Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Umiljanović

Arhimedov matematički doprinos

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Umiljanović

Arhimedov matematički doprinos

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. I. Matić

Osijek, 2015.

Sadržaj

Uvod

Pogledamo li povijest razvoja matematičkih ideja i koncepata te potražimo li i istaknemo matematičare koji su najviše doprinijeli tom razvoju, nećemo se iznenaditi kada na toj listi pronađemo Arhimeda, najvećeg kreativnog genija antičkog svijeta, čovjeka koji je tako spretno i s lakoćom povezivao matematiku, fiziku i astronomiju, teoriju i praksu te koji je podigao grčku, ali i svjetsku matematiku na potpuno novu razinu. Kako njegova prava veličina više ne bi bila skrivena u sjeni jednom možda izrečenog „Heureka“, u ovom radu Arhimed je prikazan u svjetlu svojih najvećih dostignuća koja, ako se pomno prouče, mogu samog čitatelja potaknuti na veću inovativnost kako u matematičkim dokazima tako i u primjeni matematike. Iz tog razloga iz njegovog cjelokupnog opusa bit će predstavljeni najvažniji rezultati zajedno s njihovim strogim ili opisnim dokazom. Sam rad je prema glavnim rezultatima iz njegovih (dosad) pronađenih djela podijeljen u nekoliko poglavlja prema različitosti tema kojima se bavio. Napomenimo samo da iako je Arhimed i u fizici i astronomiji postigao mnoge rezultate, oni, osim onih ključnih za dokaze matematičkih tvrdnji, neće biti opisani u ovom radu.

U prvom poglavlju opisane su poznate činjenice iz njegova života te s njim usko povezane neke legende. Također, opisani su i njegovi glavni radovi, nešto više pisano je o onima koji se u radu neće detaljnije obraditi.

Arhimedov način dokazivanja tvrdnji iz područja ravninske i prostorne geometrije, poseban je po tome što za svaku tvrdnju osim geometrijskog dokaza provodi i mehanički dokaz, točnije, do same tvrdnje dolazi pomoću mehaničkog dokaza, koji potom potkrepljuje strogim geometrijskim dokazom, metodom ekshaustije te dvostrukim reductio ad absurdum. Rezultati opisani u drugom i trećem poglavlju (površina kruga, aproksimacija broja π, površina odsječka parabole) čitatelja će upoznati s geometrijskim dokazom, a oni opisani u četvrtom i petom poglavlju (volumen kugle, težište trokuta) s mehaničkim dokazom tj. dokazom pomoću težišta likova i zakona poluge. Čitajući navedena poglavlja dobro bi bilo promotriti kako je Arhimed bio samo korak do otkrića diferencijalnog računa te uvidjeti kako njegovi dokazi jako nalikuju na današnje dokaze.

Posljednja dva poglavlja opisuju dva zanimljiva problema. Prvi, neobičnog naziva, je iz područja teorije brojeva i prikazuje kako jednostavno postavljen problem, poslan kao pismo poznatom matematičaru i astronomu Eratostenu, može prijeći u problem ogromnih razmjera, rješiv djelomično s matematikom razvijenom u 19.

stoljeću, a potpuno tek s razvojem računalne tehnologije. Drugi problem vezan je uz Arhimedov sustav označavanja (velikih) brojeva te opisuje cjelokupan postupak rješavanja matematičko - astronomskog problema, računanja broja zrnaca pijeska u svemiru, kojim Arhimed pokazuje snagu svog sustava. Postupak rješavanja tog problema sadrži sve korake jednog istraživačkog projekta kojeg bi lako mogli pratiti i provesti učenici završnih razreda srednje škole.

Kako se grčka matematika u nekim osnovnim crtama razlikuje od današnje, moguće je da će način označavanja elemenata, postavljanje jednadžbi, izražavanje veličina ili tijek dokazivanja čitatelju biti nejasni ili zbunjujući, ali za taj dio bilo bi potrebno napisati još jedan dodatan rad ili proučiti povijest razvoja matematičkih oznaka i algebre npr. u knjigama *Povijest matematike 1* i *2* autorice F. M. Brückler.

1 O Arhimedu

1.1 Arhimedov život

Grčki matematičar, fizičar i astronom Arhimed djelovao je u 3. stoljeću prije Krista u isto vrijeme kada i astronomi Eratosten i Aristarh sa Samosa i netom prije velikog matematičara Euklida. Euklid je u povijesti matematike poznat po svojih 13 knjiga objedinjenih pod jednim imenom *Elementi* koje predstavljaju sintezu sve dotad poznate matematike. Arhimedu su prethodili Tales, pitagorejci, Zenon, Demokrit, Platon te mnogi koji su se bavili rješavanjem tri klasična grčka problema (udvostručenje kocke, trisekcija kuta i kvadratura kruga) u čemu je i Arhimed dao doprinos.

O detaljima Arhimedova života ne zna se mnogo, a zbog legendi koje ga okružuju ni oni nisu pouzdani. Prema nekim podacima, rođen je 287. pr. Kr. u Sirakuzi, grčkom naselju na jugoistočnoj obali Sicilije te najvećem gradu u tadašnjem helenističkom svijetu. Njegov otac Fidija, astronom i matematičar, zainteresirao ga je za matematiku, a zbog izravne veze s tadašnjim kraljem Sirakuze Hijeronom II. omogućio je Arhimedu da se, nakon povratka iz Egipta, nesmetano bavi matematikom. Arhimed se za vrijeme svoga boravka u Egiptu i, prema nekim izvorima, studiju u najvećem središtu znanosti onoga svijeta, Aleksandriji, susreo s mnogim poznatim matematičarima s kojima je kasnije razmjenjivao ideje i svoja otkrića. Većina njegovih djela napisana je upravo u obliku pisama. Arhimed bi drugim matematičarima prvo poslao tvrdnju svojih rezultata, želeći da se oni sami okušaju u dokazivanju dane tvrdnje, a potom bi uslijedila njegova cjelokupna rasprava s danim dokazom. Na taj način Arhimed se dopisivao s Eratostenom, Kononom sa Samosa i njegovim učenikom Dositejem. Ovu praksu kasnije su upotrebljavali i ostali matematičari te na taj način distribuirali i provjeravali svoje rezultate.

Ostatak svog života Arhimed je proveo u Sirakuzi gdje se u početku bavio samo teorijskom matematikom i u skladu s tim napisao nekoliko djela no zbog raznih potreba toga grada a i zbog izazova koje mu je postavio kralj Hijeron, izumio je i nekoliko mehaničkih sprava: Arhimedov vijak, polugu, Arhimedov koloturnik itd. Zbog potreba dokazivanja nekih svojih tvrdnji vezanih za velike brojeve, Arhimed je došao i do novih rezultata u astronomiji. Kasnije, za vrijeme rimske opsade Sirakuze, konstruirao je razna obrambena sredstva, kao što je dizalica za dizanje i bacanje brodova, katapult za bacanje velikog kamenje te prema legendi i tzv. *zrake smrti*, parabolično zrcalo za paljenje brodova koji bi se približavali obali.

Kao i dobar dio njegova života i njegova smrt okružena je s nekoliko legendi, ali je sigurno da je umro 212. pr. Kr. kada je Sirakuza pala. Prema jednoj od legendi, rimski general Marko Klaudije Marcel (oko 268. - 207. pr. Kr.) naredio je da mu dovedu Arhimeda živog i neozlijeđenog kako bi mogao iskoristiti njegove ideje u korist Rima, no jedan vojnik, iz nepoznatih razloga, nije ispoštovao njegovu naredbu i ubio je Arhimeda. Vjeruje se da je tom prilikom Arhimed bio obuzet zadatkom te stoga nije primjećivao da mu se približava vojnik, a kada je ovaj nasrnuo na njega, on ga je zamolio da "ne dira njegove krugove" koje je netom prije nacrtao u pijesku, razmatrajući geometrijski problem. Vojnik nije htio slušati tuđa naređenja, te je izvukao mač i usmrtio Arhimeda. Marcel je, žaleći zbog njegove smrti, odlučio podići spomenik Arhimedu. Na tom spomeniku uklesana je kugla i valjak jer je Arhimed jednom prilikom to zatražio od prijatelja smatrajući otkriće veze volumena kugle i volumena valjka svojim najvećim otkrićem. Gotovo dva stoljeća kasnije, rimski govornik Marko Tulije Ciceron (106. - 43. pr. Kr.) uspio je pomoću ove činjenice identificirati njegov grob, pronalazeći ga u potpuno zapuštenom stanju. Nakon toga, grob je nestao i njegova točna lokacija do danas je nepoznata. Stanovnici grada Sirakuze grob su ostavili u zapuštenom stanju jer nisu prepoznali Arhimedovu genijalnost; za većinu njegova djela bila su teško razumljiva, a njegov pristup nov i preinovativan za njihova shvaćanja.

1.2 Arhimedova djela

Kada bismo danas pregledali naslove i sadržaje Arhimedovih djela primjetili bi da se on bavio nizom različitih tema te im pristupao na vidno drugačiji način nego dotadašnji matematičari. Osim toga, da su njegova djela objedinjena i očuvana odmah poslije njegove smrti i u tom obliku bila dostupna kasnijim generacijama matematičara, današnja povijest matematike zasigurno bi tekla drugačije, naročito otkriće diferencijalnog i integralnog računa. No, to nije bio slučaj. Desetak djela koja su došla do nas očuvali su bizantinski matematičari u Konstantinopolu između 6. i 10. stoljeća. Iako je njihov cilj bio skupljanje i kopiranje njegovih sada već raspršenih djela, zbog jezičnih transformacija sa sicilijsko-dorskog na atički grčki ona su izgubila svoju originalnu formu.

Za razliku od Euklida, koji je pretvarao postojeći materijal u sistematizirano djelo koje bi svaki educirani učenik mogao razumjeti, Arhimed se usmjerio na male rasprave ograničenog dosega namijenjene najcjenjenijim matematičarima toga doba.

Zbog toga, djela koja su ga učinila besmrtnim nikada nisu bila popularna u antici.

Brojimo nekoliko manjih te devet opsežnih djela: *O kugli i valjku*, *O mjerenju kruga*, *O plovećim tijelima*, *O ravnoteži u ravnini*, *O kvadraturi parabole*, *O konoidama i sferoidama*, *O spiralama*, *Pješčanik* i *Metoda*. Ukratko ćemo opisati ta djela, a kasnije će neki rezultati biti istaknuti i detaljnije obrađeni.

U raspravi *O kugli i valjku* napisanoj u dva dijela kojom se obraća Dositeju iz Peluzija, studentu u Kononu na otoku Samosu, navodi među ostalim svoje glavne rezultate: oplošje kugle radijusa r je četiri puta veće od površine njezinog najvećeg kruga i volumen kugle iznosi $\frac{2}{3}$ volumena valjka opisanog kugli.

Kratko djelo *O mjerenju kruga*, također napisano Dositeju, vrlo je važno jer je u njemu dana aproksimacija vrijednosti broja π, tj. omjera opsega kruga i njegovog promjera (π je veći od $\frac{223}{71}$ i manji od $\frac{22}{7}$) te izračunata površina kruga. Arhimedov pristup računanju vrijednosti broja π, koji se sastoji od upisivanju i opisivanju pravilnih mnogokuta s velikim brojem stranica, korišten je sve do razvoja beskonačnih nizova u Indiji tijekom 15. stoljeća i u Europi tijekom 17. stoljeća.

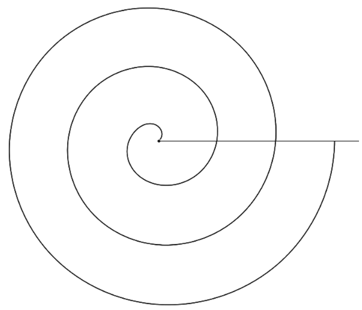
O plovećim tijelima je prvo poznato djelo (u dvije knjige) o hidrostatici i Arhimed se smatra njezinim osnivačem. Svrha hidrostatike je ustanoviti poziciju koju različita tijela, na osnovu njihovog oblika i varijacije specifičnih gravitacija, zauzimaju ploveći. U prvoj knjizi utvrđeni su glavni principi, od kojih nam je najpoznatiji Arhimedov princip: tijelo, gušće od tekućine, postavljeno u tekućinu bit će lakše za iznos istisnute tekućine. Arhimed također daje zakon ravnoteže tekućina te dokazuje da će voda poprimiti kružni oblik oko težišta, što se može shvatiti kao pokušaj objašnjavanja teorije da je Zemlja okrugla. U drugom dijelu, računa položaj ravnoteže dijelova paraboloida, što su najvjerojatnije bile idealizacije oblika brodskih korita.

