki racionalan broj ima više zapisa u obliku jednostavnog verižnog razlomka. Promotrimo npr. $\frac{19}{6}$:

$$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}},$$

$$\text{tj.} \qquad \frac{19}{6} = [3;6] = [3;5,1].$$

Dok za $a_n = 1$ vrijedi

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{(a_{n-1}+1)},$$

pa (1.2) izgleda ovako

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}+1].$$

Stoga, imamo sljedeći teorem:

Teorem 1.2 *Svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$ može biti izražen kao jednostavan konačni verižni razlomak u kojemu posljednji član možemo preoblikovati tako da broj članova razvoja bude paran ili neparan.*

Definicija 1.2 *Neka je x realan broj. Najveći cijeli broj koji nije veći od x označavamo sa $\lfloor x \rfloor$ i zovemo najveće cijelo od x ili strop od x.*

Ako pretpostavimo da je posljednji član u razvoju racionalnog broja $\frac{a}{b}$, tj. posljednji parcijalni kvocijent a_n veći od 1, tada se taj racionalan broj na jedinstven način može zapisati u obliku jednostavnog konačnog verižnog razlomka:

Propozicija 1.1 *Neka je x racionalan broj za koji vrijedi $x = [a_0; a_1, ..., a_n] = [b_0; b_1, ..., b_m]$, gdje su a_n i b_m veći od 1. Tada je $n = m$ i $a_i = b_i$ za $0 \leq i \leq n$.*

Dokaz. (vidi [4]) Kako je $\lfloor x \rfloor = a_0$ i $\lfloor x \rfloor = b_0$, odmah slijedi $a_0 = b_0$. Nadalje, kako je

$$x = [a_0; a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]}$$

$$\text{i} \qquad x = [b_0; b_1, ..., b_m] = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, ..., b_m]}$$

slijedi

$$[a_1; a_2, ..., a_n] = [b_1; b_2, ..., b_m].$$

Zaključujemo da je $a_1 = b_1$. Analogno možemo zaključiti da je

$$[a_k; a_{k+1}, ..., a_n] = [b_k; b_{k+1}, ..., b_m].$$

Odnosno, vrijedi $a_k = b_k$ za $0 \leq k \leq n$ i $n = m$. Što je i trebalo dokazati. ∎

Malo drugačiji dokaz ove propozicije može se pronaći u [6, str 5.].

1.2 Konvergente

Definicija 1.3 *Neka je $x = [a_0; a_1, ..., a_n]$. Svaki racionalan broj $c_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$ za $k \leq n$ zovemo **k-ta konvrgenta** od x.*

Primjer 1.2 *Zapišimo broj $\frac{93}{29}$ kao verižni razlomak i odredimo njegove konvergente.*

$$\frac{93}{29} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1+\frac{1}{5}}}, \qquad \textit{tj.} \qquad \frac{93}{29} = [3;4,1,5]$$

Njegove konvergente:

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = [3;] = 3$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = [3;4] = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = [3;4,1] = 3 + \frac{1}{4+\frac{1}{1}} = \frac{16}{5}$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = [3;4,1,5] = 3 + \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}} = \frac{93}{29}$$

Teorem 1.3 *Brojnici p_k i nazivnici q_k, k-te konvergente c_k verižnog razlomka $[a_0; a_1, ..., a_n]$ zadovoljavaju rekurzivne relacije*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad & p_0 &= a_0, \qquad & p_1 &= a_1 a_0 + 1 \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad & q_0 &= 1, \qquad & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

za $k \in \{2, 3, ..., n\}$.

Dokaz. (vidi [6]) Za $k = 0$ imamo $c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ gdje je $p_0 = a_0$ i $q_0 = 1$. Dokaz ćemo dalje provesti matematičkom indukcijom. Pokažimo bazu indukcije za $k = 1$. Vrijedi da je $c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = m$, tada imamo

$$c_m = [a_0; a_1, ..., a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}. \tag{1.3}$$

Treba još pokazati da je tvrdnja istinita za $k = m + 1$, tj. da vrijedi

$$c_{m+1} = [a_0; a_1, ..., a_{m+1}] = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}}.$$

Uočimo da je

$$c_{m+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right)}}}}}}. \tag{1.4}$$

Odnosno

$$c_{m+1} = [a_0; a_1, ..., a_m, a_{m+1}] = [a_0; a_1, ..., a_{m-1}, \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right)], \tag{1.5}$$

dobivamo zapis od c_{m+1} pomoću m članova verižnog razlomka, pa ako iskoristimo pretpostavku indukcije verižni razlomak (1.5) jednak je

$$c_{m+1} = [a_0; a_1, ..., a_{m-1}, \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right)] = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}}. \tag{1.6}$$

Sada pomnožimo brojnik i nazivnik izraza (1.6) s a_{m+1} i dobivamo

$$c_{m+1} = \frac{(a_m \cdot a_{m+1} + 1)p_{m-1} + a_{m+1} \cdot p_{m-2}}{(a_m \cdot a_{m+1} + 1)q_{m-1} + a_{m+1} \cdot q_{m-2}}.$$

Nakon pregrupiranja članova dobivamo

$$c_{m+1} = \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}}.$$

Izrazi u zagradama su brojevi p_m i q_m iz (1.3), pa c_{m+1} možemo zapisati u obliku

$$c_{m+1} = \frac{a_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a_{m+1}q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

i time je tvrdnja teorema dokazana. ■

Primjedba 1.1 *Uzmemo li da je $p_{-2} = 0$ i $p_{-1} = 1$, te $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$ lako se vidi da Teorem 1.3 vrijedi za sve $k \geq 0$. Ali uz napomenu da $\frac{p_{-2}}{q_{-2}}$ i $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ nisu konvergente.*

Sada izračun uzastopnih konvergenti možemo sistematizirati tablicom. Primjerom ćemo to najbolje pokazati.

Primjer 1.3 *Razvoj broja $\frac{120}{49}$ u verižni razlomak je sljedeći*

$$\frac{120}{49} = [2; 2, 4, 2, 2] = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4],$$

kreiramo tablicu

n	-2	-1	0	1	2	3	4
a_n			2	2	4	2	2
p_n	0	1	2	5	22	49	120
q_n	1	0	1	2	9	20	49

Tablica 1.1.

Za svaki $k = 0, ..., n$, p_k dobivamo tako da a_k množimo s p_{k-1} te zbrojimo s p_{k-2}. Analogno, dobivamo q_k. Pomoću ove tablice lako dobivamo $c_k = \frac{p_k}{q_k}$.

Uočimo da je

$$p_{-1}q_{-2} - p_{-2}q_{-1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$
$$p_0 q_{-1} - p_{-1}q_0 = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$
$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1$$
$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 22 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = -1$$
$$\vdots$$

Motivirani s tim dolazimo do sljedećeg teorema:

Teorem 1.4 *Neka je $[a_0; a_1, ..., a_n]$ verižni razlomak i neka su p_k i q_k definirani kao u Teoremu 1.3. Tada vrijedi*

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, \qquad -1 \leq k \leq n.$$

Dokaz. (vidi [2]) Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k. Direktnim uvrštavanjem vidimo da teorem vrijedi za $k = -1, 0$.
Za $k = -1$,

$$p_{-1}q_{-2} - p_{-2}q_{-1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0;$$

za $k = 0$,

$$p_0 q_{-1} - p_{-1}q_0 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^1.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = m - 1$, tj. $p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1} = (-1)^m$, te je dokažimo za $k = m$,

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1}q_m = (-1)^{m+1}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} p_m q_{m-1} - p_{m-1}q_m &= (a_m p_{m-1} + p_{m-2})q_{m-1} - p_{m-1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) \\ &= a_m p_{m-1}q_{m-1} + p_{m-2}q_{m-1} - p_{m-1}a_m q_{m-1} - p_{m-1}q_{m-2} \\ &= -(p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1}) \\ &= -(-1)^m = (-1) \cdot (-1)^m = (-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1}q_m = (-1)^{m+1}$$

čime je teorem dokazan. ∎

Konvergente proizvoljnog racionalnog broja moguće je odrediti primjenom sljedećeg Mathematica modula:

```
In[1]:= x = Input["Unesi razlomak ili listu parcijalnih kvocijenata: "]
  konvergente[x] = Module[{p, q, a, c},
    If[ListQ[x], a = x, a = ContinuedFraction[x]];
    (*a je lista parcijalnih kvocijenata*)
    p[0] = a[[1]];
    q[0] = 1;
    c[0] = p[0] / q[0];
    If[Length[a] > 0,
     p[1] = a[[1]] a[[2]] + 1;
     q[1] = a[[2]];
     c[1] = p[1] / q[1];
```

```
Do[
  p[i] = a[[i + 1]] p[i - 1] + p[i - 2];
  q[i] = a[[i + 1]] q[i - 1] + q[i - 2];
  c[i] = p[i] / q[i],
  {i, 2, Length[a] - 1}
 ];
 Table[c[i], {i, 0, Length[a] - 1}]
 ]
]
```

Primjer 1.4 *Primjenom prethodnog Mathematica modula dobivamo da su konvergente broja* $\frac{120}{49}$*:*

Out[1]= $\frac{129}{49}$

Out[2]= $\left\{2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{21}{8},\ \frac{29}{11},\ \frac{50}{19},\ \frac{129}{49}\right\}$

Analogno dobijemo ako umjesto razlomka $\frac{120}{49}$ *unesemo njegove parcijalne kvocijente* $[2; 2, 4, 2, 2]$ *kao listu.*

Out[3]= {2, 2, 4, 2, 2}

Out[4]= $\left\{2,\ \frac{5}{2},\ \frac{22}{9},\ \frac{49}{20},\ \frac{120}{49}\right\}$

1.3 Verižni razlomci i linearne diofantske jednadžbe

Postoje razne vrste jednadžbi, a one kod kojih se promatraju samo cjelobrojna rješenja nazivaju se diofantske jednadžbe.

Definicija 1.4 *Jednadžbu oblika* $ax + by = c$*, gdje su* a*,* b *i* c *cijeli brojevi i* $a \neq 0$*,* $b \neq 0$ *nazivamo* ***linearna diofantska jednadžba****. Brojevi* x *i* y *koji zadovoljavaju jednadžbu nazivaju se rješenja jednadžbe.*

Jednadžbe ovog oblika možemo rješavati različitim metodama: pogađanjem partikularnog rješenja, Euklidovim algoritmom, Eulerovom metodom, ... Mi ćemo pokazati kako ih možemo riješiti koristeći verižne razlomke (vidi [1] i [7]).

1.3.1 Opće rješenje jednadžbe ax-by=c

Neka je $(a,b)=1$, tj. a i b relativno prosti prirodni brojevi, $c \in \mathbb{Z}$ i neka je dana jednadžba

$$ax - by = c. \tag{1.7}$$

Razvijmo racionalan broj $\frac{a}{b}$ u konačni verižni razlomak. Kako se taj razvoj $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ sastoji od n članova, možemo iskoristiti formulu iz *Teorema 1.4*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}, \qquad n \geq -1.$$

Kako je $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$, supstitucijom dobivamo

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Ako je n neparan tada je

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = 1$$

i q_{n-1} i p_{n-1} su partikularna rješenja jednadžbe $ax - by = 1$. Ako je n paran, tada obje strane jednadžbe pomnožimo s -1. Međutim mi tražimo rješenja jednadžbe $ax - by = c$, a ne $ax - by = 1$. Da bismo dobili ta rješenja dovoljno je obje strane jednadžbe $a q_{n-1} - b p_{n-1} = 1$ pomnožiti sa c. Tada dobivamo

$$a(q_{n-1} c) - b(p_{n-1} c) = c,$$

pa su partikularna rješenja jednadžbe (1.7) dana s $x_0 = q_{n-1} c$ i $y_0 = p_{n-1} c$. Pretpostavimo da je (x, y) jedino preostalo rješenje jednadžbe (1.7). Sada imamo

$$ax - by = c, \tag{1.8}$$

$$a x_0 - b y_0 = c. \tag{1.9}$$

Oduzmemo li od (1.8) jednadžbu (1.9) dobivamo

$$a(x - x_0) = b(y - y_0). \tag{1.10}$$

Iz ovog vidimo da b mora dijeliti lijevu stranu ove jednadžbe. Međutim b ne dijeli a jer su a i b relativno prosti, što znači da b dijeli $(x - x_0)$ pa možemo pisati $x - x_0 = tb$, $t \in \mathbb{Z}$ ili

$$x = x_0 + tb.$$

Uvrstimo li to u (1.10) imamo $a(tb) = b(y - y_0)$, odnosno $y - y_0 = at$, pa je

$$y = y_0 + at.$$

Slijedi da je jedino preostalo rješenje (x, y) jednadžbe (1.7) dano s

$$x = x_0 + tb = q_{n-1} c + tb \tag{1.11}$$

$$y = y_0 + at = p_{n-1} c + at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Formulama (1.11) i (1.12) je dano opće rješenje jednadžbe (1.7) i ova jednadžba ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja (x, y).

Primjer 1.5 *Riješimo jednadžbu 17x-13y=5.*

Najprije broj $\frac{17}{13}$ *razvijemo u verižni razlomak i izračunamo njegove konvergente.*

$$\frac{17}{13} = [1; 3, 4]$$

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1}, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{11}{5}.$$

Partikularno rješenje dano je s $x_0 = cq_{n-1} = 5 \cdot 3 = 15$ *i* $y_0 = cp_{n-1} = 5 \cdot 4 = 20$. *Dakle opće rješenje zadane jednadžbe je*

$$x = x_0 + bt = 15 + 13t,$$

$$y = y_0 + at = 20 + 17t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

1.3.2 Opće rješenje jednadžbe ax+by=c

Neka je $(a, b) = 1$, tj. a i b relativno prosti prirodni brojevi, $c \in \mathbb{Z}$ i neka je dana jednadžba

$$ax + by = c. \tag{1.13}$$

Razvijmo racionalan broj $\frac{a}{b}$ u konačni verižni razlomak. Kako se taj razvoj $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ sastoji od n članova, opet možemo iskoristiti formulu iz *Teorema 1.4*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}, \qquad n \geq -1.$$

Kako je $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$, supstitucijom dobivamo

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Ako je n neparan tada je

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1.$$

Ako je n paran, tada obje strane jednadžbe $aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n+1}$ pomnožimo s -1. Zapišimo sada jednadžbu (1.13) na sljedeći način

$$ax + by = c \cdot 1 = c(aq_{n-1} - bp_{n-1}),$$

ako pregrupiramo članove dobivamo

$$a(cq_{n-1} - x) = b(y + cp_{n-1}). \tag{1.14}$$

Vidimo da b dijeli lijevu stranu jednadžbe, a kako je $(a, b) = 1$, znači da b dijeli $(cq_{n-1} - x)$ i $\exists t \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$cq_{n-1} - x = bt, \tag{1.15}$$

odnosno

$$x = cq_{n-1} - bt. \tag{1.16}$$

Uvrstimo li (1.15) u (1.14) dobivamo

$$a(tb) = b(y + cp_{n-1}),$$

a iz ovoga dobivamo

$$y = at - cp_{n-1}. \tag{1.17}$$

Uvrštavanjem (1.16) i (1.17) u $ax + by$, za $\forall t \in \mathbb{Z}$ dobivamo

$$\begin{aligned} ax + by &= a(cq_{n-1} - tb) + b(at - cp_{n-1}) \\ &= acq_{n-1} - tab + tab - bcp_{n-1} \\ &= c(aq_{n-1} - bp_{n-1}) = c \cdot 1 = c, \end{aligned}$$

dakle jednadžba (1.13) je zadovoljena. Opća rješenja jednadžbe (1.13) su dana s

$$\begin{aligned} x &= cq_{n-1} - bt, \\ y &= at - cp_{n-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Primjer 1.6 *Riješimo jednadžbu 13x+17y=300.*

Odredimo prvo partikularno rješenje jednadžbe $13x - 17y = 1$.

$$\frac{13}{17} = [0; 1, 3, 4]$$

Konvergente

$$\frac{p_0}{q_0} = 0, \qquad \frac{p_1}{q_1} = 1, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{13}{17}.$$

Tada je $(x_0, y_0) = (4, 3)$ *partikularno rješenje jednadžbe* $13x - 17y = 1$, *tj. vrijedi* $13 \cdot (4) - 17 \cdot (3) = 1$.

$$13x + 17y = 300(13 \cdot 4 - 17 \cdot 3),$$

ili

$$13(x - 1200) = -17(900 + y),$$

-17 dijeli (x-1200) pa dobivamo:

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= 1200 - 17t \\ y &= 13t - 900, \qquad t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

što je opće rješenje zadane jednadžbe.

1.3.3 Jednadžba Ax±By=±C

Neka su $A, B, C \in \mathbb{N}$ i d najveći zajednički djelitelj od A i B. Ako d ne dijeli C, onda jednadžba

$$Ax \pm By = \pm C \tag{1.18}$$

nema cjelobrojnih rješenja, jer desna strana jednadžbe (1.18) nije djeljiva s d. Pretpostavimo da d dijeli C. Sada obje strane jednadžbe (1.18) možemo podijeliti s d. Tada dobivamo jedan od oblika

$$ax + by = c, \tag{1.19}$$

$$ax - by = c, \tag{1.20}$$

u kojima su a i b relativno prosti prirodni brojevi i $c \in \mathbb{Z}$. Sad kao i u odjeljcima 1.3.1 i 1.3.2 razvijemo racionalan broj $\frac{a}{b}$ u jednostavni verižni razlomak te odredimo njegove konvergente. Za neparan n je

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1,$$

te je opće rješenje jednadžbe (1.19)

$$\begin{aligned} x &= cq_{n-1} - tb \\ y &= ta - cp_{n-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

a jednadžbe (1.20)

$$\begin{aligned} x &= cq_{n-1} + tb \\ y &= cp_{n-1} + ta, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Konačno, rješenja (1.21) i (1.22) predstavljaju opće rješenje polazne jednadžbe

$$Ax \pm By = \pm C.$$

2 Beskonačni verižni razlomci

2.1 Beskonačni verižni razlomci

Što predstavljaju i čemu služe beskonačni verižni razlomci? Slutnja da beskonačni verižni razlomci predstavljaju iracionalne brojeve pokazala se istinitom. Promotrimo sljedeće (vidi [1]):
Poznato je da se svaki realan broj x može prikazati kao točka na brojevnom pravcu koja se nalazi između dva uzastopna cijela broja. Označimo te brojeve s a i $a+1$. Tada možemo pisati $a \leq x \leq a+1$. Neka je x iracionalan broj, tada $a = \lfloor x \rfloor$. Broj $n = x - a$ zadovoljava $0 < n < 1$. Ovo je prvi korak u procesu razvoja broja x u verižni razlomak.
Krenimo ispočetka. Neka je x iracionalan broj, takav da

$$a_0 \leq x \leq a_0 + 1, \qquad a_0, a_0 + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Tada $a_0 = \lfloor x \rfloor$ i možemo pisati

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad 0 < \frac{1}{x_1} < 1. \tag{2.1}$$

Kako je $\frac{1}{x_1} < 1$, to je $x_1 > 1$, uzmimo $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, pa vrijedi

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1. \tag{2.2}$$

Sada je opet zbog $\frac{1}{x_2} < 1$, $x_2 > 1$, uzmimo $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$, pa vrijedi

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad 0 < \frac{1}{x_3} < 1 \tag{2.3}$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{x_k}, \qquad 0 < \frac{1}{x_k} < 1 \tag{2.4}$$

$$\vdots$$

gdje su $a_0, a_1, ..., a_{k-1}, ... \in \mathbb{Z}$, a brojevi $x, x_0, x_1, ..., x_k, ... \in \mathbb{I}$.
Uvrstimo li sad izraz (2.2) u (2.1), (2.3) u (2.2) itd., nakon k koraka dobivamo jednostavan beskonačni verižni razlomak

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = \dots$$

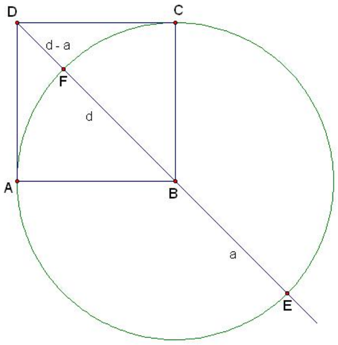
$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-1} + x_k}}}}$$

što kraće zapisujemo $x = [a_0; a_1, ..., a_{k-1}, x_k]$.