Djelo *O ravnoteži u ravnini* sastoji se od dvije knjige pri čemu prva sadrži 15 propozicija i 7 postulata, a druga 10 propozicija. U njima je objašnjen zakon poluge: veličine su u ravnoteži na udaljenostima obrnuto proporcionalnim njihovoj masi, te su izvedeni principi za računanje površina i težišta raznih geometrijskih oblika uključujući trokute, paralelograme i odsječke parabole.

U djelu *O kvadraturi parabole* Arhimed demonstrira prvo mehaničkom metodom, a potom konvencionalnim geometrijskim metodama da je površina odsječka parabole $\frac{4}{3}$ puta veća od površine trokuta s jednakom bazom i visinom kao i odsječak.

Djelo *O konoidama i sferoidama* sadrži 32 propozicije te govori o određivanju volumena odsječka tijela dobivenih rotacijom konika (krug, elipsa, parabola i hiperbola) oko svoje osi što u današnjim terminima spada u probleme integriranja.

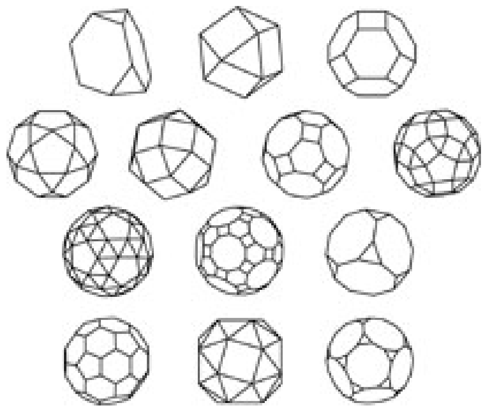
Rasprava *O spiralama* s 28 propozicija donosi mnoga svojstva tangenti te se bavi svojstvima krivulje danas poznate pod nazivom Arhimedova spirala. Arhimed ju definira na sljedeći način: ako polupravac s fiksnom početnom točkom rotira jednolikom brzinom u ravnini dok se ne vrati u početni položaj te ako se u isto vrijeme dok polupravac rotira, točka kreće jednolikom brzinom duž polupravca, polazeći od fiksne točke, tada će ta točka opisati spiralu u ravnini. Arhimed pokazuje da površina dijela te spirale koji nastaje tokom jednog punog okreta iznosi $\frac{a^2\pi}{3}$.



Slika 1: Arhimedova spirala s 3 puna okreta

Arhimedov *Pješčanik* sadrži novi sustav zapisivanja brojeva većih od 100 milijuna, za koje grčki matematičari još nisu našli oznaku. Arhimed je koristio proceduru brojanja u jedinicama od 10 000 mirijada što je 10^8 u našoj notaciji. Kako bi demonstrirao da njegov sustav zapisivanja može adekvatno opisati vrlo velike brojeve, odlučio je izbrojiti koliko je zrnaca pijeska potrebno da ispuni svemir. Za potrebe izračuna, Arhimed konstruira posebnu spravu za mjerenje kuta promjera Sunca.

Početkom 20. stoljeća, 1906. godine, gotovo slučajno otkriveno je još jedno Arhimedovo djelo i to u knjižnici samostana u Konstantinopolu. Danski filolog, Johan Ludvig Heiberg, došao je u Konstantinopol zbog tvrdnje da je pronađen rukopis iz desetog stoljeća napisan na ranijem matematičkom sadržaju. Negdje između dvanaestog i četrnaestog stoljeća, redovnici su isprali raniji tekst kako bi napravili mjesta za kolekciju molitvi i liturgija, što je tada bila česta praksa zbog visoke cijene pergamenata. Na sreću, većina se izbrisanog sadržaja mogla dešifrirati s povećalom. Rukopis sadržava fragmente mnogih Arhimedovih djela koja su već bila poznata, no sadržava i jedinu kopiju uglavnom nepoznatog djela *Metode*, za koje se dotad smatralo da je nepovratno izgubljeno. Poslano kao pismo Eratostenu, sadržavalo je određene matematičke rezultate koje je Arhimed dotad iznio bez dokaza; ono je obavijestilo Eratostena o metodi koja je korištena u dokazivanju tih i mnogih drugih zaključaka. Prethodeći modernom integralnom računu, Arhimed je konstatirao da su površine "građene" od beskonačno mnogo paralelnih linija te da su rotacijska tijela "popunjena" krugovima. Iako njegova *Metoda* pokazuje da je do formula za oplošje i volumen kugle došao "mehaničkim" razmišljanjem uključujući beskonačnost, on ne smatra takvo intuitivno razmišljanje dokazom te u svojim pravim dokazima rezultata u djelu *O kugli i valjku* koristi samo strogu metodu uzastopnih konačnih aproksimacija tzv. metodu *ekshaustije*, do koje je došao Eudoks s Knida u 4. st. pr. Kr.



Slika 2: Arhimedovih 13 polupravilnih poliedara

Arhimed je napisao i neka druga djela koja nisu sačuvana, ali se za njih zna zbog referenci drugih kasnijih autora; traktat o katoptici, u kojem se raspravlja među ostalim o fenomenu refrakcije; o 13 polupravilnih poliedara (Slika 2) sastavljenih od dva ili više pravilnih mnogokuta; o *Problemu stoke.* Ovo posljednje djelo sačuvano je u formi grčkog epigrama i predstavlja vrlo zahtjevan računski problem sa čak 8 nepoznanica. Arhimed ga je napisao Eratostenu kako bi ga izazvao da prebroji svu stoku u stadu na suncu tako što će riješiti istovremeno nekoliko diofantskih jednadžbi. Postoji još teža verzija problema u kojoj se za neke brojeve zahtjeva da budu kvadratni. Ovu verziju problema prvi put je riješio A. Amthor 1880. i odgovor je vrlo velik broj, približno $7.760271 \cdot 10^{206544}$.

Također, postoje neki radovi u arapskom prijevodu pripisani Arhimedu koje on nije mogao napisati iako sadrže neke njegove elemente. Neki od tih su radovi o upisivanju pravilnog sedmerokuta u krug, zatim *Zbirka lema* te djela *O dodirujućim krugovima* i *Stomakion*, koje govori o kvadratu podjeljenom u 14 dijelova za igru puzzli.

2 O mjerenju kruga

Od Arhimedovih radova poznatih u srednjem vijeku, najpopularnija je i ujedno prva prevedena na latinski jezik kratka rasprava *O mjerenju kruga*. Rasprava uključuje tri propozicije podijeljene u dva dijela, a pretpostavlja se da je ona dio opsežnijeg Arhimedovog rada koji obuhvaća i aproksimaciju kvadratnih korijena. Cilj prvog dijela je pokazati kako se površina kruga može izračunati čim se poznaje njegov opseg. U drugom dijelu aproksimira se broj π korištenjem tehnike izložene u dokazu u prvom dijelu.

2.1 Površina kruga

Prvi dio započinje sljedećom propozicijom:

Propozicija 1 *Površina kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta kojemu je jedna kateta radijus, a druga opseg kruga.*

Ideja dokaza gotovo slijedi ideju Euklidovog dokaza teorema koji tvrdi da je površina kruga proporcionalna kvadratu njegova promjera (Euklidovi Elementi, Knjiga XII, Teorem 2). U Euklidovom dokazu površina kruga omeđena je odozdo i odozgo s površinom upisanih i opisanih mnogokuta sa sve većim brojem stranica, dok je u Arhimedovom na sličan način ograničen opseg. Navedene su dvije tvrdnje tako povezane, da ukoliko je Arhimedova istinita, iz nje Euklidova slijedi kao čista posljedica.

Propoziciju, u algebarskoj formulaciji gdje je površina kruga jednaka πr^2, a njegov opseg $2\pi r$, možemo zapisati na sljedeći način:

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r.$$

Kako u antici algebra nije bila tako razvijena niti su se realni brojevi shvaćali kao danas, ne treba nas čuditi da su stari Grci često više radili s omjerima veličina nego samim veličinama. Na primjer, oni ne bi izrazili površinu pravokutnika kao "osnovica puta visina" već bi tvrdili da paralelogram ima istu površinu kao pravokutnik s jednakom bazom i visinom. Stoga je i gornja propozicija izrečena na taj način - izjednačuju se dvije površine. Napomenimo i da sam Arhimed nije koristio simbol π, štoviše nije ga koristio niti jedan grčki matematičar. Taj simbol je zapravo prvo slovo grčke riječi za opseg *perimetros*, a kao službeni simbol za omjer opsega kruga i njegovog promjera usvojen je tek 1748. godine.

Sam Arhimedov dokaz bazira se na sljedećem: potrebno je izvoditi neki potencijalno beskonačan proces dok se ne dogodi nešto što će ga zaustaviti. Otkriće ove tehnike, metode iscrpljivanja ili ekshaustije Arhimed je implicitno pridao Eudoksu.

Za dokaz Propozicije 1 trebat će nam sljedeće pretpostavke koje navodimo bez dokaza:

Pretpostavka 1 *Površina kruga veća je od površine bilo kojeg njemu upisanog mnogokuta.*

Pretpostavka 2 *Površina kruga manja je od površine bilo kojeg njemu opisanog mnogokuta.*

Pretpostavka 3 *Za svaki krug postoji dužina veća od opsega bilo kojeg tom krugu upisanog mnogokuta i manja od opsega bilo kojeg tom krugu opisanog mnogokuta: to je opseg kruga.*

Dokaz Propozicije 1:
Neka je dan krug K površine P_K i trokut T kojemu je jedna kateta jednaka radijusu, a druga opsegu kruga K i označimo njegovu površinu s P_T. Kao i većina dokaza metodom ekshaustije, i ovaj se sastoji od dva dijela. U prvom ćemo pokazati da površina kruga K ne može biti veća od površine trokuta T, a u drugom da ista ne može biti manja. Prema tome, ostaje jedino mogućnost da su te površine jednake.

I. Neka je površina kruga K veća od površine trokuta T, tj. vrijedi $P_K > P_T$. Neka su M_4, M_8, M_{16}, itd. krugu upisani pravilni mnogokuti (Slika 3) dobiveni na sljedeći način: M_4 je kvadrat, M_8 je pravilni osmerokut konstruiran raspolavljanjem kružnih lukova naspram stranica kvadrata M_4 i spajanjem dobivenih točaka s vrhovima navedenog kvadrata te općenito mnogokut M_{2^n} je mnogokut s 2^n stranica dobivenih raspolavljanjem kružnih lukova naspram stranica kvadrata $M_{2^{n-1}}$ i spajanjem dobivenih točaka s vrhovima kvadrata $M_{2^{n-1}}$.

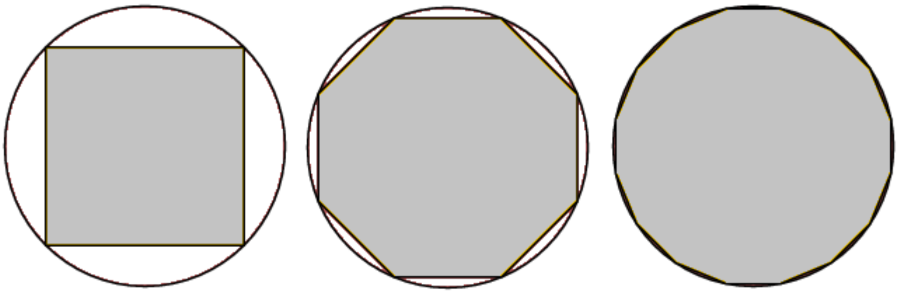
Kako je $P_K > P_T$ tj. $P_K - P_T > 0$, prema Pretpostavci 1 postoji n takav da vrijedi

$$0 < P_K - P_{M_{2^n}} < P_K - P_T,$$

gdje je $P_{M_{2^n}}$ površina mnogokuta M_{2^n}. Iz toga slijedi

$$P_T < P_{M_{2^n}}.$$

Nadalje, ako je AB stranica upisanog mnogokuta M_{2^n} i N njeno polovište, spojnica središta C kruga K s N bit će okomita na AB, pa je $|CN| < r$, gdje je r radijus



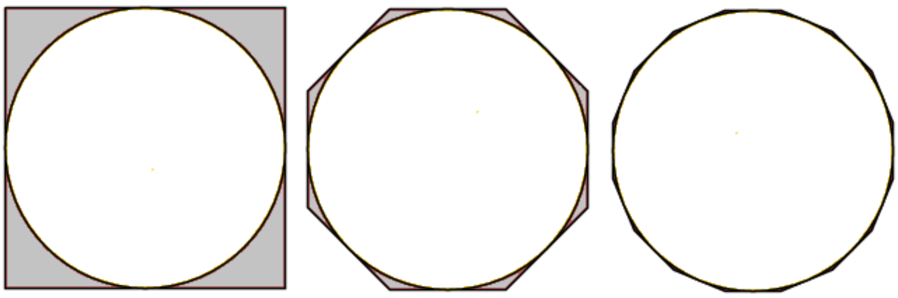
Slika 3: Krugu upisan pravilni kvadrat, osmerokut i šesnaesterokut

kruga. Kako je prema Pretpostavci 3 opseg kruga K, označimo ga s O_K, veći od opsega svakog upisanog mnogokuta, za površinu upisanog mnogokuta M_{2^n} slijedi

$$P_{M_{2^n}} = 2^n \cdot \frac{|AB| \cdot |CN|}{2} = |CN| \cdot \frac{2^n \cdot |AB|}{2} < \frac{r \cdot O_K}{2} = P_T,$$

što je kontradiktorno s prethodnim dobivenim rezultatom $P_T < P_{M_{2^n}}$. Stoga mora vrijediti $P_K \leq P_T$.