Primjer 2.1 *Pokažimo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.*

Poznata nam je tvrdnja: ***Omjer duljina dijagonale i stranice kvadrata iracionalan je broj****. Ovu tvrdnju ćemo dokazati tako što ćemo pokazati da se taj omjer koji je jednak broju $\sqrt{2}$ može prikazati kao beskonačni verižni razlomak.*

Dokaz. *(vidi [3])*



Slika 1.

Iz potencije točke na kružnicu (odnosno sličnosti ΔDEC i ΔDCF prema Slici 1.) znamo da vrijedi

$$DF \cdot DE = DC^2$$

odnosno $(d-a)(d+a) = a^2$. Označimo traženi omjer $d : a$ s α. Imamo $(\alpha$-1$)(\alpha$+1$)$=1

$$\Rightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{1+\alpha}.$$

Uvrstimo li s desne strane umjesto α izraz kojemu je on jednak, dobit ćemo:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\alpha}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\alpha}}} = ...$$

Postupak se nastavlja u beskonačnost:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\delta}}}}}}.$$

Omjeru α odgovara beskonačni, a ne konačni verižni razlomak. To dakle nije racionalan broj. Što je i trebalo dokazati. ■

Prema tome razvoj broja $\sqrt{2}$ u beskonačni verižni razlomak je

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, \delta]$$

što još pišemo

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, ...] = [1; \bar{2}]. \tag{2.5}$$

Oznaka $\bar{2}$ znači da se broj 2 uzastopno ponavlja.
Prvih nekoliko aproksimacija:

$$\sqrt{2} \approx 1,$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = 1.5,$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4,$$

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.416666666...$$

Dakle aproksimacije $1 = [1;]$, $\frac{3}{2}$=[1;2], $\frac{7}{5}$=[1;2,2], $\frac{17}{12}$=[1;2,2,2], ... su konvergente verižnog razlomka (2.5).

2.2 Konvergente

Ako u beskonačnom verižnom razlomku $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$, tj. $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, ...]$ uzmemo samo konačno mnogo članova, $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$, onda se takav izraz zove **k-ta konvergenta beskonačnog verižnog razlomka x**.

Konvergente $c_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$ računamo pomoću rekurzivnih formula

$$\begin{array}{lll} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & p_0 = a_0, & p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & q_0 = 1, & q_1 = a_1 \end{array}$$

za $k \in \{2, 3, ..., n\}$, isto kao što smo računali konvergente konačnog verižnog razlomka. Po dogovoru je $p_{-2} = 0$ i $p_{-1} = 1$, te $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$. Vrijedi i relacija

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, \qquad k \geq -1.$$

Korolar 2.1 *Neka je $[a_0; a_1, a_2, ...]$ beskonačni verižni razlomak. Tada je*

(i)

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}$$

(ii)

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

za sve $k \geq 1$.

Dokaz. (vidi [4]) Formule *(i)* i *(ii)* ćemo dokazati raspisivanjem konvergenti pomoću gore navedenih rekurzija.

(i)

$$c_k - c_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}},$$

(ii)

$$\begin{aligned} c_k - c_{k-2} &= \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})}{q_k q_{k-2}} \\ &= \frac{a_k p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-2} - a_k q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-2} q_{k-2}}{q_k q_{k-2}} \\ &= \frac{a_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2})}{q_k q_{k-2}} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}. \end{aligned}$$

Što je i trebalo dokazati. ■

Korolar 2.2 *Neka su $c_0, c_1, c_2, \ldots$ konvergente beskonačnog verižnog razlomka. Tada za paran $k \geq 0$ i neparan $l \geq 1$ vrijedi:*

$$c_k < c_{k+2},$$

$$c_{l+2} < c_l,$$

$$c_k < c_l.$$

Odnosno,

$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots < c_{2k} < \ldots < c_{2k+1} < \ldots < c_5 < c_3 < c_1.$$

Dokaz. (vidi [4]) Prema prethodnom korolaru imamo

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

iz čega slijedi da je

$$c_k < c_{k-2}, \qquad \text{za paran} \qquad k \geq 0,$$

$$c_{l+2} < c_l, \qquad \text{za neparan} \qquad l \geq 1.$$

Opet prema *Korolaru 2.1* imamo

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}.$$

Za paran $k \geq 2$ dobivamo

$$c_k < c_{k-1},$$

a iz toga

$$c_k < c_{k-1} < c_{k-3} < \ldots < c_3 < c_1.$$

Dakle vrijedi

$$c_k < c_l,$$

za $k > l$, gdje je k paran, a l neparan. Slično, za neparan l imamo

$$c_{l-1} < c_l,$$

odnosno

$$c_0 < c_2 < \ldots < c_{l-1} < c_l.$$

Stoga smo pokazali da je $c_k < c_l$ i za $k < l$, gdje je k paran, a l neparan. Što je i trebalo dokazati. ■

Teorem 2.1 *Neka je a_0 cijeli broj i $(a_i)_{i \geq 1}$ niz prirodnih brojeva. Tada je niz (c_n), gdje je*

$$c_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n],$$

konvergentan.

Dokaz. (vidi [4]) Pokazat ćemo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|c_l - c_k| < \varepsilon$$

gdje je $N \leq k \leq l$. Dakle, pokazat ćemo da je niz Cauchyev, jer znamo da svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ konvergira (vidi [5]). Uočimo da je c_n n-ta konvergenta od c_l, za $n \leq l$. Ako je k paran i $l \geq k$, onda iz *Korolara 2.2* slijedi

$$c_k \leq c_l \qquad \text{i} \qquad c_l < c_{k-1}.$$

Ako je k paran i $l > k$, onda prema *Korolaru 2.2* slijedi

$$c_k < c_l \qquad \text{i} \qquad c_l < c_{k-1}.$$

Odatle je

$$c_k \leq c_l < c_{k-1}.$$

Slično, ako je k neparan, dobivamo

$$c_{k-1} < c_l \leq c_k.$$

U oba slučaja vrijedi

$$|c_l - c_k| \leq |c_k - c_{k-1}|.$$

Neka su $p_0, p_1, ..., p_l$ i $q_0, q_1, ..., q_l$ definirani za verižni razlomak $[a_0; a_1, ..., a_l]$ kao u *Teoremu 1.3.* Prema *Korolaru 2.1* slijedi

$$|c_l - c_k| \leq \frac{1}{q_k q_{k-1}}.$$

Kako q_i raste, možemo naći N takav da je $q_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Sada za $N \leq k \leq l$ imamo

$$|c_l - c_k| \leq \frac{1}{q_k q_{k-1}} \leq \frac{1}{q_N q_{N-1}} < \varepsilon.$$

Pokazali smo da je niz Cauchyev, tj. da niz (c_n) konvergira. ■

Besonačni verižni razlomak sada možemo definirati i na sljedeći način:

Definicija 2.1 *Neka je $(a_i)_{i\geq 0}$ niz cijelih brojeva gdje su a_i pozitivni za $i \geq 1$.* ***Beskonačni jednostavan verižni razlomak*** *$[a_0; a_1, a_2, ...]$ se definira kao*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

Brojeve a_i nazivamo ***parcijalnim kvocijentima****, te definiramo* ***n-tu konvergentu*** *verižnog razlomka $[a_0; a_1, a_2, ...]$ kao $c_n = [a_0; a_1, ..., a_n]$.*

Konvergente proizvoljnog iracionalnog broja moguće je odrediti primjenom sljedećeg Mathematica modula:

```
In[1]:=
x = Input["Unesi iracionalan broj: "]
n = Input["Unesi koliko konvergenti zelis izracunati: "]
konvergente[x] = Module[{p, q, a, c},
  If[ListQ[x], a = x, a = ContinuedFraction[x, n]];
  (*a je lista parcijalnih kvocijenata*)
  p[0] = a[[1]];
  q[0] = 1;
  c[0] = p[0] / q[0];
  If[Length[a] > 0,
   p[1] = a[[1]] a[[2]] + 1;
   q[1] = a[[2]];
   c[1] = p[1] / q[1];
   Do[
    p[i] = a[[i + 1]] p[i - 1] + p[i - 2];
    q[i] = a[[i + 1]] q[i - 1] + q[i - 2];
    c[i] = p[i] / q[i],
    {i, 2, Length[a] - 1}
   ];
   Table[c[i], {i, 0, Length[a] - 1}]
  ]
 ]
konvergentebesk[x, n] = konvergente[ContinuedFraction[x, n]];
```

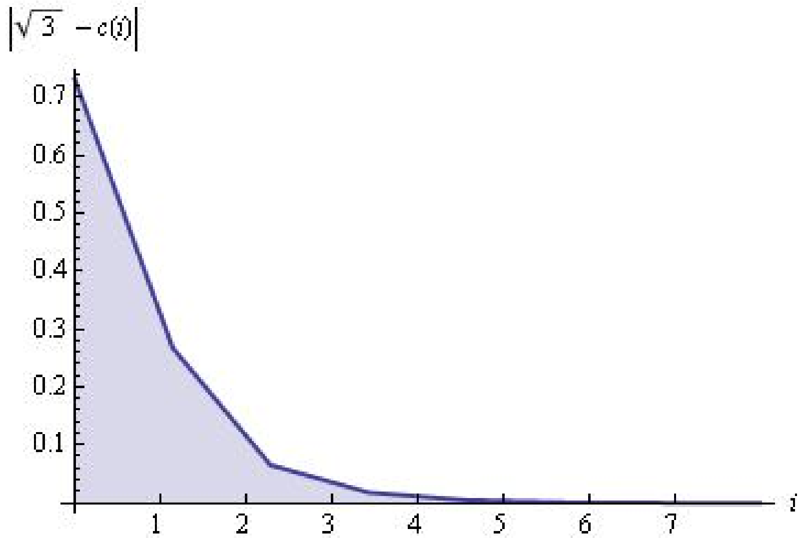
Primjer 2.2 *Primjenom prethodnog Matematica modula dobivamo da su konvergente broja* $\sqrt{3}$*:*

Out[1]= $\sqrt{3}$

Out[2]= 8

Out[3]= $\left\{1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}\right\}$

Na *Slici 2.* je prikazan odnos iracionalnog broja $\sqrt{3}$ i njegovih konvergenti.



Slika 2.

Vidimo da je apsolutna vrijednost razlike broja $\sqrt{3}$ i svake sljedeće konvergente sve manja, odnosno za sve veći i, c_i-ta konvergenta bolje predstavlja broj $\sqrt{3}$. Kako su konvergente racionalni brojevi, iz ovog možemo zaključiti da se beskonačni verižni razlomci mogu dobro aproksimirati svojim konvergentama.

2.3 Racionalne aproksimacije realnih brojeva

Znamo da se iracionalan broj ne može zapisati kao decimalan broj s konačnim brojem znamenaka, no možemo naći njegovu aproksimaciju. Uloga verižnih razlomaka u zadacima aproksimacije realnih brojeva racionalnim jedna je od najočiglednijih i najkorisnijih. Zapis realnog broja x u beskonačni verižni razlomak $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ je analogan beskonačnom decimalnom zapisu. Zaokružimo li beskonačni decimalni zapis iracionalnog broja na konačan broj znamenki, dobivamo racionalnu aproksimaciju broja. Isto vrijedi za zapis u verižni razlomak. Tako je broj $[a_0; a_1, ..., a_n]$ racionalna aproksimacija broja x. Želimo pokazati da konvergente predstavljaju dobre aproksimacije broja x. Postoji više načina kako definirati što to znači da je aproksimacija dobra. Mi ćemo razmotriti nekoliko.

Teorem 2.2 *Neka realan broj x ima zapis u jednostavan beskonačni verižni razlomak $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$ i neka je c_n njegova n-ta konvergenta. Tada vrijedi:*

$$c_0 < c_2 < c_4 < ... < x < ... < c_5 < c_3 < c_1.$$

Dokaz. (vidi [4]) Primijetimo da su $c_0, c_1, ..., c_n$ konvergente i konačnog verižnog razlomka $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Prema *Korolaru 2.2* vrijedi $c_k < c_l$, pa nam preostaje pokazati da za svaki paran k i neparan l vrijedi:

$$c_k < x < c_l.$$

Pokazali smo da niz $c_0, c_1, c_2, ...$ konvergira k x, a znamo da i svaki podniz tog niza konvergira k x (vidi [5]). Stoga:

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = x, \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = x. \tag{2.7}$$

Kako je $c_0 < c_2 < c_4 < ...$ iz (2.6) slijedi da je $c_{2n} < x$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Analogno, iz (2.7) slijedi da je $x < c_{2n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, čime je teorem dokazan. ■

Korolar 2.3 *Neka je c_n n-ta konvergenta zapisa realnog broja x u jednostavan beskonačni verižni razlomak, te neka su p_n i q_n definirani kao u Teoremu 1.3. Tada vrijedi*

$$|x - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Dokaz. (vidi [4]) Prema prethodnom teoremu vrijedi

$$|x - c_n| < |c_{n+1} - c_n|.$$

Iz *Korolara 2.1* slijedi

$$|c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}.$$

Zato je

$$|x - c_n| < |c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Što je i trebalo dokazati. ■

Korolar 2.4 *Jednostavan beskonačni verižni razlomak predstavlja iracionalan broj.*

Dokaz. (vidi [4]) Pretpostavimo suprotno, tj. da beskonačni verižni razlomak predstavlja racionalan broj:

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ...], \qquad (a, b) = 1, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Neka je $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, n-ta konvergenta verižnog razlomka. Izaberimo dovoljno velik n tako da vrijedi $|b| < q_n$. Kako $\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n}$, vrijedi

$$aq_n - bp_n \neq 0.$$

Koristeći prethodni korolar možemo pisati

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Kako je $|b| < q_n < q_{n+1}$, možemo zaključiti da vrijedi

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{|b|}{q_{n+1}} < 1.$$

Kako je $aq_n - bp_n$ cijeli broj, dolazimo do kontradikcije. Dakle, beskonačni verižni razlomak predstavlja iracionalan broj. ■

Pokažimo još da je zapis iracionalnog broja u beskonačni verižni razlomak **jedinstven**.

Teorem 2.3 *Neka je x iracionalan broj te neka je*

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...] = [b_0; b_1, b_2, ...],$$

za cijele brojeve a_n i b_n, $n \geq 0$. Tada je $a_n = b_n$, za svaki $n \geq 0$.

Dokaz. (vidi [4]) Iz *Teorema 2.2* slijedi

$$c_0 < x < c_1, \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{p_0}{q_0} < x < \frac{p_1}{q_1},$$

kako je $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ i $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ dobivamo

$$a_0 < x < a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Vidimo da je $a_0 = \lfloor x \rfloor$ i $b_0 = \lfloor x \rfloor$, pa slijedi $a_0 = b_0$. Dalje,

$$\begin{aligned} x &= \lim_{m\to\infty} [a_0; a_1, ..., a_m] \\ &= a_0 + \frac{1}{\lim_{m\to\infty} [a_1; a_2, ..., a_m]} \\ &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ...]}. \end{aligned}$$

Analogno je

$$x = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, ...]}.$$

Stoga

$$[a_1; a_2, ...] = [b_1, b_2, ...].$$

Slično kao i gore zaključujemo da je $a_1 = b_1$. Induktivno zaključujući dobivamo

$$[a_n; a_{n+1}, ...] = [b_n, b_{n+1}, ...], \qquad \forall n \geq 0.$$

Odnosno $a_n = b_n$ za svaki $n \geq 0$. Što je i trebalo dokazati. ■

Zbog jedinstvenosti zapisa iracionalnog broja x u jednostavan beskonačni verižni razlomak, vrijedi sljedeća tvrdnja. Ako je

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...],$$

tada je $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.

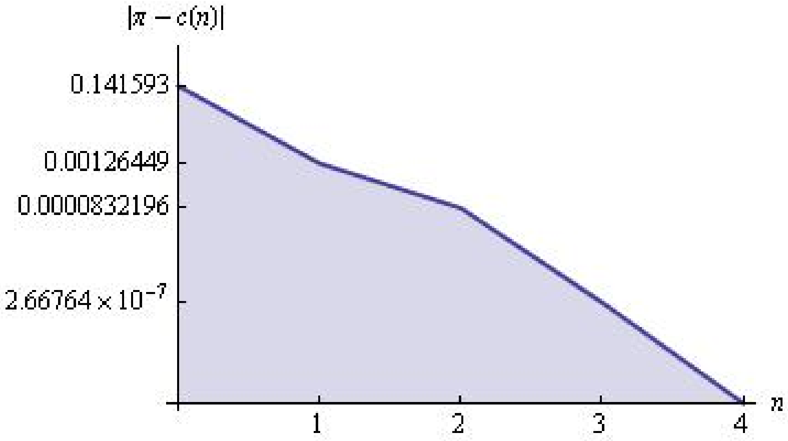
Primjer 2.3 *Ispišimo prvih pet konvergenti iracionalnog broja π. (Za pronalazak konvergenti možemo koristiti modul za pronalazak prvih n konvergenti koji smo napravili u Mathematici.)*
Tražene konvergente broja π su:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}\right\}$$

Ako usporedimo te konvergente s brojem π možemo vidjeti koliko dobru aproksimaciju nam daje pojedina konvergenta.

n	c_n	$\lvert\pi - c_n\rvert$
0	3	0.141593
1	22/7	0.00126449
2	333/106	0.0000832196
3	355/113	$2.66764 \cdot 10^{-7}$
4	103993/33102	$5.77891 \cdot 10^{-10}$

Tablica 2.1.



Slika 3.

Prema Korolaru 2.3, pogreška u aproksimaciji za konvergentu $\frac{333}{106}$ iznosi

$$\frac{1}{106 \cdot 113} \approx 0.0000834864.$$

Teorem 2.2 nam je pokazao da konvergenta $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ općenito daje bolju aproksimaciju od $\frac{p_n}{q_n}$. Ako pogledamo naš primjer vidimo da svaka sljedeća konvergenta daje bolju aproksimaciju od prethodne. Odnosno, za sve veći n, greška aproksimacije $|\pi - c_n|$ se sve više smanjuje, što se jasno može vidjeti i sa Slike 3. Ova tvrdnja vrijedi i općenito.

Teorem 2.4 *Neka je x iracionalan broj, te neka su p_n i q_n definirani kao inače. Tada za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|. \tag{2.8}$$

Nadalje,

$$|q_{n+1}x - p_{n+1}| < |q_n x - p_n|. \tag{2.9}$$

Dokaz. (vidi [4]) Najprije ćemo pokazati da prva nejednakost slijedi iz druge. Kako je, za $n \geq 1$, $q_{n+1} > q_n$, imamo

$$\frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{q_n}.$$

Ako lijevu stranu izraza (2.9) pomnožimo s $\frac{1}{q_{n+1}}$, a desnu s $\frac{1}{q_n}$, dobivamo (2.8). Pokažimo sada da vrijedi nejednakost (2.9). Za iracionalan broj

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, x_n]$$

označit ćemo konvergente s

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{\hat{p}_n}{\hat{q}_n},$$

gdje su

$$\begin{array}{ll}
p_0 = a_0 & q_0 = 1 \\
p_1 = a_1 p_0 + 1 & q_1 = a_1 \\
p_2 = a_2 p_1 + p_0 & q_2 = a_2 q_1 + q_0 \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\
\hat{p}_{n+1} = x_{n+1} p_n + p_{n-1} & \hat{q}_{n+1} = x_{n+1} q_n + q_{n-1}.
\end{array}$$

Iz *Korolara 2.1* slijedi

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\hat{q}_{n+1} q_n} = \frac{1}{(x_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n}.$$

Kako je $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, vrijedi

$$x_n < a_n + 1. \tag{2.10}$$

Iz (2.10) slijedi

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &> \frac{1}{((a_{n+1} + 1) q_n + q_{n-1}) q_n} \\
&= \frac{1}{(q_{n+1} + q_n) q_n} \\
&\geq \frac{1}{q_{n+2} q_n}.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da je

$$|q_n x - p_n| > \frac{1}{q_{n+2}}. \tag{2.11}$$

S druge strane, iz *Korolara 2.3* slijedi da je

$$\left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}.$$

Ako nejednakost pomnožimo s q_{n+1}, dobivamo

$$|q_{n+1} x - p_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}}.$$

Usporedimo dobivenu nejednakost s (2.11) i vidimo da kao rezultat slijedi (2.9). ■

Pogledajmo još jednom Primjer 2.3. Odredili smo prvih pet konvergenti broja π.