II. Neka je $P_K < P_T$. Neka su N_4, N_8, N_{16}, itd. krugu K opisani pravilni mnogokuti (Slika 4), pri čemu je N_4 opisan kvadrat, a N_8 opisan osmerokut dobiven na sljedeći način: položimo tangentu na kružnicu kruga K u točki sjecišta kružnice i pravca koji spaja središte kruga K i vrh kvadrata N_4, to napravimo za svaki vrh, a zatim spojimo točke tog sjecišta i točke u kojima tako dobivene tangente sijeku stranice kvadrata. Ostali opisani mnogokuti N_{2^n} s 2^n stranica dobiju se na analogan način.



Slika 4: Krugu opisan pravilni kvadrat, osmerokut i šesnaesterokut

Kako je $P_K < P_T$ tj. $P_T - P_K > 0$, prema Pretpostavci 1 postoji n takav da vrijedi

$$P_T > P_{N_{2^n}},$$

gdje je $P_{N_{2^n}}$ površina mnogokuta N_{2^n}. Nadalje, ako je AB stranica opisanog mnogokuta N_{2^n} tada prema Pretpostavci 3 za površinu opisanog mnogokuta N_{2^n} slijedi

$$P_{N_{2^n}} = 2^n \cdot \frac{|AB| \cdot r}{2} > \frac{r \cdot O_K}{2} = P_T,$$

što je pak kontradiktorno s prethodnim dobivenim rezultatom $P_T > P_{N_{2^n}}$.

Budući dakle da nije ni $P_K < P_T$ ni $P_T < P_K$ slijedi $P_K = P_T$. □

2.2 Aproksimacija broja π

Kako bi izračunao omjer opsega kruga i njegova promjera, odnosno broj π, Arhimed nanovo razmišlja u terminima Eudoksove metode: opseg kruga leži između krugu upisanih i opisanih pravilnih mnogokuta s n stranica te ako se n s jedne strane povećava, s druge se strane odstupanje opsega kruga od opsega mnogokuta smanjuje. Na ovaj način postupno se "iscrpljuje" površina između mnogokuta i kruga, ali, samo do određene granice, do zadovoljavajuće razine točnosti. Treba napomenuti da iako se krug može smatrati kao limes upisanih ili opisanih mnogokuta, Grci nikada nisu došli do pojma limesa.

Aproksimaciju broja π Arhimed započinje s krugom dijametra $d = 1$, za koji bi prema definiciji broja π opseg O bio jednak upravo π. Zatim tom krugu upisuje i opisuje pravilan šesterokut zbog lakoće njegove konstrukcije. Za upisani šesterokut potrebno je iz bilo koje točke na kružnici označiti tetive jednake radijusu kruga sve dok se ne dobije svih 6 vrhova. Kada bi sada u tim točkama konstruirali tangente, dobili bi novi šesterokut koji opisuje krug. Korištenjem elementarne geometrije i trigonometrije (Euklidovi Elementi, Knjiga II, Teoremi 12 i 13) , Arhimed zaključuje da je duljina stranice upisanog šesterokuta $\frac{1}{2}$, a duljina stranice opisanog šesterokuta $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nadalje, opseg upisanog šesterokuta manji je od opsega kruga i iznosi $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. S druge strane, opseg opisanog šesterokuta veći je od opsega kruga i iznosi $\frac{6}{\sqrt{3}}$ što Arhimed zaokružuje na 3.46 jer $\sqrt{3}$ omeđuje s

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Na ovaj način došli smo do nejednakosti

$$3 < \pi < 3.46,$$

koja će poslužiti za generiranje sve preciznijih nejednakosti za broj π. Kako bi ubrzao postupak, Arhimed je pronašao način kako ocijeniti opseg mnogokuta sa duplo više stranice, stoga je takve mnogokute posebno razmatrao. Od pravilnog šesterokuta, pravilni upisani dvanaesterokut konstruirao je raspolavljanjem kružnog luka naspram svake stranice šesterokuta te spajanjem odgovarajućih dobivenih točaka i originalnih vrhova šesterokuta. Na analogan način, Arhimed je od pravilnog dvanaesterokuta dobio pravilne mnogokute sa 24, 48 i konačno 96 stranica; mogao je ići i dalje, ali račun je postao prezahtjevan te donekle i nepotreban - posljednja ocjena smjestila je π između 3.14084... i 3.14285... odnosno između $3 + \frac{10}{71}$ i $3 + \frac{1}{7}$. Ovaj posljednji rezultat zapisuje u obliku iduće propozicije, najvažnije u njegovom djelu:

Propozicija 2 *Opseg kruga tri puta premašuje dijametar za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$, ali veći od $\frac{10}{71}$.*

Kao što smo naveli, ključan korak u računu je prijelaz s n-stranih na $2n$-strane mnogokute što je Arhimed učinio korištenjem formula za harmonijsku i geometrijsku sredinu. Ako bi s o_n označili opsege upisanih, a s O_n opisanih pravilnih mnogokuta s n stranica, za opseg kruga O vrijedilo bi:

$$o_6 < o_{12} < o_{24} < o_{48} < o_{96} < \ldots < o_n < O$$

$$O < O_n < \ldots < O_{96} < O_{48} < O_{24} < O_{12} < O_6.$$

Možemo primjetiti da su nizovi (o_n) i (O_n) omeđeni i monotoni, stoga oba imaju limes i on iznosi O. Članove niza (O_{2n}) dobijemo kao harmonijsku sredinu članova niza (o_n) i (O_n):

$$O_{2n} = \frac{2o_n O_n}{o_n + O_n},$$

a članove niza (o_{2n}) kao geometrijsku sredinu članova niza (o_n) i (O_{2n}):

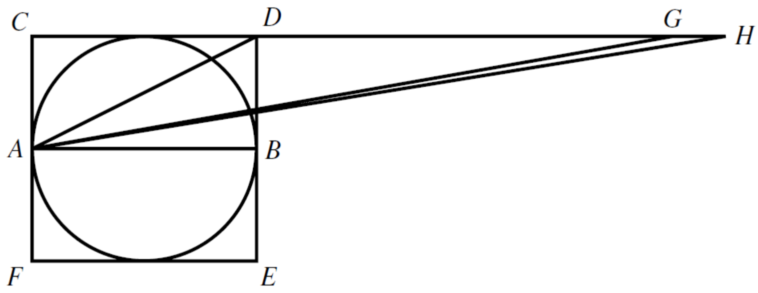
$$o_{2n} = \sqrt{o_n O_{2n}}.$$

Stoga, Arhimed je trebao samo ubaciti početne aproksimacije $o_6 = 3$ i $O_6 = 3.46$ te korištenjem navedenih rekurzivnih relacija računati redom opsege završno s O_{96} i o_{96}.

Arhimedovi rezultati dobivaju na značaju uzmemo li u obzir da je na raspolaganju imao minimalno razvijenu algebru, kompliciran način računanja s razlomcima te da je morao raditi s brojnim aproksimacijama iracionalnih veličina, a uz to nije imao mogućnost korištenja limesa. Napomenimo i to da je njegova metoda aproksimacije broja π s mnogokutima postala najdominantniji način određivanja znamenki broja

π u narednih nekoliko stoljeća. Danas u istu svrhu koristimo algoritme temeljene na ideji beskonačnih nizova i naprednoj računalnojj tehnologiji.

Primjenu dobivenog rezultata možemo vidjeti u trećoj i posljednjoj propoziciji gdje se za opseg kruga uzima $O = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.



Slika 5: Krug K i njemu opisan kvadrat $CDEF$

Propozicija 3 *Omjer površine kruga i površine kvadrata stranice jednake njegovu polumjeru je približno* 11 : 14.

Dokaz:
Neka je dan krug K promjera AB i neka je $CDEF$ kvadrat opisan tom krugu. Produljimo stranicu CD preko vrha D do točke G te točke H (Slika 5) tako da je

$$|DG| = 2|CD| \text{ i } |GH| = \frac{1}{7}|CD|.$$

Za omjer površina trokuta $\triangle ACH$ i $\triangle ACD$ vrijedi

$$\frac{P_{\triangle ACH}}{P_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot (3 + \frac{1}{7})|CD|}{\frac{1}{2}|AC| \cdot |CD|} = \frac{22}{7}$$

što zajedno s

$$P_{\square CDEF} = 4 \cdot P_{\triangle ACD},$$

daje idući omjer

$$\frac{P_{\triangle ACH}}{P_{\square CDEF}} = \frac{P_{\triangle ACH}}{4 \cdot P_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{22}{7} = \frac{11}{14}.$$

Uzimanjem aproksimaciju za opseg kruga iz Propozicije 2, površina kruga K približno je jednaka površini trokuta $\triangle ACH$ te je stoga omjer površine kruga K i kvadrata $CDEF$ približno 11 : 14. $\square$

3 Kvadratura parabole

Nakon što je uspješno savladao problem površine kruga i s njim povezane aproksimacije broja π, Arhimed se zainteresirao za problem koji, kako sam kaže, nitko prije njega nije pokušao riješiti. Radilo se o problemu traženja površine odsječka parabole formiranog povlačenjem bilo koje njene tetive. Problem je opisao u svom djelu *O kvadraturi parabole*, a pristupio mu je, kao i ostalim sličnim problemima, na dva načina; isprva mehaničkom metodom, a zatim geometrijskim putem. Ovdje ćemo opisati samo geometrijsku metodu, a u idućem poglavlju upoznat ćemo se sa osnovnim crtama njegove mehaničke metode rješavajući problem volumena kugle.

Na početku, Arhimed definira nekoliko osnovnih pojmova:

Definicija 1 *U odsječku omeđenom ravnom linijom i bilo kojom krivuljom nazivamo ravnu liniju* ***osnovicom****, a* ***visinom*** *najveću okomitu udaljenost krivulje od osnovice odsječka, te* ***vrhom*** *točku na krivulji čija je okomita udaljenost od osnovice odsječka najveća.*

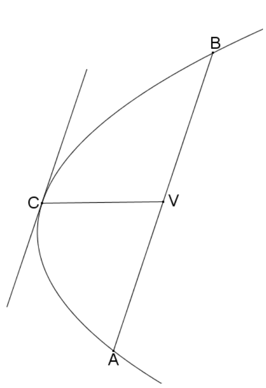
Kroz sljedeće propozicije postupno iscrpljuje površinu odsječka parabole uspisivanjem trokuta s osnovicama duljine jednake duljini dužine koja odsjeca parabolu i visine jednake visini odsječka (pri svakom novom trokutu dobivaju se novi odsječci parabole te time nove osnovice i visine odsječaka). U danim propozicijama pod pojmom *promjer* krivulje drugog reda podrazumijevamo spojnicu polovišta međusobno paralelnih tetiva te krivulje. Posebno, ako se radi o paraboli, tada su svi njezini promjeri paralelni s njezinom osi.