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}\right\}$$

Racionalan broj $\frac{22}{7}$ nam se pojavljuje kao druga konvergenta. Možemo si postaviti pitanje koliko $\frac{22}{7}$ "dobro" aproksimira broj π u odnosu na ostale s po volji malim nazivnikom? Pomoću sljedećeg modula u Mathematici ćemo naći racionalne aproksimacije broja π s nazivnikom manjim ili jednakim 106, (106 je nazivnik treće konvergente broja π).

```
In[1]:= Do[a = Round[b * Pi];
          If[Abs[Pi - a / b] < Abs[Pi - 22 / 7],
           Print[{a / b, N[Abs[Pi - a / b]], N[Abs[b * Pi - a]]}]
          ],
          {b, 1, 106}]
```

$$\left\{\frac{179}{57}, 0.00124178, 0.0707813\right\}$$

$$\left\{\frac{201}{64}, 0.000967654, 0.0619298\right\}$$

$$\left\{\frac{223}{71}, 0.000747583, 0.0530784\right\}$$

$$\left\{\frac{245}{78}, 0.000567013, 0.044227\right\}$$

$$\left\{\frac{267}{85}, 0.000416183, 0.0353756\right\}$$

$$\left\{\frac{289}{92}, 0.000288306, 0.0265241\right\}$$

$$\left\{\frac{311}{99}, 0.000178512, 0.0176727\right\}$$

$$\left\{\frac{333}{106}, 0.0000832196, 0.00882128\right\}$$

Rezultate možemo prikazati sljedećom tablicom:

a/b	$\lvert\pi - a/b\rvert$	$\lvert b\pi - a\rvert$
179/57	0.0012418	0.07078
201/64	0.0009677	0.06193
223/71	0.0007476	0.05308
245/78	0.0005670	0.04423
267/85	0.0004162	0.03538
289/92	0.0002883	0.02652
311/99	0.0001785	0.01767
333/106	0.0000832	0.00882

Tablica 2.2.

Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da je $\frac{333}{106}$ najbolja aproksimacija s nazivnikom manjim ili jednakim 106. Primijetimo da je

$$|7\pi - 22| \approx 0.00885,$$

što je manje od svih odgovarajućih vrijednosti u tablici, osim za konvergentu $\frac{333}{106}$. Ovaj rezultat vrijedi i općenito. Pokazat ćemo ga sljedećim teoremom i korolarom.

Teorem 2.5 *Neka je x iracionalan broj i neka su a i b cijeli brojevi takvi da vrijedi $0 < b < q_n$. Tada je*

$$|q_{n-1}x - p_{n-1}| \leq |bx - a|.$$

Dokaz. (vidi [4]) Pretpostavimo da je $\frac{a}{b} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Tada je, za $t \in \mathbb{Z}$, $a = tp_{n-1}$ i $b = tq_{n-1}$. Imamo

$$|q_{n-1}x - p_{n-1}| \leq |t||q_{n-1}x - p_{n-1}| = |bx - a|.$$

Pretpostavimo sada da je $\frac{a}{b} \neq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Promotrimo sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$p_{n-1}z + p_n y = a \tag{2.12}$$

$$q_{n-1}z + q_n y = b. \tag{2.13}$$

Pomnožimo (2.12) s q_n i (2.13) s p_n, te ih oduzmimo. Koristeći *Teorem 1.4* dobivamo

$$z = (-1)^{n+1}(bp_n - aq_n). \tag{2.14}$$

Slično dobivamo

$$y = (-1)^{n+1}(aq_{n-1} - bp_{n-1}). \tag{2.15}$$

Vidimo da su z i y cijeli brojevi. Pokažimo sada da su $z \neq 0$ i $y \neq 0$. Budući da smo pretpostavili da je $\frac{a}{b} \neq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ slijedi $y \neq 0$. Ako je $z = 0$ onda je $bp_n = aq_n$, a kako je $(p_n, q_n) = 1$ slijedi da $q_n | b$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $b < q_n$. Dakle $z \neq 0$ i $y \neq 0$. Pokažimo još da su z i y različitih predznaka. Kako su q_n, q_{n-1} i b

pozitivni, iz (2.13) slijedi da z i y ne mogu biti istodobno negativni. Ako bi i z i y bili pozitivni, vrijedilo bi

$$b = q_{n-1}z + q_n y > q_n,$$

što je u kontradikciji s $b < q_n$. Dakle, z i y su različitih predznaka. Pokažimo da su $(q_{n-1}x - p_{n-1})$ i $(q_n x - p_n)$ različitih predznaka. Iz *Teorema 2.2* znamo da vrijedi

$$\frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad \text{ili} \qquad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < x < \frac{p_n}{q_n},$$

pa tvrdnja slijedi. Sada znamo da su $z(q_{n-1}x - p_{n-1})$ i $y(q_n x - p_n)$ istog predznaka, pa slijedi

$$|z(q_{n-1}x - p_{n-1}) + y(q_n x - p_n)| = |z(q_{n-1}x - p_{n-1})| + |y(q_n x - p_n)|. \tag{2.16}$$

Koristeći (2.12) i (2.13), dobivamo

$$\begin{aligned} bx - a &= (q_{n-1}z + q_n y)x - (p_{n-1}z + p_n y) \\ &= z(q_{n-1}x - p_{n-1}) + y(q_n x - p_n). \end{aligned}$$

Prema (2.16) slijedi

$$|bx - a| = |z(q_{n-1}x - p_{n-1})| + |y(q_n x - p_n)|.$$

Kako je $z \neq 0$, slijedi

$$|bx - a| \geq |q_{n-1}x - p_{n-1}|.$$

Što je i trabalo dokazati. ■

Dakle, ne samo da $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ daje najmanju grešku među svim razlomcima s nazivnikom $\leq q_{n-1}$, već se ta greška ne može smanjiti ni s većim nazivnikom sve dok se ne dođe do sljedeće konvergente $\frac{p_n}{q_n}$.

Korolar 2.5 *Neka je x iracionalan broj i neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $0 < b < q_n$. Tada vrijedi*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Dokaz. (vidi [4]) Iz *Teorema 2.4* i *Teorema 2.5* slijedi

$$|q_n x - p_n| < |q_{n-1}x - p_{n-1}| \leq |bx - a|.$$

Prema pretpostavci vrijedi $0 < \frac{1}{q_n} < \frac{1}{b}$, pa je

$$\left|\frac{1}{q_n}\right| |q_n x - p_n| < \left|\frac{1}{b}\right| |bx - a|$$

te tvrdnja slijedi. ■

Ovim smo pokazali da konvergente predstavljaju dobre aproksimacije broja x. Vrijedi li obrat? Ako imamo dobru aproksimaciju iracionalnog broja x je li ona jednaka nekoj konvergenti od x?

Teorem 2.6 *Neka je x iracionalan broj, te neka su a i b cijeli brojevi, gdje je $b > 0$. Ako vrijedi*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

onda je $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$ za neku konvergentu $\frac{p_n}{q_n}$ zapisa broja x u beskonačni verižni razlomak.

Dokaz. (vidi [4]) Primijetimo da vrijedi

$$|bx - a| < \frac{1}{2b}. \tag{2.17}$$

Kako niz (q_n) raste, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$q_n \le b < q_{n+1}.$$

Prema *Teoremu 2.5* je

$$|q_n x - p_n| \le |bx - a|,$$

a iz (2.17) dobivamo

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2bq_n}. \tag{2.18}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow aq_n - bp_n \neq 0$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{bq_n} &\le \frac{|aq_n - bp_n|}{bq_n} \\
&= \left|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&= \left|\frac{a}{b} - x + x - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&\le \left|x - \frac{a}{b}\right| + \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|.
\end{aligned}$$

Iskoristimo pretpostavku teorema i (2.18). Tada je

$$\frac{1}{bq_n} < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bq_n}.$$

Pomnožimo li nejednakost s $b^2 q_n$ slijedi

$$b < \frac{q_n}{2} + \frac{b}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad b < q_n. \qquad \text{Što je kontradikcija s} \qquad b \ge q_n.$$

Dakle, $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$. ■

Prema gore dokazanom teoremu vidimo da ako postoji racionalan broj koji dovoljno dobro aproksimira iracionalan broj, tada on mora biti konvergenta zapisa iracionalnog broja u verižni razlomak. Međutim, ne vrijedi da sve konvergente zadovoljavaju danu nejednakost, ali beskonačno mnogo ih zadovoljava.

Teorem 2.7 *Neka je x iracionalan broj. Tada postoji beskonačan broj racionalnih brojeva $\frac{a}{b}$ koji zadovoljavaju sljedeću nejednakost*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}. \tag{2.19}$$

Dokaz. (vidi [4]) Pokazat ćemo da za svaki n, i $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ zadovoljavaju (2.19). Pretpostavimo suprotno, tj.

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}. \tag{2.20}$$

Kako je x iracionalan, jednakost nije moguća u (2.19), pa je s time zadovoljena stroga nejednakost u (2.20). Prema *Teoremu 2.2*, lijevu stranu možemo zapisati u obliku

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|,$$

što je prema *Korolaru 2.1* jednako

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n}.$$

Prema (2.20) slijedi

$$\frac{1}{q_{n+1}q_n} > \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Ako obje strane gornje nejednakosti pomnožimo s $2q_n^2 q_{n+1}^2$, dobivamo

$$2q_n q_{n+1} > q_{n+1}^2 + q_n^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q_{n+1} - q_n)^2 < 0. \qquad \text{Što je kontradikcija.}$$

Stoga vrijedi nejednakost (2.19). ∎

Možemo dobiti još bolju ocjenu!

Teorem 2.8 (Hurwitz) *Neka je x iracionalan broj. Tada postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{a}{b}$ takvih da je*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}. \tag{2.21}$$

Dokaz. (vidi [4]) Pokazat ćemo da za svaki n barem jedan od $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ili $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ zadovoljava (2.21). Pretpostavimo suprotno, tj. da $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ i $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ ne zadovoljavaju (2.21). Iz dokaza *Teorema 2.7* imamo

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Kako smo pretpostavili da (2.21) ne vrijedi, za $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ slijedi

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} + \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}.$$

Stroga nejednakost je zadovoljena jer je x iracionalan broj. Pomnožimo li gornju nejednakost s $\sqrt{5}q_n q_{n+1}$, dobivamo

$$\sqrt{5} > \frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n+1}}.$$

Uzmimo da je $b_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}$, tada nejednakost izgleda ovako

$$\sqrt{5} > b_n + \frac{1}{b_n},$$

odnosno

$$b_n^2 - \sqrt{5}b_n + 1 < 0.$$

Nadopunimo li do potpunog kvadrata, dobivamo

$$\left(b_n - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 < \frac{1}{4},$$

pa je sada

$$b_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.22}$$

Kako smo pretpostavili da $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ ne zadovoljava (2.21), također vrijedi

$$b_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{2.23}$$

gdje je $b_{n+1} = \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}$. Sada je $q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n$ pa slijedi

$$b_{n+1} \geq 1 + \frac{1}{b_n}. \tag{2.24}$$

Kako je $b_n > 0$, iz (2.22) slijedi

$$\frac{1}{b_n} > \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Usporedimo li posljednju nejednakost s (2.23) i (2.24), možemo zaključiti da je

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad \text{Što je kontradikcija.}$$

Iz ovoga slijedi da je zadovoljena nejednakost (2.21). ■

Tvrdnja (2.21) ne vrijedi ako se $\sqrt{5}$ zamijeni s bilo kojom konstantom $c > \sqrt{5}$.