Propozicija 1 *Ako je $\overline{AB}$ osnovica odsječka parabole, a V točka polovišta $\overline{AB}$ i ako promjer kroz V siječe krivulju u točki C, tada je C vrh odsječka. (Slika 6)*

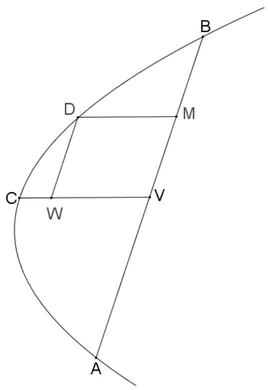
Propozicija 2 *Ako je $\overline{AB}$ osnovica parabole raspolovljena promjerom $\overline{CV}$ gdje je V točka polovišta $\overline{AB}$ i ako je $\overline{DM}$ dužina parelelna CV koja raspolavlja $\overline{BV}$ u M i $\overline{DW}$ okomica iz D na $\overline{CV}$ (Slika 7), tada je*

$$|CV| = \frac{4}{3}|DM|.$$

Propozicija 3 *Ako je $\overline{AB}$ osnovica, a C vrh odsječka parabole, tada je trokut $\triangle ABC$ veći od polovice odsječka parabole.*



Slika 6: C je vrh odsječka



Slika 7:

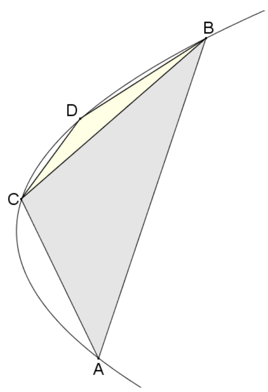
Propozicija 4 *Ako je $\overline{AB}$ osnovica, a C vrh odsječka parabole i D vrh odsječka s osnovicom $\overline{CB}$ tada je*

$$P_{\triangle ABC} = 8 \cdot P_{\triangle CBD}.$$

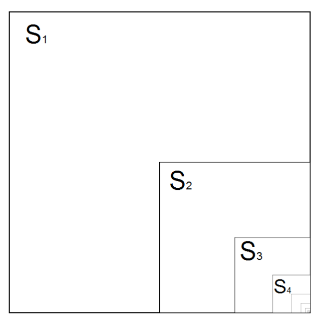
Propozicija 5 *Ako je S_1, S_2, S_3, ... niz površina od kojih je svaka u redu četiri puta veća od sljedeće i ako je najveća S_1 jednaka površini trokuta $\triangle ABC$ upisanog u odsječak parabole ABC čija je osnovica i visina jednaka osnovici i visini odsječka, tada*

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots < \text{ površina odsječka } ABC.$$

Naime, zbroj površina trokuta $\triangle CBD$ (Slika 8) i $\triangle ACE$ gdje je E vrh odsječka parabole s osnovicom $\overline{AC}$ je 4 puta manji od površine trokuta $\triangle ABC$, stoga je u nizu površina S_1, S_2, S_3, ... svaka četiri puta veća od sljedeće.



Slika 8: Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle CBD$



Slika 9: Površina $S_n = \frac{1}{4} S_{n-1}$.

Propozicija 6 *Ako je dan niz površina S_1, S_2, S_3, ... S_k, od kojih je najveća površina S_1, a svaka je četiri puta veća od sljedeće u nizu, tada vrijedi*

$$S_1 + S_2 + S_3 \ldots + S_k + \frac{1}{3}S_k = \frac{4}{3}S_1.$$

Kao vizualni dokaz navedene propozicije može nam poslužiti Slika 9.

Propozicija 7 *Površina svakog odsječka omeđenog parabolom i tetivom $\overline{AB}$ jednaka je $\frac{4}{3}$ površine trokuta koji ima istu osnovicu kao odsječak i jednaku visinu.*

Dokaz:
Neka je $K = \frac{4}{3}P_{\triangle ABC}$, gdje je C vrh odsječka; trebamo dokazati da je površina odsječka jednaka K tj. da nije ni manja ni veća od K.

I. Pretpostavimo da je površina odsječka veća od K. Ako bi u odsječke čije su osnovice tetive $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ upisali trokute s istim osnovicama i jednakom visinom, tj. s vrhovima D i E koji su i vrhovi odsječka, i ako u preostalim odsječcima upišemo trokute na isti način, i tako dalje, preostat će nam odsječci čiji je zbroj površina manji od površine dijela kojim odsječak ABC nadilazi K. Stoga površina formiranog mnogokuta mora biti veća od K; no to je nemoguće jer je po Propoziciji 6

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_k + \frac{1}{3}S_k = \frac{4}{3}S_1 = \frac{4}{3}P_{\triangle ABC}.$$

Stoga površina odsječka ne može biti veća od K.

II. Pretpostavimo, da je površina odsječka manja od K. Ako bi označili $P_{\triangle ABC} = S_1$, $S_2 = \frac{1}{4}S_1$, $S_3 = \frac{1}{4}S_2$ i tako dalje dok ne dođemo do površine S_n koja je manja od razlike površina K i odsječka ABC, dobili bi

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \frac{1}{3}S_n = \frac{4}{3}S_1 = K.$$

Sada, kako je K veći od $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ za površinu manju od S_n i veći od površine odsječka ABC za površinu veću od S_n slijedi da je

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n > \text{ površine odsječka } ABC,$$

što po Propoziciji 5 nije moguće. Dakle, površina odsječka nije manja od K. Kako površina odsječka nije ni manja ni veća od K, slijedi

$$\text{površina odsječka } ABC = K = \frac{4}{3}P_{\triangle ABC}.$$

□

4 O kugli i valjku

Napomenuli smo kako ćemo se u ovom poglavlju pokušati više osvrnuti na mehaničku metodu kojom je Arhimed inače prvo dokazivao svoje rezultate. Metodu ćemo upoznati rješavajući problem volumena kugle; problem koji je Arhimed smatrao toliko važnim da je njegovo rješenje želio ugravirati na svoj nadgrobni spomenik. Osim toga, u sklopu njegove knjige "O kugli i valjku" koja broji 53 propozicije nalazi se i formula za računanje oplošja kugle što je također njegovo veliko otkriće stoga ćemo se upoznati s idejom koju je koristio kako bi riješio i taj problem.

4.1 Volumen kugle

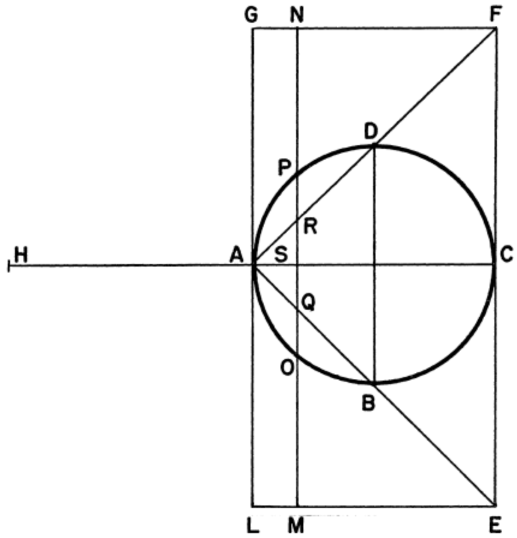
Mehanička metoda koju Arhimed koristi oslanja se na *zakon poluge* koji je upravo on prvi iskazao: poluga je u ravnoteži kada je moment sile s jedne strane poluge jednak momentu sile na drugoj strani. U našem slučaju promatrati ćemo momente presjeka valjka, stošca i kugle gdje pod momentom presjeka podrazumijevamo umnožak površine presjeka i udaljenosti presjeka od točke oslonca.

Propozicija 1 *Mehaničkim metodama možemo dokazati sljedeće tvrdnje:*

1. *Volumen bilo koje kugle četiri puta je veći od volumena stošca s bazom jednakom velikom krugu kugle i visinom jednakom radijusu tog kruga.*

2. *Volumen valjka s bazom jednakom velikom krugu kugle i visinom jednakom promjeru je $\frac{3}{2}$ puta veći od volumena kugle.*

Dokaz:
Neka je $ABCD$ veliki krug kugle, a $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ promjeri tog kruga koji se sijeku pod pravim kutom. Neka je nacrtan krug s promjerom $\overline{BD}$ u ravnini okomitoj na $\overline{AC}$ i neka je taj krug baza stošca s vrhom u točki A. Neka je stožac produžen i neka ga ravnina kroz točku C paralelna bazi siječe; presjek će biti krug promjera $\overline{EF}$. Neka je nad ovim krugom kao bazom podignut valjak s visinom i osi $\overline{AC}$ i neka je $\overline{AC}$ produžena preko vrha A do H, tako da je $|AH| = |CA|$. Neka se $\overline{CH}$ smatra *polugom ravnoteže*, pri čemu je A njezino polovište. Povucimo sada bilo koji pravac MN u ravnini kruga $ABCD$ paralelan pravcu BD. Neka MN siječe krug u točkama O i P, promjer $\overline{AC}$ u točki S i pravce AE, AF u Q i R. Spojimo točke A i O. Kroz MN nacrtajmo ravninu pod pravim kutom na AC; ova ravnina siječe valjak u krugu promjera $\overline{MN}$, kuglu u krugu promjera $\overline{OP}$ i stožac u krugu promjera $\overline{QR}$.



Slika 10: Presjek kugle, valjka i stošca s pripadnim oznakama

Pokažimo da su trokuti $\triangle OSA$, $\triangle COS$ i $\triangle COA$ slični. Sva su tri navedena trokuta pravokutna, a kako je $\angle AOC$ kut nad promjerom vrijedi $\angle AOC = 90°$. Nadalje, $\angle CAO + \angle OCA = 90°$, što iskoristimo za

$$\angle SOC = 90° - \angle OCA = \angle CAO,$$

$$\angle AOS = 90° - \angle CAO = \angle OCA.$$

Slijedi $\triangle OSA \sim \triangle COS \sim \triangle COA$ te posebno

$$\frac{|AC|}{|AO|} = \frac{|AO|}{|AS|}.$$

Dobiveni omjer, jednakosti $|MS| = |AC|$ i $|QS| = |AS|$ te Pitagorin poučak daju:

$$|MS| \cdot |SQ| = |AC| \cdot |AS| = |AO|^2 = |OS|^2 + |SQ|^2.$$

Kako je $|HA|$=$|AC|$, slijedi

$$|HA| : |AS| = |AC| : |AS| = |MS| : |SQ| = \frac{|MS|^2}{|MS| \cdot |SQ|} = \frac{|MS|^2}{|OS|^2 + |SQ|^2}$$

$$= \frac{|MN|^2}{|OP|^2 + |OR|^2} = \frac{|MN|^2}{|OP|^2 + |OR|^2},$$

odnosno

$$|HA| \cdot (|OP|^2 + |OR|^2) = |AS| \cdot |MN|^2.$$

Posljednji redak izjednačuje moment presjeka valjka i zajednički moment presjeka kugle i stošca: presjek valjka promjera $\overline{MN}$, smješten gdje je, je u ravnoteži oko točke A s presjekom kugle promjera $\overline{OP}$ i presjekom stošca promjera $\overline{QR}$ zajedno, ako su navedeni presjeci smješteni tako da im je težište u H.

Primijetimo da smo pri uvođenju oznaka i odnosa između kugle, valjka i stošca jedan element neprecizno definirali: pravac MN u ravnini kruga $ABCD$ paralelan BD koji siječe dužini $\overline{AC}$. Naime, kada bi isti račun proveli za bilo koji drugi pravac s navedenim svojstvom, račun bi se razlikovao samo u duljini dužine $\overline{AS}$ određenoj položajem, u ovom slučaju, ne fiksne točke S. Krajnji rezultat za momente presjeka valjka te kugle i stošca zajedno bio bi isti. Upravo zbog toga zaključujemo kako je valjak, smješten gdje je, u ravnoteži oko A s kuglom i stošcem zajedno kada su oni smješteni tako da im je težište u H. Ovo je ništa drugo nego primjena *Cavalijerijevog* principa: ako dva tijela u prostoru siječemo skupom paralelnih ravnina te ako su površine presjeka u svakom pojedinom slučaju u istom omjeru, onda su u tom omjeru i volumeni tih dvaju tijela.