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{cb^2}$$

Odnosno, $c = \sqrt{5}$ je najbolja moguća konstanta za gornju ogradu.

Primjer 2.4 *Nađimo najbolju racionalnu aproksimaciju $\frac{a}{b}$ broja $\sqrt{2}$ za $b < 20$.*

Među svim razlomcima kojima je nazivnik manji od 20, trebamo odrediti onaj koji najbolje aproksimira $\sqrt{2}$.

```
Do[a = Round[b * Sqrt[2]];
 If[Abs[Sqrt[2] - a / b] < Abs[Sqrt[2] - 3 / 2],
  Print[{a / b, N[Abs[Sqrt[2] - a / b]], N[Abs[b * Sqrt[2] - a]]}]
 ],
 {b, 1, 20}]
```

$\left\{\frac{4}{3}, 0.0808802, 0.242641\right\}$

$\left\{\frac{7}{5}, 0.0142136, 0.0710678\right\}$

$\left\{\frac{10}{7}, 0.0143579, 0.100505\right\}$

$\left\{\frac{11}{8}, 0.0392136, 0.313708\right\}$

$\left\{\frac{13}{9}, 0.0302309, 0.272078\right\}$

$\left\{\frac{16}{11}, 0.0403319, 0.443651\right\}$

$\left\{\frac{17}{12}, 0.0024531, 0.0294373\right\}$

$\left\{\frac{18}{13}, 0.0295982, 0.384776\right\}$

$\left\{\frac{23}{16}, 0.0232864, 0.372583\right\}$

$\left\{\frac{24}{17}, 0.00244886, 0.0416306\right\}$

$\left\{\frac{25}{18}, 0.0253247, 0.455844\right\}$

$\left\{\frac{27}{19}, 0.00683907, 0.129942\right\}$

Prvih nekoliko konvergenti broja $\sqrt{2}$ su:

$$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}\right\}$$

Vidimo da je najbolja aproksimacija $\frac{17}{12}$, što je upravo naša četvrta konvergenta.

2.4 Beskonačni periodični verižni razlomci i kvadratne iracionalnosti

U Primjeru 2.1 smo pokazali da je razvoj broja $\sqrt{2}$ u beskonačni verižni razlomak

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...] = [1; \bar{2}],$$

gdje oznaka $\bar{2}$ znači da se broj 2 uzastopno ponavlja, pa takav verižni razlomak nazivamo **beskonačni periodičan verižni razlomak**.

Definicija 2.2 *Za beskonačni verižni razlomak $x = [a_0; a_1, ...]$ kažemo da je periodičan ako postoje $s \in \mathbb{N}$ i $N \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a_k = a_{k+s}$ za $\forall k \geq N$. Najmanji takav s zovemo **duljina perioda** verižnog razlomka. Možemo pisati*

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{N-1}, \overline{a_N, ..., a_{N+s-1}}],$$

*gdje $\overline{a_N, ..., a_{N+s-1}}$ znači da se blok brojeva $a_N, ..., a_{N+s-1}$ ponavlja. Ako je $N = 0$, tj. ako nema dijela koji se ne ponavlja, kažemo da je verižni razlomak **čisto periodičan**, te možemo pisati*

$$x = [\overline{a_0; a_1, ..., a_{s-1}}].$$

Primjer 2.5 *Izvedimo formulu za $\sqrt{3}$.*

Možemo pisati:

$$\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1) = 1+\frac{2}{\sqrt{3}+1} = 1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = ...$$

Dalje se situacija periodički ponavlja, zato je $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] = [1; \overline{1, 2}]$. Period se sastoji od dvije znamenke: 1 i 2.

Naime, može se pokazati da se svaki broj oblika $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ može raspisati u beskonačni periodičan verižni razlomak. Što je kasnije u radu i dokazano.

Veliki francuski matematičar J. L. Lagrange (1736.-1813.) je dokazao tvrdnju da se svaki drugi broj oblika $r\sqrt{d} + q$, gdje su $d, q, r \in \mathbb{N}$ (i d nije potpun kvadrat) može prikazati u obliku beskonačnog periodičnog verižnog razlomka.

Primjer 2.6 *Neka je $x = [1; 8, 1, 8, ...] = [\overline{1; 8}]$. Tada je $x = 1 + \frac{1}{8+\frac{1}{x}}$. Odnosno, kada ovaj izraz svedemo na običan razlomak dobivamo*

$$x = \frac{9x+1}{8x+1},$$

a to nas dovodi do kvadratne jednadžbe

$$8x^2 - 8x - 1 = 0,$$

čija su rješenja $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{6}}{4}$. No, kako je $x > 0$, slijedi $x = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$.

Definicija 2.3 *Za iracionalan broj x kažemo da je* ***kvadratna iracionalnost*** *ako je korijen ireducibilnog polinoma drugog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima.*

Koristeći formulu za rješenje kvadratne jednadžbe, možemo zaključiti da je realan broj x kvadratna iracionalnost ako i samo ako x možemo zapisati u obliku

$$x = q + r\sqrt{d}$$

gdje su q i r racionalni brojevi, $r \neq 0$, a d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. U daljnjem tekstu ćemo pokazati da je broj kvadratna iracionalnost ako i samo ako je njegov zapis u verižni razlomak periodičan. Rezultat sljedeća lema ćemo iskoristit za taj dokaz.

Lema 2.1 *Neka je β kvadratna iracionalnost i neka je*

$$x = \frac{a\beta + b}{c\beta + f} \tag{2.25}$$

gdje su a, b, c i f cijeli brojevi te c i f nisu istodobno jednaki nuli. Tada je x kvadratna iracionalnost ako i samo ako je $af - bc \neq 0$.

Dokaz. (vidi [4]) Racionalizacijom desne strane jednakosti (2.25) bismo vidjeli da je x ili kvadratna iracionalnost ili racionalan broj. Trebamo pokazati da je x kvadratna iracionalnost ako i samo ako je $af - bc \neq 0$. Ako je $c \neq 0$, tada je

$$x = \frac{a\beta + b}{c\beta + f} = \frac{a}{c} + \frac{bc - af}{c(c\beta + f)}.$$

Izraz s desne strane je racionalan ako i samo ako je $bc - af = 0$. Ako je $c = 0$ i $f \neq 0$. Tada imamo

$$x = \frac{a\beta}{f} + \frac{b}{f}.$$

Zaključujemo da je x racionalan ako i samo ako je $\frac{a}{f} = 0 \Longrightarrow a = 0$ jer je $f \neq 0$. Kako smo pretpostavili da je $c = 0$, možemo zaključiti da je x racionalan $\Longleftrightarrow bc - af = 0$. Što je i trebalo dokazati. ■

Teorem 2.9 *Ako je x periodičan verižni razlomak, tada je x kvadratna iracionalnost.*

Dokaz. (vidi [4]) Dokažimo prvo specijalan slučaj kada je x čisto periodičan. Tada je $x = [\overline{a_0; a_1, ..., a_{s-1}}]$, pa je

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{s-1}, x]. \tag{2.26}$$

Neka su $\frac{p_0}{q_0}, ..., \frac{p_{s-1}}{q_{s-1}}, \frac{\hat{p_s}}{\hat{q_s}}$ konvergente verižnog razlomka x danog s (2.26). Prema *Teoremu 1.3* imamo

$$x = \frac{\hat{p_s}}{\hat{q_s}} = \frac{xp_{s-1} + p_{s-2}}{xq_{s-1} + q_{s-2}},$$

(Primijetimo da izraz ima smisla za $s = 1$. Tada je $p_{-1} = 1$ i $q_{-1} = 0$.) Nakon sređivanja dobivamo

$$q_{s-1}x^2 + (q_{s-2} - p_{s-1})x - p_{s-2} = 0.$$

Vidimo da je x korijen polinoma drugog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima. Kako x ima zapis u beskonačni verižni razlomak, zaključujemo da x mora biti iracionalan broj, tj. mora biti kvadratna iracionalnost.
Pretpostavimo sada da je $x = [a_0; a_1, ..., \overline{a_N, ..., a_{N+s-1}}]$ periodičan verižni razlomak i $N > 0$. Neka je $\beta = [\overline{a_N; a_{N+1}, ..., a_{N+s-1}}]$. Možemo pisati

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{N-1}, \beta]. \tag{2.27}$$

Neka su $\frac{p_0}{q_0}, ..., \frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}, \frac{\hat{p_N}}{\hat{q_N}}$ konvergente verižnog razlomka x danog s (2.27). Prema *Teoremu 1.3* imamo

$$x = \frac{\hat{p_N}}{\hat{q_N}} = \frac{\beta p_{N-1} + p_{N-2}}{\beta q_{N-1} + q_{N-2}}.$$

Kako je β čisto periodičan, znamo da je kvadratna iracionalnost. Tvrdnja da je x kvadratna iracionalnost slijedi iz *Leme 2.1.* ■

Primjer 2.7 *Neka je $x = [\overline{3; 1, 2}]$. Nađimo kvadratnu iracionalnost koju predstavlja x.*

Možemo pisati

$$x = [3; 1, 2, x].$$

Nađimo prve tri konvergente $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}$ i $\frac{p_2}{q_2}$ od x:

n	***-2***	***-1***	***0***	***1***	***2***
a_n			*3*	*1*	*2*
p_n	*0*	*1*	*3*	*4*	*11*
q_n	*1*	*0*	*1*	*1*	*3*

Tablica 2.3.