Neka je pravac MN odabran tako da siječe duljinu $\overline{AC}$ u njezinom polovištu kojeg označimo s K. Primijetimo, točka K je težište valjka. Iz prethodnih rezultata, za volumene danih tijela vrijedi

$$|HA| : |AK| = V_{\text{valjka}} : (V_{\text{kugle}} + V_{\text{stošca } AEF}).$$

No kako je $|HA| = |AC| = 2|AK|$ zaključujemo dalje

$$V_{\text{valjka}} = 2 \cdot (V_{\text{kugle}} + V_{\text{stošca } AEF}).$$

Volumen valjka jednak je tri volumena stošca AEF iz čega slijedi $V_{\text{stošca}} = 2 \cdot V_{\text{kugle}}$. Kako je nama potreban stožac ABD, iskoristimo da je $|EF| = 2 \cdot |BD|$, pri čemu je tada

$$V_{\text{stošca } AEF} = 8 \cdot V_{\text{stošca } ABD}$$

te konačno

$$V_{\text{kugle}} = 4 \cdot V_{\text{stošca } ABD}.$$

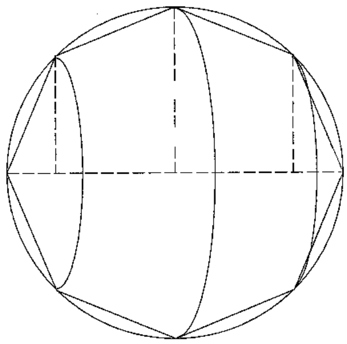
U drugom dijelu Propozicije, promatrajmo valjak V' čiji je promjer baze upola manji od valjka s bazom promjera $\overline{EF}$, dok su im visine jednake. U tom slučaju volumen valjka V' manji je četiri puta. Korištenjem gore dokazanih tvrdnji dobivamo

$$V_{V'} = \frac{1}{4}V_{\text{valjka}} = \frac{24}{4}V_{\text{stošca } ABD} = 6V_{\text{stošca } ABD} = \frac{3}{2}V_{\text{kugle}}.$$

□

4.2 Oplošje kugle

Propozicija 2 *Oplošje kugle radijusa r je četiri puta veće od površine njezinog najvećeg kruga.*



Slika 11: Rotacija pravilnog osmerokuta

Neka je K kugla radijusa r. S obzirom na to da je površina najvećeg presjeka kugle radijusa r jednaka $r^2\pi$, gornji rezultat možemo zapisati ovako $O_K = 4r^2\pi$.

Kako je Arhimed došao do ovakvog zaključka? U sferu je upisivao sve veći broj stožaca i krnjih stožaca. Najprije je primijetio da upisivanjem pravilnih $2n$-mnogokuta unutar najvećeg presjeka kugle a potom njihovim rotiranjem oko najveće dijagonale za 360°, nastaje tijelo sastavljeno od 2 stošca i $n-2$ krnjih stožaca (na Slici 11 rotacijom pravilnog osmerokuta oko najveće dijagonale nastaje tijelo sastavljeno od 2 stošca i 2 krnja stošca).

Metodom ekshaustije, Arhimed iscrpljuje razliku između oplošja kugle i oplošja tijela nastalog rotacijom pravilnih mnogokuta sa sve većim brojem stranica čime dolazi do dane formule. Strogi dokaz daje korištenjem dvostrukog svođenja na kontradikciju, analogno dokazu površine kruga.

5 Težište trokuta

Kombinirajući matematičke i fizikalne metode, Arhimed se bavio i određivanjem težišta raznih geometrijskih likova i tijela; među ostalim težištem trokuta, paralelograma, trapeza, odsječaka parabole, polukugle itd. Radi uvida u ideju koju koristi prilikom dokazivanja težišta geometrijskih likova, ovdje ćemo opisati njegov postupak određivanja težišta trokuta.

Propozicija 1 *Težište svakog trokuta leži na dužini koji spaja bilo koji vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.*

Dužinu koja ima gore navedeno svojstvo nazivamo težišnica. U dokazu dane propozicije dovoljno je pokazati da ako se težište nalazi na jednoj od težišnica, tada se ono podudara s njihovim sjecištem; time dobivamo današnju definiciju težišta trokuta kao sjecišta dvaju težišnica. Za potrebe dokaza navodimo dvije propozicije:

Propozicija 2 *Težište svakog paralelograma leži na dužini koja spaja polovišta nasuprotnih stranica.*

Propozicija 3 *Ako je A lik s težištem T_1, a B dio tog lika s težištem T_2, tada je težište preostalog dijela C lika A točka T_3 na polupravcu T_1T_2 takva da je*

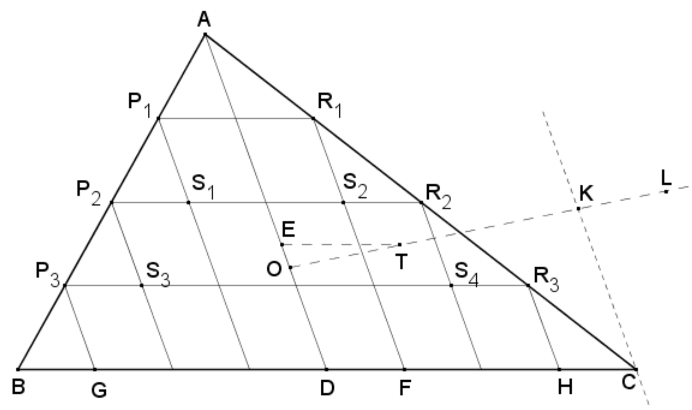
$$|T_3T_1| : |T_1T_2| = P_B : P_C,$$

gdje P_B i P_C predstavljaju površine dijelova B i C.

Dokaz Propozicije 1:
Neka je dan trokut $\triangle ABC$, te neka je D polovište stranice $\overline{BC}$, a T težište trokuta (potrebni elementi i oznake se mogu vidjeti na Slici 12). Dužina $\overline{AD}$ je težišnica trokuta. Pretpostavimo da T ne leži na težišnici $\overline{AD}$ te da, bez smanjenja općenitosti, ono leži desno od težišnice.

Neka pravac paralelan s BC kroz T siječe težišnicu $\overline{AD}$ u točki E. Ako raspolovimo dužinu $\overline{DC}$, a zatim nastale dužine, i tako nastavimo dalje, konačno ćemo dobiti dužinu $\overline{DF}$ duljine manje od $|ET|$. Podijelimo sada dužinu $\overline{BC}$ ekvidistantnim točkama tako da je udaljenost dviju susjednih točaka jednaka $|DF|$, a zatim kroz te točke povucimo pravce paralelne AD koji sijeku $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3 kako je prikazano na Slici 12. Povucimo dužine $\overline{P_1R_1}$, $\overline{P_2R_2}$ i $\overline{P_3R_3}$ (primijetimo da su one paralelne s BC) te označimo točke presjeka dužina $\overline{P_2R_2}$,

$\overline{P_3R_3}$ i nekih paralelnih pravaca s S_1, S_2, S_3 i S_4. Na ovaj način rastavili smo trokut $\triangle ABC$ na paralelograme $S_1S_2R_1P_1$, $S_3S_4R_2P_2$ i GHR_3P_3 i manje trokute. Težišta navedenih paralelograma leže na $\overline{AD}$ (prema Propoziciji 2), stoga i težište O skupa paralelograma leži na $\overline{AD}$. Spojimo točke O i T i iz O povucimo polupravac OT. Označimo s K presjek polupravca OT i pravca kroz C paralelnog s AD.



Slika 12: Trokut $\triangle ABC$ s pripadnim oznakama

Neka je n broj dijelova na koji je podijeljena dužina $\overline{AC}$. Trokuti uz dužinu $\overline{AC}$, $\triangle HCR_3$, $\triangle S_4R_3R_2$, ... slični su trokutu $\triangle DCA$. Analogno, trokuti uz dužinu $\overline{AB}$ slični su trokutu $\triangle BDA$. Označimo zbroj površina svih malih trokuta s ΔT. Iz prethodnih sličnosti trokuta zaključujemo:

$$P_{\triangle ABC} : \Delta T = n : 1 = |AC| : |AR_1| > |OK| : |OT|,$$

pri čemu za zbroj površina paralelograma ΔP vrijedi

$$P_{\triangle ABC} : \Delta P = n : (n-1).$$

Produžimo polupravac OT preko vrha K do točke L tako da vrijedi

$$P_{\triangle ABC} : \Delta T = |OL| : |OT| = n : 1.$$

Iz gornjih omjera možemo dalje zaključiti

$$\Delta P : \Delta T = (n-1) : 1 = |TL| : |OT|.$$

Kako je težište trokuta $\triangle ABC$ u T, a težište skupa paralelograma u O, težište preostalog skupa, skupa trokutića, mora se nalaziti u X. No, to nije moguće jer se skup trokutića nalazi s desne strane pravca kroz L paralelnog s AD, a točka X leži s njegove lijeve strane.

Zaključujemo, težište T trokuta $\triangle ABC$ leži na težišnici $\overline{AD}$. $\square$

6 Problem stoke

Arhimedov *Problem stoke*, pronađen 1773., jedan je od onih problema koji su matematičare intrigirali desetljećima; relativno jednostavno i slikovito postavljen, rješavanje problema komplicira se zbog korištenja velikih brojeva. Ne treba stoga čuditi da je prvi puta riješen tek 1880. godine. Napomenimo da sam problem, zbog korištenja diofantskih jednadžbi, spada u područje teorije brojeva.

Problem stoke zapisan u obliku stiha, Arhimed je poslao Eratostenu da ga riješi, a problem govori o jednom stadu boga sunca u kojem se nalaze četiri skupine bikova i krava (bikovi su označeni velikim, a krave malim slovom): bijela - W i w, crna - X i x, žuta - Y i y, te šarena - Z i z. Navedene nepoznanice povezuje sljedećih 7 jednakosti koje čine prvi dio problema:

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot X + Y$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot Z + Y$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot W + Y$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot X + x$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot Z + z$$

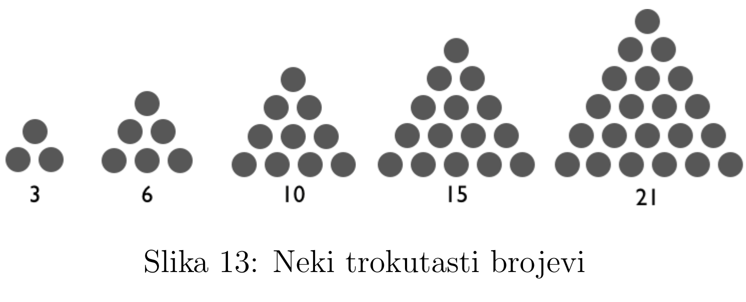
$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot Y + y$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot W + w.$$

Drugi dio problema uz gornjih sedam uvjeta postavlja još dodatna dva:

$$W + X = \text{kvadratni broj}$$

$$Y + Z = \text{trokutast broj.}$$



Slika 13: Neki trokutasti brojevi

Prije govora o postupku rješavanja, koristilo bi napomenuti zašto Arhimed koristi zbroj razlomaka, te što predstavljaju kvadratni i trokutasti brojevi. Razlomke koje Arhimed koristi nazivaju se egipatski ili jedinični razlomci, zbog toga što im je brojnik jednak 1. Egipćani su poznavali jedino takve razlomke, ali su poznavali i svojstvo da se bilo koji drugi razlomak može zapisati kao zbroj jediničnih, što je bilo poznato i samom Arhimedu. Nadalje, kako se iz grčkog izvornika kvadratni broj može poistovjetiti s pravokutnim brojem, prvi se dodatni uvjet može promatrati na dva načina:

$$W + X = a \cdot a$$

$$W + X = a \cdot b$$

gdje su a, b prirodni brojevi. Napomenimo da je prva verzija problema, kada je zbroj $W + X$ kvadratni broj, znatno teža. Drugi dodatni uvjet zahtjeva da brojevi budu trokutasti (Slika 13), a oni se mogu zapisati kao zbroj prvih nekoliko prirodnih brojeva tj. kraće kao aritmetička sredina dva uzastopna prirodna broja. Na taj način drugi dodatni uvjet prelazi u

$$Y + Z = \frac{q \cdot (q+1)}{2}.$$

Rješenje prvog dijela problema najlakše se dobije ako izrazimo sve nepoznanice pomoću nepoznanice Y, a zatim primjenom svojstva da Y mora biti prirodan broj, zaključimo koji brojevi moraju dijeliti Y. Račun bi nas tada doveo do činjenice da Y mora biti oblika $3^4 \cdot 11 \cdot 4657 \cdot n$. Za sve nepoznanice potom slijedi:

$$\begin{aligned}
W &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657 \cdot n = 10366482n \\
X &= 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657 \cdot n = 7460514n \\
Y &= 3^4 \cdot 11 \cdot 4657 \cdot n = 4149387n \\
Z &= 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657 \cdot n = 7358060n \\
w &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 4657 \cdot n = 7206360n \\
x &= 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991 \cdot n = 4893246n \\
y &= 3^2 \cdot 13 \cdot 46489 \cdot n = 5439213n \\
z &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761 \cdot n = 3515820n.
\end{aligned}$$

Primijetimo dalje kako su W i X djeljivi s $2 \cdot 3 \cdot 4657 \cdot n$, te da se stoga njihov zbroj, neovisno o broju n, može zapisati kao umnožak dva prirodna broja, tj. on je pravokutni broj. Uvrštavanjem za $n = 1$ dobili bi najmanje moguće rješenje za svaku od nepoznanica. Nadalje, uvjetovanjem da zbroj $Y + Z$ bude trokutast broj, dobili bismo da je najmanji broj n koji zadovoljava i to svojstvo jednak 117 423 te zatim i odgovarajuće vrijednosti nepoznanica. Na ovaj način riješili bi lakšu verziju *Problema stoke.*

Rješavanjem teže verzije problema u kojoj je potrebno zadovoljiti uvjet da je $W + X$ kvadrat nekog prirodnog broja te korištenjem supstitucija x i y za određene izraze dolazi se do diofantske jednadžbe oblika

$$x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1.$$

Ta jednadžba pripada tzv. Pellovim jednadžbama čiji je općeniti oblik

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

a posebne su po tome što imaju beskonačno mnogo rješenja od kojih se sva mogu dobiti ako se poznaje fundamentalno rješenje. Kako rješavanje Pellove jednadžbe uglavnom nije trivijalan posao, a u našem slučaju koriste se vrlo veliki brojevi, do prvog seta rješenja došlo se više od 100 godina nakon otkrića ovog problema, a radilo se o brojevima za čiji je zapis potrebno 206 545 znamenki. Štoviše, kada bi zbrojili svih 8 nepoznanica tj. našli prvi najmanji ukupan broj svih bikova i krava, on bi iznosio čak

$$7.760271 \cdot 10^{206\,544}.$$

To je broj toliko velik da kada bi ga pokušali zapisati na listove papira sa 60 znamenaka u redu i 40 redaka, bilo bi nam potrebno 87 stranica za njegov zapis. Ako bismo to napravili posebno za svaku nepoznanicu, rezultat bi bila jedna vrlo opsežna knjiga.

Lako bismo mogli zaključiti kako Arhimed nije bio u mogućnosti riješiti ovaj problem u potpunosti zbog veličine brojeva i teorije potrebne za njegovo rješavanje, no nemojmo zbog toga podcijeniti njegov rad; upravo je on osmislio sustav za zapisivanje vrlo velikih brojeva, mnogo većih od gore navedenog, o čemu je pisano u idućem poglavlju.

7 Račun o pješčanim zrncima

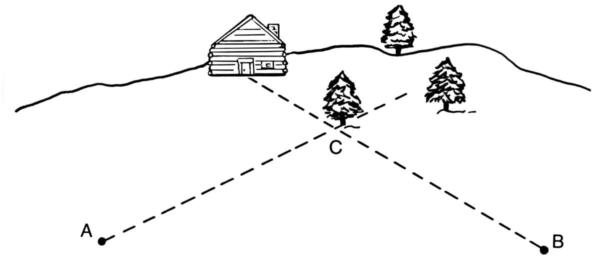
Jedno od Arhimedovih najzanimljivijih otkrića jest dokaz da je broj zrnaca pijeska kojim bi se mogao popuniti svemir konačan i da se može zapisati. Potrebu za dokazivanjem ove tvrdnje Arhimed je uvidio pri susretu s kraljem Gelonom, sinom Hijerona II, koji je tvrdio da je broj zrnaca pijeska na obali grada Sirakuze beskonačan, dok su opet neki drugi tvrdili da je on svakako konačan, ali ga nije moguće zapisati korištenjem grčkog sustava označavanja brojeva. Svoj je rad objasnio u djelu *Pješčanik*.

7.1 Veličina svemira

Većina astronoma u staroj Grčkoj zastupala je geocentričnu kozmologiju prema kojoj se u središtu svemira nalazi Zemlja, a ostala se nebeska tijela, uključujući Sunce, kreću oko Zemlje po kružnim putanjama. U skladu s tim prevladavajućim mišljenjem, svemirom se stoga smatralo područje odnosno kugla čije se središte podudaralo sa središtem Zemlje i čiji je radijus bila dužina koja spaja središte Zemlje i središte Sunca. Tako definiran svemir označit ćemo s U_1, a njegov promjer s d_{U_1}.

Za zvijezde se smatralo da su fiksne te da se također nalaze unutar sfere sa zemljom kao središtem, ali je različito mišljenje gdje se ta sfera smještala (unutar U_1 ili ne). Razlog tomu je taj što je bilo teško odrediti jesu li zvijezde bliže Zemlji od Sunca pošto se Sunce nije smatralo nebeskim tijelom po sastavu i obliku jednakom zvijezdama. Kako nastavak rješavanja početnog problema uvelike ovisi o tome gdje su smještene zvijezde, sferu koja ih obuhvaća nazvat ćemo sferom fiksnih zvijezda i označiti je sa U_2, a njezin promjer sa d_{U_2}. Prema tome, razlikujemo dvije hipoteze o veličini svemira.

Samom Arhimedu nije bilo važno odrediti točnu veličinu svemira već samo da njegova aproksimacija svemira ne bude manja od istinske veličine nebeskog prostranstva; ako postoji mogućnost da je promjer svemira veći od d_{U_1}, on ga je želio uzeti u obzir. Stoga, Arhimed ispravlja početnu definiciju svemira zbog rezultata do kojih je došao zastupnik heliocentričnog sustava, astronom i matematičar, Aristarh sa Samosa (310. - 230. pr. Kr.). Aristarh se potpuno razlikovao od ostalih astronoma toga doba jer je u središte svemira smjestio Sunce, a Zemlju i ostale planete na koncentrične kružnice sa Suncem u središtu. Sferu fiksnih zvijezda smjestio je izvan svemira U_1 i to mnogo dalje nego bi se tada očekivalo, čak je izrazio mogućnost da je svemir, pa time i promjer d_{U_2} sfere U_2 beskonačan. Što je Aristarha navelo na takvo



Slika 14: Primjer paralakse u manjem mjerilu

razmišljanje? Prvo, uz pomoć svojstava pravokutnog trokuta, uspio je izračunati udaljenost Zemlje od Sunca te usporediti veličinu Zemlje, Mjeseca i Sunca. Ostalo mu je samo da isto pokuša učiniti sa zvijezdama. No, tada se pojavio velik problem jer je pri promatranju zvijezda primijetio nedostatak *paralakse*, prividnog pomaka nebeskih tijela opažanih iz dvaju različitih smjerova, koja bi mu otvorila put za izračunavanje položaja zvijezda i njihove udaljenosti od Zemlje. Problem je bio u tome da ako je svemir doista kugla promjera d_{U_1}, a po njegovoj teoriji Zemlja se okreće oko Sunca, kako to da pri mijenjanju položaja Zemlje, zvijezde, koje se nalaze unutar definirane kugle, prividno ne mijenjaju svoj položaj? Drugim riječima u kontekstu paralakse, kako to da se ona ne pojavljuje?

Paralaksu si možemo, u mnogo manjem mjerilu, predočiti uz pomoć Slike 14. Promatrajući bor označen s C iz točke A iza njega vidimo borove, no ako ga promatramo iz točke B vidjet ćemo iza njega kuću. Reći ćemo da se paralaksa pojavila. U slučaju da je udaljenost od A do C i B do C vrlo velika u odnosu na udaljenost kuće i borova, paralaksa se neće dogoditi. Aristarh na sličan način zaključuje da se zvijezde moraju nalaziti vrlo daleko od Zemlje te je koristeći grčki svjetonazor i želju da se sve odvija u pravilnim omjerima pokušao dati omjer pomoću kojeg bi povezao središte svemira, promjer Sunca, promjer d_{U_1} i promjer sfere fiksnih zvijezda d_{U_2}.

Arhimed nije stavljao u pitanje geocentrični sustav te je nedostatak paralakse pri promatranju zvijezda objasnio jednostavnom činjenicom da se Zemlja ne kreće oko Sunca, pa niti ne mijenja svoj položaj koji bi prouzrokovao paralaksu. No, ipak, zbog i najmanje mogućnosti da su Aristarhove tvrdnje o dimenziji svemira istinite morao je za ispravnu definiciju svemira uzeti svemir U_2. Tako je pretpostavio sljedeće: svemir je uistinu veći nego se to smatra i njegov promjer odgovara promjeru sfere fiksnih zvijezda u čijem se središtu nalazi Zemlja. Također vrijedi da je omjer promjera Zemlje (d_Z) i promjera svemira d_{U_1} jednak omjeru promjera svemira d_{U_1} i promjera sfere fiksnih zvijezda d_{U_2}:

$$d_Z : d_{U_1} = d_{U_1} : d_{U_2}.$$

Ova jednakost omjera za Arhimeda predstavlja ishodišnu točku za određivanje veličine svemira. Vidimo da ono što preostaje odrediti jest promjer Zemlje d_Z i udaljenost središta Zemlje od središta Sunca što po definiciji svemira U_1 čini polovicu promjera d_{U_1}.

7.1.1 Zemlja, Mjesec i Sunce u brojevima

Da bi pronašao odnose između Zemlje i Sunca Arhimed je pretpostavio sljedeće:

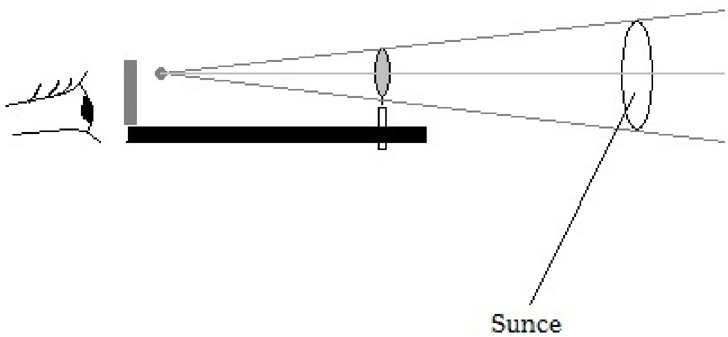
1. Opseg Zemlje je otprilike 3 000 000 stadija i nije veći.
2. Promjer Zemlje je veći od promjera Mjeseca, a promjer Sunca je veći od promjera Zemlje.
3. Promjer Sunca je oko 30 promjera Mjeseca i nije veći.
4. Promjer Sunca je veći od stranice *kiloagona*, mnogokuta sa 1 000 stranica, upisanog u kružnicu svemira U_1.

Prvu pretpostavku Arhimed je donio na osnovu Eratostenove tvrdnje da je opseg Zemlje oko 300 000 stadija. Stadij je grčka mjera za duljinu i iznosila je 600 stopa te ovisno o njoj varirala pretežno između 149 i 217 m. Eratostenov opseg Zemlje Arhimed je dodatno uvećao 10 puta kako njegovi izračuni ne bi bili dovedeni u pitanje. Isti princip primjenjuje još nekoliko puta u svom radu.

Druga pretpostavka slijedila je iz Aristarhovih rezultata i rezultata ostalih astronoma pretežno dobivenih proučavanjem pomrčina.

Treća pretpostavka, uslijedila je prvo iz rezultata Eudoksa koji je tvrdio da je promjer Sunca 9 puta veći, a zatim ga je Fidija, Arhimedov otac, ispravio rekavši da je Sunce 12 puta veće u promjeru. Konačno, Aristarh je koristeći točnije metode smjestio promjer Sunca između 18 i 20 promjera Mjeseca. U svakom slučaju kako ne bi došlo do pogreške Arhimed uzima da je promjer Sunca 30 puta veći od promjera Mjeseca.

Četvrtu pretpostavku, nimalo trivijalnu, Arhimed je sam donio eksperimentalnim mjerenjem. Prvi korak u dokazu te pretpostavke jest izračunavanje kuta kojeg čini promjer Sunca, za što je Arhimed napravio jednu vrlo jednostavnu spravu za koju mu je bilo potrebna jedna duga šipka koja služi kao ravnalo i disk koji se može kretati duž šipke. Arhimed je mjerenje izvodio tik poslije svitanja. Postupak ide ovako: kada se Sunce pojavi na horizontu, šipku treba usmjeriti prema njemu i disk povlačiti duž šipke sve dok se promjer diska ne poklopi sa prividnim promjerom Sunca. Kako bi to izgledalo može se vidjeti na Slici 15.