Tada je

$$x = \frac{p_2 x + p_1}{q_2 x + q_1} = \frac{11x + 4}{3x + 1}$$

iz čega dobviamo sljedeću jednadžbu:

$$3x^2 - 10x - 4 = 0.$$

Njezina rješenja su

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{3},$$

no kako je $x > 0$ imamo

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{3}.$$

Krenimo sada obratnim smjerom nego u *Teoremu 2.9.* Neka je x kvadratna iracionalnost. Tada x možemo zapisati u obliku

$$x = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}, \tag{2.28}$$

gdje su P, Q i d cijeli brojevi, d nije potpuni kvadrat, te Q dijeli $d - P^2$. Nađimo zapis broja x u verižni razlomak pomoću sljedećeg teorema.

Teorem 2.10 *Neka je x iracionalan broj. Tada se x može prikazati sljedećim konačnim verižnim razlomkom*

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, x_n],$$

gdje je a_0 cijeli, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ prirodni brojevi i x_n iracionalan broj veći od 1. Prikaz broja x može se dobiti tako da stavimo

$$a_0 = \lfloor x \rfloor,$$

$$x_1 = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor},$$

te

$$a_{k-1} = \lfloor x_{k-1} \rfloor,$$
$$x_k = \frac{1}{x_{k-1} - \lfloor x_{k-1} \rfloor}$$

za sve $1 < k \leq n$.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [4].

Prema gornjem teoremu možemo pisati

$$a_0 = \lfloor x \rfloor,$$

$$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x - a_0} \right\rfloor.$$

Budući da x_1 ima zapis u periodičan verižni razlomak, znamo da mora biti kvadratna iracionalnost, pa možemo pisati

$$x_1 = \frac{P_1 + \sqrt{d}}{Q_1}. \tag{2.29}$$

Imamo

$$x_1 = \frac{1}{\frac{P+\sqrt{d}}{Q} - a_0} = \frac{Q}{(P - a_0 Q) + \sqrt{d}}.$$

Ako razlomak pomnožimo s $\sqrt{d} - (P - a_0 Q)$ dobivamo

$$\frac{Q(a_0 Q - P + \sqrt{d})}{d - (P - a_0 Q)^2},$$

što možemo zapisati i na sljedeći način

$$\frac{(a_0 Q - P) + \sqrt{d}}{\frac{d - (a_0 Q - P)^2}{Q}}.$$

Ako uzmemo da je

$$P_1 = a_0 Q - P,$$

$$Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q},$$

tada je izraz (2.29) zadovoljen. Možemo primijetiti da je P_1 cijeli broj (jer $P, Q, a_0 \in \mathbb{Z}$). Budući da Q dijeli $d - P^2$ i

$$Q_1 = \frac{d - P^2}{Q} + 2a_0 P - a_0^2 Q,$$

Q_1 je također cijeli broj. Kada bismo nastavili istim postupkom, dobili bismo rekurzivnu formulu za parcijalne kvocijente od x.

Lema 2.2 *Neka je x kvadratna iracionalnost zapisana u obliku*

$$x = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0},$$

gdje su P_0, Q_0 i d cijeli brojevi, $d \neq 0$ nije potpun kvadrat i Q_0 dijeli $d - P_0^2$. Za $n \geq 0$ definiramo

$$x_n = \frac{P_n + \sqrt{d}}{Q_n} \tag{2.30}$$

$$a_n = \lfloor x_n \rfloor \tag{2.31}$$

$$P_{n+1} = a_n Q_n - P_n \tag{2.32}$$

$$Q_{n+1} = \frac{d - P_{n+1}^2}{Q_n}. \tag{2.33}$$

Tada su P_n i Q_n cijeli brojevi i $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$.

Dokaz. (vidi [4]) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Slučaj $n = 0$ je pretpostavka leme, a za $n = 1$ smo tvrdnju pokazali prije iskaza leme. Neka su $P_0, Q_0, P_1, Q_1, ..., P_n, Q_n$ cijeli brojevi. Iz (2.32) slijedi da je P_{n+1} cijeli broj. Možemo pisati

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{d - (a_n Q_n - P_n)^2}{Q_n} \\ &= \frac{d - P_n^2}{Q_n} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n \\ &= \frac{Q_n Q_{n-1}}{Q_n} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n \\ &= Q_{n-1} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n. \end{aligned}$$

Prema pretpostavci indukcije možemo zaključiti da je Q_{n+1} također cijeli broj. Preostaje nam pokazati da je $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Kako je

$$x_{n+1} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{d}}{Q_{n+1}} = \frac{1}{x_n - a_n} = \frac{1}{\frac{P_n + \sqrt{d}}{Q_n} - a_n}$$

tvrdnja slijedi iz *Teorema 2.10.* ■

Definicija 2.4 *Neka je $x = q + r\sqrt{d}$, gdje su r i q racionalni, a d prirodan broj koji nije potpuni kvadrat.* ***Konjugat*** *od x je*

$$x' = q - r\sqrt{d}.$$

Pod pretpostavkom da je $r \neq 0$, x je korijen ireducibilnog polinoma drugog stupnja $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima. Tada formula za rješenje kvadratne jednadžbe pokazuje da je konjugat od x drugi korijen od $f(x)$.

Lema 2.3 *Neka su $x_1 = q_1 + r_1\sqrt{d}$ i $x_2 = q_2 + r_2\sqrt{d}$ kvadratne iracionalnosti. Tada je*

1. $(x_1 + x_2)' = x_1' + x_2'$
2. $(x_1 - x_2)' = x_1' - x_2'$
3. $(x_1 x_2)' = x_1' x_2'$
4. $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)' = \frac{x_1'}{x_2'}$.

Ove tvrdnje mogu se jednostavno dokazati raspisivanjem.

Teorem 2.11 *Ako je x kvadratna iracionalnost, tada je x periodičan verižni razlomak.*

Dokaz je malo kompliciraniji i zahtijeva poznavanje još nekih jednostavnih rezultata koji se, kao i potpun dokaz, mogu pronaći u [4].

Koristeći *Lemu 2.2* možemo dobiti razvoj kvadratne iracionalnosti $\frac{\alpha+\sqrt{d}}{\beta}$ u periodičan verižni razlomak.

Primjer 2.8 *Pomoću Mathematice pronađimo zapise brojeva $\frac{10+\sqrt{11}}{7}$ i $\frac{5+\sqrt{37}}{3}$.*

```
VerRazlomak[alpha_, beta_, d_] :=
 Module[
  {n, x, a, P, Q, ourlist},
  n = 0;
  P[n] = alpha;
  Q[n] = beta;
  While[! MemberQ[ourlist =
      Table[{P[k], Q[k]}, {k, 0, n - 1}], {P[n], Q[n]}],
   x[n] = (P[n] + Sqrt[d]) / Q[n];
   a[n] = Floor[x[n]];
   P[n + 1] = a[n] Q[n] - P[n];
   Q[n + 1] = (d - (P[n + 1]) ^ 2) / Q[n];
   n++];
  s = n - Flatten[Position[ourlist, {P[n], Q[n]}]][[1]] + 1;
  Append[Table[a[k], {k, 0, n - s - 1}],
   Table[a[k], {k, n - s, n - 1}]]
 ]
VerRazlomak[10, 7, 11]

{1, 1, {9, 4, 9, 23}}
```

Dobili smo periodičan verižni razlomak $[1; 1, \overline{9, 4, 9, 23}]$, *gdje se brojevi 9, 4, 9 i 23 uzastopno ponavljaju. Duljina perioda je odvojena dodatnom zagradom.*

```
VerRazlomak[5, 3, 37]
```

```
{{3, 1, 2}}
```

Vidimo da je $\frac{5+\sqrt{37}}{3} = [\overline{3; 1, 2}]$ *čisto periodičan verižni razlomak.*

Definicija 2.5 *Za kvadratnu iracionalnost x kažemo da je* ***reducirana*** *ako vrijedi da je $x > 1$ i $-1 < x' < 0$.*

Vrijedi i tvrdnja da kvadratna iracionalnost x ima zapis u čisto periodičan verižni razlomak ako je reducirana. Dokaz se može vidjeti u [4] i [7].

Teorem 2.12 *Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat. Tada razvoj broja $\sqrt{d}$ u verižni razlomak ima oblik*

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_2, a_1, 2a_0}].$$

Dokaz. (vidi [7]) Uočimo prvo da je $\sqrt{d} > 1$, tada njegov konjugat $-\sqrt{d}$ ne leži između -1 i 0, pa tako $\sqrt{d}$ nije reducirana kvadratna iracionalnost i njegov prikaz u verižni razlomak

$$\sqrt{d} = [a_0; a_1, ...] \tag{2.34}$$

nije čisto periodičan. Kako je a_0 najveći cijeli broj manji od $\sqrt{d}$, broj $x = \sqrt{d} + a_0 > 1$, a njegov konjugat $x' = -\sqrt{d} + a_0$ leži između -1 i 0, pa je $\sqrt{d} + a_0$ reducirana kvadratna iracionalnost. Dodamo li i jednoj i drugoj strani jednakosti (2.34) a_0 dobivamo

$$\sqrt{d} + a_0 = [2a_0; a_1, ...] = x.$$

Prema tvrdnji da kvadratna iracionalnost ima zapis u čisto periodičan verižni razlomak ako je reducirana, $x = \sqrt{d} + a_0$ možemo razviti u čisto periodičan verižni razlomak, pa on ima oblik

$$x = [2a_0; a_1, ..., a_n, 2a_0, a_1, ...] = [\overline{2a_0; a_1, ..., a_n}].$$

Sada je

$$\sqrt{d} = x - a_0 = [a_0; \overline{a_1, ..., 2a_0}]. \tag{2.35}$$

Još nam preostaje dokazati simetričnost u razvoju broja $\sqrt{d}$. Promotrimo $x' = -\sqrt{d} + a_0$. Razvoj broja $-\frac{1}{x'}$ u verižni razlomak je jednak razvoju broja x ali s obrnutim periodom. Kada obrnemo period od x dobivamo da je

$$-\frac{1}{x'} = \frac{1}{\sqrt{d} - a_0} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_1, 2a_0, a_n, ...] = [\overline{a_n; a_{n-1}, ..., a_1, 2a_0}]. \tag{2.36}$$

Ako od izraza (2.35) oduzmemo a_0 imamo

$$\sqrt{d} - a_0 = [0; \overline{a_1, a_2, ..., 2a_0}],$$

pa je

$$\frac{1}{\sqrt{d}-a_0} = [\overline{a_1; a_2, ..., 2a_0}]. \tag{2.37}$$

Kako je razvoj u verižni razlomak jedinstven, usporedimo li (2.36) i (2.37) vidimo da je

$$a_n = a_1, a_{n-1} = a_2, ..., a_2 = a_{n-1}, a_1 = a_n.$$

Odavde slijedi da broj $\sqrt{d}$ ima oblik

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_2, a_1, 2a_0}].$$

Što je i trebalo dokazati. ■

Primjer 2.9 *Tako je npr. razvoj brojeva $\sqrt{13}$, $\sqrt{22}$ i $\sqrt{45}$ sljedeći:*

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}],$$

$$\sqrt{22} = [4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}],$$

$$\sqrt{45} = [6; \overline{1, 2, 2, 2, 1, 12}].$$

U [3, str 25.] i [7, str 116.] mogu se pronaći tablice s prikazima drugih korijena prvih nekoliko prirodnih brojeva.