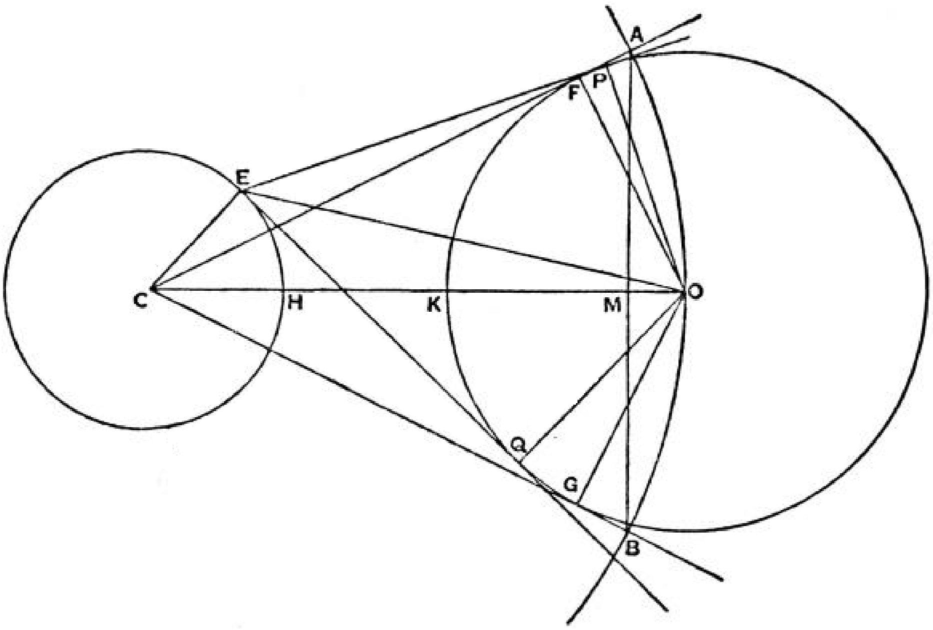


Slika 15: Arhimedova metoda mjerenja kuta kojeg čini promjer Sunca

Svrha sprave postiže se mjerenjem kuta kojeg čini promjer Sunca što se može učiniti pomoću kutomjera, trigonometrijskih svojstava ili na neki drugi način. Kako se vrh kuta nalazi u oku, a ono ne vidi iz jedne točke već iz određenog područja, Arhimed radi postizanja veće točnosti u obzir uzima i širinu ljudske zjenice. Rezultat eksperimenta pokazao je da je kut naspram promjera Sunca manji od $\frac{1}{164}$ i veći od $\frac{1}{200}$ veličine pravog kuta.

Promotrimo sada položaje Zemlje i Sunca. Najprije zamislimo ravninu koja prolazi središtem Zemlje (C), središtem Sunca (O) te okom promatrača (E) koji se nalazi na površini Zemlje. Kako to izgleda prikazano je na Slici 16. Neka dužina $\overline{CO}$ siječe kružnicu Zemlje u točki H te kružnicu Sunca u točki K. Primijetimo da je dužina $\overline{CO}$ radijus svemira U_1.

Nadalje, neka su P i Q točke u kojima tangente povučene iz točke E na kružnicu Sunca diraju tu kružnicu. Kut $\angle PEQ$ je kut koji je Arhimed dobio eksperimentalnim mjerenjem, a dužina $\overline{PQ}$ je promjer Sunca kojeg je uzeo u mjerenje. Primijetimo, to nije pravi promjer Sunca, već je od njega manji. Neka su F i G točke u kojima tangente povučene iz točke C na kružnicu Sunca diraju tu kružnicu, te A i B točke presjeka tih tangenti i kružnice radijusa $\overline{CO}$ sa središtem u C. Prema tome, dužine $\overline{CO}$, $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ jednakih su duljina. Sve ovo daje nam dvije veličine: promjer



Slika 16: Ravnina kroz oko promatrača E, redište Zemlje C i središte Sunca O

Sunca kada ga promatramo sa površine Zemlje i promjer Sunca kada ga gledamo iz središta Zemlje. No, nijedan od tih promjera nije uistinu promjer Sunca, stoga Arhimed uvodi još nekoliko oznaka i dužina.

Neka je s M označena točka presjeka dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CO}$. Iz položaja točaka C, E i O možemo zaključiti kako je $|CO| > |EO|$, a time je i kut $\angle PEQ > \angle FCG$. Ta nam činjenica pomaže povezati luk AB sa stranicom mogućeg upisanog pravilnog mnogokuta (npr. mnogokuta sa 1000 stranica) i središnji kut tog mnogokuta (kut $\angle FCG$). U prvom koraku dokaza pokazano je da za $\angle PEQ$ vrijedi:

$$\frac{R}{200} < \angle PEQ < \frac{R}{164},$$

gdje R predstavlja pravi kut. Zbog toga je i $\angle FCG < \frac{R}{164}$ i tetiva $\overline{AB}$ naspram luka velikog kruga je manja od $\frac{1}{656}$ kružnice tog kruga i stoga je

$$|AB| < \text{stranice upisanog pravilnog mnogokuta sa 656 stranica.}$$

Nadalje, kako je opseg svakog mnogokuta upisanog u krug radijusa $\overline{CO}$ manji od $\frac{44}{7} \cdot |CO|$ (ili $2 \cdot r \cdot \pi$ gdje je $r = |CO|$, a $\frac{22}{7}$ aproksimacija za π), tj. kako vrijedi

$$656 \cdot |AB| < \frac{44}{7} \cdot |CO|,$$

dijeljenjem sa 656 i skraćivanjem slijedi

$$|AB| < \frac{11}{1\,148} \cdot |CO| < \frac{1}{100} \cdot |CO|.$$

Kako je $\overline{CA} = \overline{CO}$ (obje dužine su radijusi velike kružnice) i $\overline{AM}$ okomito na $\overline{CO}$ i $\overline{OF}$ okomito na $\overline{CA}$ (jer točke C, F i A leže na tangenti), trokuti $\triangle CMA$ i $\triangle CFO$ su pravokutni i sukladni (šiljasti kutovi $\angle ACM$ i $\angle FCO$ su sukladni kao i hipotenuze $\overline{CA}$ i $\overline{CO}$) te iz toga slijedi

$$\overline{AM} = \overline{OF}.$$

Iskoristimo li činjenicu da je $|AB| = 2|AM|$ dobivamo kako se $|AB|$ podudara s promjerom Sunca kojeg označimo sa d_S.

Primijetimo da smo iz dosadašnjih rezultata zapravo dobili da je promjer Sunca d_S odozgo omeđen s duljinom stranice pravilnog mnogokuta sa 656 stranica upisanog u krug sa središtem u C i radijusa $\overline{CO}$. Preostalo je pronaći donju granicu za promjer Sunca, za što Arhimed koristi vezu između donje granice kuta $\angle PEQ$ i kuta $\angle ACB$ (tj. $\angle FCG$).

Kako iz $|AB| = d_S$ slijedi

$$d_S < \frac{1}{100} \cdot |CO|,$$

prema drugoj pretpostavci dobivamo

$$d_Z < \frac{1}{100} \cdot |CO|.$$

Sada iz te dvije tvrdnje za zbroj radijusa Zemlje i Sunca vrijedi

$$|CH| + |OK| < \frac{1}{100} \cdot |CO|,$$

pa za $\overline{HK}$ koji je preostali dio dužine $\overline{CO}$ vrijedi

$$|HK| > \frac{99}{100} \cdot |CO|$$

što možemo zapisati i u obliku

$$|CO| : |HK| < 100 : 99.$$

Drugim riječima, ako uspoređujemo promjer Sunca i njegovu udaljenost od Zemlje, ono je gotovo 100 puta manje.

Sada treba pronaći odnose između tangenti povučenih iz točke E i tangenti povučenih iz točke C. U tu svrhu, u prethodnu nejednakost uvrštavamo da je $|CO| > |CF|$ i $|HK| < |EQ|$ čime dobivamo:

$$|CF| : |EQ| < 100 : 99.$$

Primjetimo nadalje kako za katete pravokutnih trokuta $\triangle CFO$ i $\triangle EQO$ vrijedi

$$|OF| = |OQ|$$

te

$$|EQ| < |CF| \text{ (jer je } |EO| < |CO|).$$

Tada za kutove pri vrhovima E i C vrijedi

$$\angle OEQ : \angle OCF < |CF| : |EQ|.$$

Udvostučimo li kutove (omjer se neće promijeniti) i iskoristimo li gornju tvrdnju dobivamo

$$\angle PEQ : \angle ACB < |CF| : |EQ| < 100 : 99.$$

Kako je po hipotezi $\angle PEQ > \frac{R}{200}$ slijedi da je

$$\angle ACB > \frac{99}{20\,000} \cdot R > \frac{1}{203} \cdot R.$$

Iz ovoga, razmišljajući u kontekstu upisanog pravilnog mnogokuta čiji bi središnji kut bio $\frac{R}{203}$ i duljina stranice jednaka $\frac{1}{812}$ opsega zadane kružnice, slijedi da je luk AB veći od $\frac{1}{812}$ kružnice velikog kruga, a time i od $\frac{1}{1\,000}$ te kružnice, iz čega konačno slijedi

$$|AB| > \text{stranice kiloagona upisanog u veliki krug sa središtem u } C \text{ i radijusa } d_{U_1},$$

a kako je $|AB| = d_S$ ovime je četvrta pretpostavka dokazana.

7.1.2 Promjer svemira

Pomoću navedene četiri pretpostavke možemo izračunati traženi promjer svemira d_{U_2}. Još jednom, u nastavku dokaza d_{U_1} predstavlja promjer manjeg svemira, d_S promjer Sunca, d_Z promjer Zemlje i d_M promjer Mjeseca.

Iz druge i treće pretpostavke slijedi

$$d_S \leq 30\ d_M \text{ i } d_Z > d_M$$

iz čega vidimo da je

$$d_S < 30\ d_Z.$$

Prema četvrtoj pretpostavci je

$$d_S > \text{stranica kiloagona upisanog u veliki krug}$$

iz čega množenjem s 1 000 dobivamo

$$\text{opseg kiloagona} < 1\,000\ d_S < 30\,000\ d_Z.$$

Kako je opseg bilo kojeg pravilnog mnogokuta sa više od 6 stranica upisanog u krug veći od opsega tom istom krugu upisanog pravilnog šesterokuta slijedi

$$\text{opseg kiloagona} > 3\ d_{U_1}$$

i iz toga

$$d_{U_1} < 10\,000\ d_Z.$$

Za opseg i promjer Zemlje vrijedi

$$\text{opseg Zemlje} > 3\ d_Z$$

što slijedi iz formule za opseg kugle (jednak je umnošku duljine promjera i broja π koji je strogo veći od 3). Koristeći nadalje prvu pretpostavku prema kojoj opseg Zemlje nije veći od 3 000 000 stadija dobivamo

$$d_Z < 1\,000\,000 \text{ stadija.}$$

Koristeći rezultat $d_{U_1} < 10\,000\ d_Z$ konačno imamo

$$d_{U_1} < 10\,000\,000\,000 \text{ stadija ili } d_{U_1} < 10^{10} \text{ stadija.}$$

Sada još iz pretpostavki

$$d_Z : d_{U_1} = d_{U_1} : d_{U_2}$$

i

$$d_{U_1} < 10\,000\ d_Z$$

slijedi da je

$$d_{U_2} < 10\,000\ d_{U_1} < 10^{14} \text{ stadija.}$$

7.2 Arhimedov sustav označavanja brojeva

Nakon što je odredio veličinu svemira, Arhimedu je preostalo izračunati koliko zrnaca pijeska stane u objekt te veličine. Pri tom, on u obzir uzima vrlo sitan pijesak s kojim je, barem vidljivo, teško računati pa kao početnu jedinicu mjere uzima jedno makovo zrno i pretpostavlja da u njega ne stane više od 10 000 zrnaca pijeska. Zatim makovo zrno uspoređuje sa standardnom mjerom, širinom prsta, tako da pretpostavlja kako promjer makova zrna nije manji od $\frac{1}{40}$ širine prsta.

Analizirajući dalje problem, Arhimed je uvidio da neće daleko dospjeti ukoliko bude koristio tadašnji grčki sustav označavanja brojeva. U čemu je bio problem? Naime, Grci su pri označavanju brojeva koristili 27 slova grčkog alfabeta tako da su postojale posebne oznake za znamenke 1 do 9, za desetice 10 do 90 i za stotice 100 do 900. Najveći broj za koji su Grci imali naziv je mirijada tj. 10 000. Koristeći taj naziv, mogli su izraziti brojeve do mirijade mirijada odnosno do 100 000 000 (100 milijuna ili 10^8). Arhimedu je to bio vrlo malen broj u odnosu na ogroman broj zrnaca pijeska. Stoga on odlučuje u svrhu rješavanja ovoga problema uvesti novo nazivlje brojeva s kojim bi lako mogao zapisati velike brojeve i računati s njima. Radi lakšeg snalaženja predlažem pratiti nazivlje brojeva u Tablici 1.

Arhimed kreće od točke gdje grčki sustav završava, od broja mirijada mirijada ili kako smo već naveli broja 10^8. Nadalje, u svojoj klasifikaciji brojeva koristi pojmove *red* i *period* i u njih raspoređuje sve brojeve. Ukupno postoji 100 000 000 perioda, pri čemu se svaki period sastoji se od 100 000 000 redova, a kad u obzir uzmemo raspon svakog reda konačno dobijemo brojku od

$$100\,000\,000^{100\,000\,000^{100\,000\,000}} \text{ brojeva.}$$

Opisat ćemo način kako je poslagao brojeve u redove i periode. U prvi red smjestio je brojeve od 1 do 100 000 000. Zatim je broj 100 000 000, mirijadu mirijada, proglasio jedinicom drugog reda koji obuhvaća brojeve od te jedince pa do $100\,000\,000^2$. Sada je broj $100\,000\,000^2$ proglasio jedinicom trećeg reda kojim obuhvaća brojeve do $100\,000\,000^3$. Analogno je postupao dalje dok nije dostigao 100 000 000. red koji za posljednji broj ima broj $100\,000\,000^{\,100\,000\,000}$ kojeg je označio slovom P. Brojevi od 1 do P formiraju prvi period.

Neka je sada P jedinica prvog reda drugog perioda. Prvi red ovog novog perioda sastoji se od brojeva od P do $100\,000\,000\ P$. Analogno kao dosad, broj $100\,000\,000\ P$ predstavlja jedinicu drugog reda drugog perioda koji pak završava

Tablica 1: Arhimedov sustav označavanja brojeva

1. Period	Raspon brojeva
1. red	1 do 10^8
2. red	10^8 do 10^{16}
3. red	10^{16} do 10^{24}
$\vdots$	$\vdots$
100 000 000. red	$10^{8(10^8-1)}$ – $10^{8\cdot 10^8}$

2. Period	Raspon brojeva
1. red	$P\cdot 1$ do $P\cdot 10^8$
2. red	$P\cdot 10^8$ do $P\cdot 10^{16}$
$\vdots$	$\vdots$
100 000 000. red	$P\cdot 10^{8(10^8-1)}$ do $P\cdot 10^{8\cdot 10^8}$

100 000 000. Period	Raspon brojeva
1. red	$P^{10^8-1}\cdot 1$ do $P^{10^8-1}\cdot 10^8$
2. red	$P^{10^8-1}\cdot 10^8$ do $P^{10^8-1}\cdot 10^{16}$
$\vdots$	$\vdots$
100 000 000. red	$P^{10^8-1}\cdot 10^{8(10^8-1)}$ do $P^{10^8-1}\cdot 10^{8\cdot 10^8}$ tj. P^{10^8}

brojem $100\,000\,000^2 P$. Ovako možemo ići sve dok ne dosegnemo 100 000 000. red drugog perioda koji završava s $100\,000\,000^{100\,000\,000} P$.

Nastavili bi dalje formirati periode uzimajući uvijek posljednji broj prethodnog perioda za jedinicu prvog reda novog perioda, a zatim posljednji broj tog reda kao jedinicu sljedećeg reda tog perioda. Posljednji 100 000 000. red 100 000 000. perioda završava s $\mathrm{P}^{100\,000\,000}$ i tu staje daljnja izgradnja brojeva.

Ono što zapanjuje kod njegovog sustava označavanja jest veličina brojeva koje je mogao zapisati: za zapisivanje posljednjeg broja prvog perioda bila bi potrebna jedinica i još 800 000 000 znamenaka iza nje dok bi za broj $100\,000\,000^{100\,000\,000^{100\,000\,000}}$ koji je posljednji broj posljednjeg perioda i najveći broj u Arhimedovom sustavu označavanja bilo potrebno 80 000 000 000 000 000 znamenaka. S toliko mnogo znamenaka uspjeli bi, kada bi na svaki milimetar stisnuli 534 znamenke, popločiti udaljenost od Zemlje do Sunca koja iznosi približno 149 600 000 km. Razmišljajući o tom najvećem broju u Arhimedovom sustavu, mogli bismo se zapitati postoji li išta u svemiru čega bi moglo biti u tolikoj mjeri?

7.3 Koliko pijeska stane u svemir?

Dosad smo pretpostavili da u jedno makovo zrno ne stane više od 10 000 zrnaca pijeska. Također, za promjer zrna maka i promjer širine prsta vrijedi omjer

$$1 : \frac{1}{40}.$$

Nije teško zaključiti da je tada omjer njihovih volumena

$$1 : \frac{1}{64\,000},$$

odnosno u kontekstu zrnaca pijeska da u kuglu promjera 1 širine prsta ne stane više od $64\,000 \cdot 10\,000$ ili 640 000 000 zrnaca pijeska. Koristeći Arhimedov sustav rekli bismo da u kuglu promjera jedne širine prsta ne stane više od 6 jedinica drugog reda prvog perioda + 40 000 000 jedinica prvog reda prvog perioda zrnaca pijeska, što možemo ograničiti sa 10 jedinica drugog reda prvog perioda broja zrnaca pijeska.

Tablica 2: Broj zrnaca pijeska u kugli povećavajućeg promjera

Promjer kugle	Odgovarajući broj zrnaca pijeska
100 širina prsta	10^{15} ili $1\,000\,000 \cdot 10$ jedinica drugog reda
1 stadij	10^{21} ili 100 jedinica trećeg reda
100 stadija	10^{27} ili 1 000 jedinica četvrtog reda
10 000 stadija	10^{33} ili 10 jedinica petog reda
1 000 000 stadija	10^{39} ili 10 000 000 jedinica petog reda
100 000 000 stadija	10^{45} ili 100 000 jedinica šestog reda
10 000 000 000 stadija	10^{51} ili 1 000 jedinica sedmog reda
100 000 000 000 000 stadija	10^{63} ili 10 000 000 jedinica osmog reda

Sada postupno, množeći sa 100, povećavamo kuglu promjera 1 širine prsta sve dok ne dosegnemo kuglu promjera svemira U_2. Pri tom pamtimo da pri svakom povećanju kugle broj zrnaca pijeska koji popunjava tu kuglu množimo sa 100^3. Kako nam je promjer svemira izražen u stadijima, uzeti ćemo da duljini od 1 stadija odgovara ne više od 10 000 širina prsta. Također, imamo na umu da za promjer svemira U_1 vrijedi

$$d_{U_1} < 10\,000\,000\,000 \text{ stadija},$$

a za promjer svemira U_2

$$d_{U_2} < 100\,000\,000\,000\,000 \text{ stadija}.$$

Kako se pri računanju pojavljuju potencije broja 10, a kod Arhimeda potencije broja 10^8, primjenjujemo pravilo koje vrijedi za umnožak potencija jednakih baza

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

koje je sam Arhimed koristeći svoj način zapisivanja brojeva dokazao i koristio. U Tablici 2 prikazano je kako se može postupno doći do konačnog broja zrnaca pijeska.

Arhimed je dokazao kako je broj zrnaca pijeska koji bi bio sadržan u kugli promjera d_{U_2} manji od 10 000 000 jedinica osmog reda prvog perioda brojeva ili, prema našim današnjim oznakama, manji od 10^{63} što raspisano izgleda ovako:

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Ovime je Arhimed također pokazao da je broj zrnaca pijeska u svemiru konačan i da ga je koristeći novouvedene oznake moguće zapisati.

Zaključak

Već čitajući ovdje opisane glavne Arhimedove rezultate - otkriće površine kruga, aproksimacije broja π, površine odsječka parabole, volumena i oplošja kugle, težišta trokuta, čitatelj može biti u mogućnosti opravdati ubrajanje Arhimeda, uz Gaussa i Newtona, među tri najveća matematičara. Način pristupanja svim problemima, bilo matematičkim, bilo fizikalnim ili čak astronomskim, jednostavnost i inovativnost rješenja tih problema, raznolikost tema kojima se bavio, brojnost radova, propozicija i njihovih dokaza, sve to svjedoči o njegovoj veličini, a u svemu tome posebno njegov doticaj s infinitezimalnim računom tisuću godina prije nego se on počeo uistinu razvijati. Korištenjem mehaničke metode u svrhu dokazivanja matematičkih tvrdnji te dokazivanjem broja zrnaca pijeska koji bi ispunio svemir, uspio je na originalan način povezati matematički svijet sa stvarnim. Daljnjim generacijama ostavio je kao izazov odgonetnuti da li je on mogao sam riješiti problem bikova i krava u stadu boga sunca, problem koji je obogatio teoriju brojeva, ali i doveo do maksimalnog opterećenja mnoga napredna računala.

Literatura

[1] ARCHIMEDES, *The Sand Reckoner*, Electronic version by Datum, 2010., http://4dlab.info/archimedessandreckoner.pdf

[2] F. M. BRÜCKLER, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[3] D. BURTON, *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw Hill Higher Education; 7th International edition, 2010.

[4] B. CASSELMAN, *Archimedes on the Circumference and Area of a Circle*, Monthly essays on mathematical topics, dostupno na http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-02

[5] H. HASAN, *Archimedes: The father of mathematics*, Rosen Publishing Group, New York, 2006.

[6] T. L. HEATH, *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.

[7] *Encyclopædia Britannica*, http://www.britannica.com/biography/Archimedes

[8] *Famoust scientist* , http://www.famousscientists.org/how-archimedes-invented-the-beast-number/

[9] *Kyle Archer's home* , https://sites.google.com/site/kylearchershome/from-grains-of-sand-to-rabbits-and-rabbits-to-the-heavens/archimedes--the-grains-of-sand

Sažetak

Zajednička je crta mnogih matematičara starog vijeka svestranost i sposobnost s malo tada dostupne algebre i matematičkog jezika otkriti i dokazati čitavo mnoštvo matematičkih tvrdnji. Jedan koji je među njima ostavio poseban utisak je Arhimed iz Sirakuze, najveći genij antičkog svijeta. Svoje je sposobnosti pokazao u matematici, fizici, astronomiji te posebno u obrani svoga grada konstrukcijom raznih ratnih sprava. U ovom radu napravljen je pregled Arhimedovih glavnih matematičkih rezultata; otkriće površine kruga i s njim vezane aproksimacije broja π, površine odsječka parabole, volumena i oplošja kugle, težišta trokuta i sustava za zapisivanje velikih brojeva. Poseban naglasak stavljen je na njegove metode dokazivanja. Uz navedene geometrijske rezultate, opisan je i *Problem stoke*, važan problem iz teorije brojeva, te *Račun o pješčanim zrncima* u kojem je prikazano kako je Arhimed uz pomoć svog sustava za zapisivanje brojeva izračunao koliko pijeska stane u svemir.

Summary

A common trait of many mathematicians of ancient world is versatility and ability to detect and prove plenty of mathematical statements within that time available algebra and mathematical language. One who among them left special impression was Archimedes of Syracuse, the greatest genius of the ancient world. He demonstrated his abilities in mathematics, physics, astronomy, and especially in the defense of his home city with the construction of various war machines. This work contains an overview of Archimedes major mathematical results; finding the surface of a circle and approximations of number π, the surface segment of the parabola, volume and surface area of a sphere, the center of gravity of a triangle and system for expressing large numbers. Particular emphasis was placed on his discovery methods. Along with these geometric results, *The Cattle Problem* was described, an important problem in number theory, and *The Sand Reckoner* where Archimedes has shown as, with the help of his system for expressing large numbers, how much sand is required to fill the universe.

Životopis

Zovem se Ivana Umiljanović i rođena sam 12. prosinca 1990. godine u Našicama. Pohađala sam Osnovnu školu Dore Pejačević u Našicama, a nakon završetka osnovne škole upisala sam Srednju školu Isidora Kršnjavog u Našicama, smjer opća gimnazija. Godine 2009. upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.