3 Verižni razlomci - neke zanimljivosti

3.1 Verižni razlomci i Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... definiran je formulom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

Kvocijent dvaju uzastopnih članova ovog niza preko verižnog razlomka izgleda ovako

$$\tfrac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, 1].$$

Općenito će biti $\frac{F_{n+1}}{F_n}$=1+ $\frac{F_{n-1}}{F_n}$=1+ $\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$= 1+ $\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}}$ i situacija se dalje ponavlja.

Stoga je $\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Big[1; \underbrace{1, 1, ..., 1}_{n}\Big]$.

3.2 Verižni razlomci i zlatni rez

Dužina duljine a podijeljena je u zlatnom rezu na dijelove duge x i $a - x$ ako vrijedi

$$a : x = x : (a - x).$$

Za omjer $\beta = a : x$ popularan problem zlatnog reza dužine dovodi nas do jednadžbe

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0,$$

pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\beta^2 = \beta + 1, \qquad \text{odnosno} \qquad \beta = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Ako s desne strane uvrstimo izraz za β, imamo $\beta = 1 + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\beta}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}} = ...$, pa je prikaz zlatnog reza preko verižnog razlomka $\beta = [1; 1, 1, 1, 1, 1, ...]$. Konvergente su mu $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, ... iz čega vidimo da su i brojnici i nazivnici redom Fibonaccijevi brojevi 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \beta$.

3.3 Neobične formule

Vidjeli smo kako se svaki racionalan broj može prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka, kako su beskonačni periodični verižni razlomci pridruženi drugim korijenima iz prirodnih brojeva koji nisu potpuni kvadrati. Slično bismo zaključili i za ostale realne brojeva. Pogledajmo primjerice Ludolphov broj π i Eulerov broj e. Vrlo je zanimljiv zapis broja e

$$e = [2; 1, \mathbf{2}, 1, 1, \mathbf{4}, 1, 1, \mathbf{6}, 1, 1, \mathbf{8}, 1, ...]$$

koji se nastavlja po pravilu koje ste vjerojatno uočili.

Verižnim se razlomcima na teorijskoj razini bavio i L. Euler, pa je tako možda i prvi dokazao da se svaki racionalan broj može prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka. Autor je sljedećih neobičnih jednakosti:

$$e-1=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\dots}}}} \qquad \frac{1}{e+2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{6+\dots}}}}}.$$

Ovi razlomci nisu standardni verižni razlomci, jer im brojnik nije jednak jedinici. Vrijedi i

$$\sqrt{e}=[1;\mathbf{1},1,1,\mathbf{5},1,1,\mathbf{9},1,1,\mathbf{13},1,1,\mathbf{17},1,1,...],$$

te jednakost

$$e-1=[1;1,1,\mathbf{2},1,1,\mathbf{4},1,1,\mathbf{6},...].$$

Primjenjujući ovaj rezultat, on je dokazao iracionalnost broja e. Godine 1770. Lambert je pokazao da se broj π može prikazati kao

$$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,$$
$$4,2,6,6,99,1,2,2,3,5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,1,8,$$
$$1,1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,45,1,22,1,2,2,1,4,1,2,...].$$

Čini se da tu ne postoji nikakva pravilnost razvoja. 1761. je pokazao da se $tg\,x$ može razviti u sljedeći verižni razlomak

$$tg\,x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{\ddots}}}}. \tag{3.1}$$

Također je dokazao, ako je x racionalan da je onda desna strana od (3.1) iracionalan broj. Kako je $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ možemo zaključiti da je $\frac{\pi}{4}$ iracionalan broj. To je zapravo bio i prvi dokaz iracionalnosti broja π. Možda najčudnije formule s verižnim razlomcima primio je godine 1913. engleski matematičar Godfrey H. Hardy (1877.-1947.) u pismu od njemu nepoznate osobe, Indijca S. Ramanujana (1887.-1920.). Ramanujan, inače samouk u matematici, ubraja se među najveće matematičke genije. Njegovo pismo Hardyju, zapravo primjerak knjige o beskonačnim redovima koje je napisao nekoliko godina ranije, sadržavalo je mnoštvo različitih čudnovatih formula, pa tako i ove dvije:

$$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cdot e^{\frac{2\pi}{5}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\dots}}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\left[5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1\right]}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cdot e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\dots}}}.$$

Za njih, kao i za mnoge druge s tog popisa, dokaz nije bio poznat, niti načina na koji ih je Ramanujan pronašao.

Ako pak netko misli da je vrijeme pregazilo ove neobične razlomke, pa oni pripadaju matematičkoj povijesti onda se grdno vara. U 20. st. verižni razlomci šire se na razna područja matematike i njezine primjene. Njihova upotreba u rješavanju diofantskih jednadžbi (još je indijski matematičar Aryabhata (475.-550.) upotrebljavao verižne razlomke pri rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi), a pogotovo u računu s različitim transcendentalnim funkcijama i numeričkoj aproksimaciji, pokazuje da ti razlomci ipak neće biti zaboravljeni.

Literatura

[1] D. C. COLLINS, *Continued Fractions*, The MIT Undergraduate Journal of Mathematics, Vol 1. (1999), 21-27
http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ma/files/COLLIN.pdf

[2] A. DUJELLA, *Uvod u teoriju brojeva*, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2006.
http://web.math.hr/∼duje/utb/utblink.pdf

[3] N. ELEZOVIĆ, *Egipatski i verižni razlomci-zaboravljeni dio matematike*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike - mentore, 12. državni susret, HMD, Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa, 2003, 10-28.

[4] M. ERICKSON, A. VAZZANA, *Introduction to Number Theory*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2008.

[5] S. KUREPA, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[6] C. G. MOOR, *An Introduction to Continued Fractions*, National Council of Teachers of Mathematics, Inc.,Washington, 1964.

[7] C. D. OLDS, *Continued Fractions*, The Mathematical Association of America, Washington, 1963.

[8] V. PETRIČEVIĆ, *Periodski verižni razlomci*, Magistarski rad, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.
http://web.math.hr/∼vpetrice/radovi/Magistarski.pdf

[9] H. S. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions*, D.Van Nostrand Company, Inc., New York, 1948.

Sažetak

Naziv "verižni razlomak" uveo je engleski matematičar i teolog John Wallis (1616.-1703.). Iako se ovi razlomci više ne spominju u srednjoškolskim udžbenicima, njihova primjena je i dalje neobično široka i zanimljiva. Moderna teorija verižnih razlomaka počela je s talijanskim matematičarom Rafaelom Bombelliem, koji je pokazao 1572. godine prikaz broja $\sqrt{13}$ u verižni razlomak. Opći zapis konačnog verižnog razlomka je sljedeći

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}. \tag{3.2}$$

Zapis (3.2) je dosta nezgrapan pa se zbog toga uveo jednostavniji kraći zapis

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n].$$

Sređivanjem konačnog verižnog razlomka dobiva se običan razlomak, tj. racionalan broj. Obratno, svaki racionalan broj $x = \frac{a}{b}$ može se zapisati u obliku konačnog verižnog razlomka. Brojevi a_i, $i = 0, \ldots, n$ zovu se parcijalni kvocijenti od x. To su upravo kvocijenti koji se dobiju primjenom Euklidovog algoritma na brojeve a i b. Racionalan broj

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$$

za $k \leq n$ zovemo k-ta konvergenta od x. Svaki iracionalan broj x se može zapisati u obliku beskonačnog verižnog razlomka

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

To znači da je $x = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Brojnici i nazivnici konvergenti mogu se izračunati pomoću rekurzivnih relacija

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad & p_0 &= a_0, \qquad & p_1 &= a_1 a_0 + 1 \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad & q_0 &= 1, \qquad & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

koje smo dokazali u radu. Pokazali smo da konvergente predstavljaju dobre aproksimacije iracionalnog broja x, kao i korištenje svojstava konvergenti prilikom rješavanja linearnih diofantskih jednadžbi. Navodimo i bijekciju između beskonačnih periodičnih verižnih razlomaka te kvadratnih iracionalnosti, te na kraju neke zanimljivosti o verižnim razlomcima.

Title and summary

Continued Fractions

The name "continued fractions" was introduced by English mathematician and theologian John Wallis (1616.-1703.). Although these fractions are no longer subject in school books, their use is still unusually large. Modern theory of continued fractions began with Italian mathematician Rafael Bombelli, who 1572. discovered representation of number π in form of continued fraction. General representation of finite continued fraction is following

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}. \tag{3.3}$$

Formula (3.3) is quite complicated, so shorter formula was introduced

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n].$$

Rearranging of finite continued fraction gives a common fraction, ie a rational number. Other way around, every rational number $x = \frac{a}{b}$ can be represented in form of finite continued fraction. Numbers a_i, $i = 0, \ldots, n$ are called partial quotients of x. Those are quotients which are obtained when Euklid's algorithm is applied on numbers a and b. Rational number

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$$

for $k \leq n$ is called k-th convergent of x. Every irrational number x can be written in form of infinite continued fraction

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

That means $x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Numerators and denominators of convergents can be calculated using recursive relations

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1 \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

that are proven in this paper. We showed that convergents present good approximation of irrational number x, as well as use of properties of convergents in solving linear Diophantine equations. We give also the bijection between infinite continued fractions and quadratic irrationality. In the end, some interesting facts about continued fractions are given.

Životopis

Rođena sam 9. siječnja 1988. godine u Našicama. Osnovnu školu Dore Pejačević u Našicama završila sam 2002. godine, potom upisujem Opću gimnaziju u srednjoj školi Isidora Kršnjavoga također u Našicama. Po završetku srednje škole, 2006. godine upisujem se na Preddiplomski studij matematike na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Odlukom od 4. ožujka 2009. odobrena mi je promjena smjera sa Preddiplomskog na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku.