Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antun Vidić

Matematičari starog vijeka

Diplomski rad

Osijek, 2013.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antun Vidić

Matematičari starog vijeka

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Antoaneta Klobučar

Osijek, 2013.

Sadržaj

Uvod

Matematika se počela razvijati još u doba starog Egipta. Mnogi Grci su putovali u Egipat da bi unaprijedili svoje znanje u mnogim znanostima, pa tako i u matematici. Matematičari stare Grčke su postavili osnove geometrije, matematičkog dokazivanja, primjenjene matematike, matematičke analize, teorije brojeva, a pomalo su se približili integralnom računu. U ovom radu ćemo se upoznati s četiri najpoznatija matematičara starog vijeka čija se otkrića i danas izučavaju u školama. To su Tales, Pitagora, Euklid i Arhimed.

U prvom djelu ćemo reći nešto o Talesu iz Mileta, kojeg se s pravom može zvati i prvim filozofom i prvim matematičarem. Nakon što saznamo nešto ukratko o njegovom životu i dostignućima izvan matematike, proučit ćemo neke od njegovih velikih matematičkih doprinosa. Ispričat ćemo legendu o tome kako je Tales došao do ideje da izračuna visinu piramide. Nadalje ćemo spomeniti teoreme koji su njemu pripisani. Za kraj nam ostaje Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice i njegov dokaz, koji se još i dan danas uči i koristi u osnovnim i srednjim školama.

U drugom poglavlju reći ćemo nešto više o jednom od Talesovih sljedbenika, Pitagori. Nakon njegove biografije i upoznavanja s Pitagorejskom školom, sažet ćemo dostignuća Pitagorejske škole u šest točaka. Zatim ćemo reći nešto o matematičkim dostignućima te škole. Matematička dostignuća smo podijelili na dva dijela. Prvo ćemo se upoznati sa pitagorejskom geometrijom, te vjerojatno najpoznatijim teoremom danas, Pitagorinim teoremom. Uz iskaz, među više od sto dokaza odabran je po jedan od jednostavnijih dokaza iz svake skupine dokaza. Za kraj ćemo reći nešto o pitagorejskoj aritmetici. Stari Pitagorejci su još poznavali figurativne brojeve, pa ćemo dati opis nekoliko figurativnih brojeva. Za kraj smo ostavili teorem o pitagorejskim trojkama kojeg možemo naći u Euklidovim *"Elementima"*.

Treće poglavlje nam donosi priču o Euklidu. Euklid, kao otac geometrije je postavio temelje geometriji danas. U 13 svezaka izdao je svoje djelo *"Elementi"* koje se čak do 19 stoljeća koristilo kao udžbenik iz geometrije. O velikoj važnosti Euklidovih elemenata, govori podatak da je to najizdavanija i najprevođenija knjiga u povijesti čovječanstva iza *"Biblije"*. Podpoglavlje Euklidovi *"Elementi"* donosi definicije, postulate i aksiome iz prve knjige, na kojima je bazirano dvanaest ostalih knjiga, ali i većina geometrije danas. Osim *"Elemenata"*, u radu, kao matematičko postignuće, opisan je Euklidov algoritam za računanje najveće zajedničke mjere dvaju brojeva.

Arhimed je posljednji od četvorice velikih grčkih matematičara te je njemu posvećeno zadnje poglavlje. Nakon kratke biografije i nekoliko zanimljivosti, saznajemo nešto o odabranim Arhimedovim postignućima, kao što su Arhimedov valjak i Arhimedov zakon poluge.

Poglavlje 1

Tales iz Mileta

"Najbrži je um, jer on trči svuda."
Tales

Tales iz Mileta je jedan od sedam mudraca Stare Grčke koji se smatra prvim zapadnjačkim filozofom i ocem znanosti. Iako se o njegovom životu malo zna, jednoglasno mu se pripisuje uvođenje matematike i astronomije u Grčku. Bio je prvi koji je koristio geometriju da bi riješio probleme, kao što je npr. izračunavanje visine piramide i udaljenosti brodova od obale. Tales je prvi matematičar koji je u matematiku uveo apstraktno mišljenje i dokaz, te prvi koji je deduktivnim razmišljanjem primjenjenim u geometriji došao do svog poznatog Talesovog teorema.

1.1 Ukratko o Talesovom životu

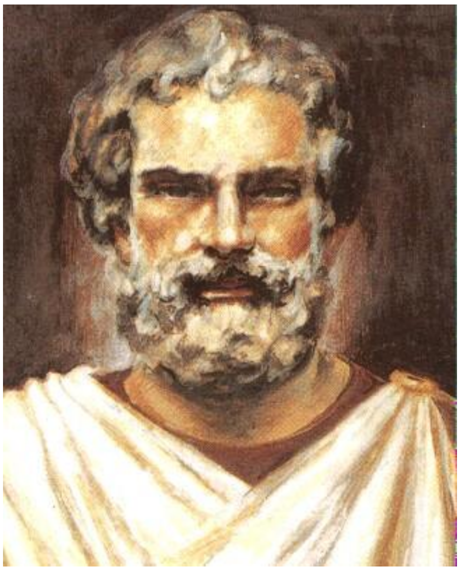
Rođen je u gradu Miletu (današnja Turska). Za godinu Talesovog rođenja postoji više izvora. Apolodor u svom djelu *"Kronologija"* piše da je Tales rođen prve godine 35. olimpijade, a to je 640. g. pr. Kr. Tales je umro sa 78 godina za vrijeme 58. olimpijade, 547. g. pr. Kr.

O Talesu postoje mnoge anegdote. Tako se priča da je majci kad ga je, dok je bio mlad, nagovarala da se oženi, odgovorao je: *"Nije mi još vrijeme."*, a kad je ostario: *"Majko, nije mi više vrijeme."*.

Tales nije bio samo dubok mislilac, nego vješt i sposoban čovjek, kako u javnim, tako i u privatnim poslovim. To nam potvrđuju sljedeće anegdote:

Mlin za masline

Aristotel u svojoj *"Politici"* piše:
"Jer kad su mu prigovorili zbog njegova siromaštva kako je filozofija beskorisna, on je – kažu – doznavši na temelju zvjezdarstva da će te godine biti dobar urod maslina, već zimi s ono malo novaca što je imao veoma povoljno zakupio sve tijeskove za ulje u Miletu i na Hiju, jer nitko nije više novaca nudio. Kad je zatim pravo vrijeme došlo, i nenadano su se i istodobno tražili mnogi tijeskovi, iznajmljivao ih je po koliko je on



Slika 1.1: Tales

htio, pa je, zaradivši mnoge novce, pokazao kako je filozofima lako obogatiti se, kad to ushtjednu, ali to nije ono oko čega oni nastoje. Govori se dakle kako je na taj način Tales dokazao svoju mudrost."

Aristotel u svom djelu objašnjava kako je Tales to napravio, ne da bi se obogatio, već da bi dokazao svojim sugrađanima kako je, suprotno njihovom mišljenju, filozofija korisna.

Pad u bunar

Diogen Laertije i Platon opisuju sljedeću zgodu:
Jedne noći, Tales je tako zadubljen motrio zvijezde, da nije gledao kuda hoda te je pao u bunar. Zvao je u pomoć, na što mu je jedna duhovita starica odgovorila: "E, Talese, ti nisi kadar vidjeti što ti je pred nogama, a htio bi spoznati što je na nebu!"

1.1.1 Talesova dostignuća u filozofiji i astronomiji

Tales je postavio središnji problem filozofa Miletske škole, a to je: što je prapočelo svijeta, iz čega sve proizlazi i u što se sve vraća? Pri traženju odgovora, Tales je svoje stavove pokušao objasniti logičkim razmišljanjem, a ne nadnaravnim pojavama kao mnogi prije njega. Vjerovao je da je točan odgovor voda! Voda je temeljno načelo i izvor svega. Ona je beskonačna, vječna materija koja se kreće, zgušnjava i razrjeđuje te tako nastaju sve pojave u svemiru. On je mislio da Zemlja ima oblik diska koji pluta na "beskonačnom oceanu". Tvrdio je da su potresi posljedice činjenice što se Zemlja nalazi na vodi. Unatoč ovim danas neprihvatljivim tezama, Talesova veličina je u tome što je bio prvi koji je uklonio mit i koji je svoja razmišljanja pokušao logički objasniti pa je zato zaslužio epitet prvog filozofa.

Što se tiče astronomije, zabilježeno je da je Tales predvidio pomrčinu Sunca 585 g. pr. Kr.. Iako se u to doba mogla predvidjeti pomrčina Mjeseca, nije poznato kako je Tales predvidio pomrčinu Sunca jer se ta pojava nije mogla vidjeti sa svih dijelova na Zemlji. Pretpostavlja se da je Tales došao do svog velikog otkrića proučavanjem babilonske astronomije, ali i uz malo sreće. Danas je dokazano da se pomrčina Sunca zbilja dogodila 28. svibnja 585 g. pr. Kr. Smatra se da je Tales "otkrio" Malog medvjeda. Zapravo je Tales prepoznao prednosti plovidbe prema Malom medvjedu, a ne prema Velikom medvjedu, kako su se do tada Grci orijentirali. Mali medvjed se sastoji od 6 zvijezda i ima manju orbitu od Velikog medvjeda, što znači da dok kruži oko Sjevernog pola, Mali medvjed svoju poziciju na nebu mijenja za manje stupnjeva nego Veliki medvjed. Tales je ovaj svoj razborit savjet ponudio pomorcima u Miletu, kojima je to bilo od velike pomoći pošto se u Miletu razvila pomorska trgovina gospodraske važnosti. Talesu još dugujemo godišnja doba. Poznavanje duljine godine stekao je od Egipćana. Naravno da Tales nije "otkrio" godišnja doba nego je godinu podijelio na četiri godišnja doba tako što je identificirao odnos između solsticija, mijenjanje položaja Sunca na nebu, te to povezao sa sezonskim klimatskim promjenama.

1.2 Matematički doprinosi

Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Prvi je koji je točno izračunao visinu piramide. Znao je izračunati udaljenost broda od obale. Da bi to izračunao, Tales je morao razumjeti svojstva sličnih trokuta i pravokutnih trokuta. Postoji legenda o tome kako je Tales izračunao visinu piramide. Legenda nam daje uvid u Talesovu novu geometriju u primjeni i omogućuje nam da ju usporedimo sa starom egipatskom geometrijom.

1.2.1 Kolika je visina piramide?

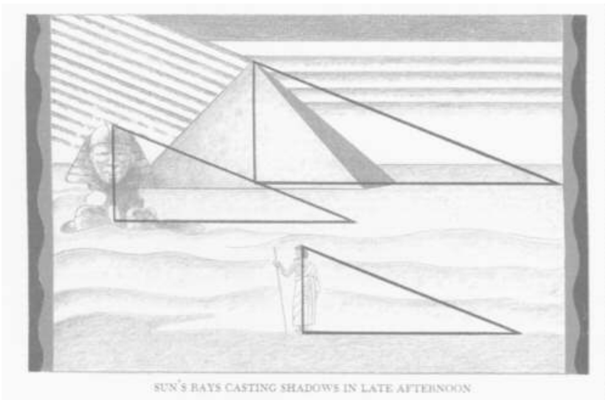
Kada je Tales bio u Egiptu, odlučio se na izlet do Gize da bi vidio tri piramide i Sfingu do pola ukopanu u pijesku u blizini. Tada su piramide bile već 2000 godina stare. Angažirao je vodiče i poveo sa sobom grčkog prijatelja. Tales se dugo divio najvećoj od grobnica, Velikoj Keopsovoj piramidi koja je prekrivala površinu od skoro 5.3 hektara. Gledao je veliki nagib piramide i kako piramida raste do vrha koji siječe čisto egipatsko nebo. Primjetio je kako prekrasna Sunčeva svjetlost udara točno na jednu stranu piramide i crta oštru sjenu na pustinjski pijesak. Tada je postavio svoje poznato pitanje:

"*Kolika je visina piramide*?"

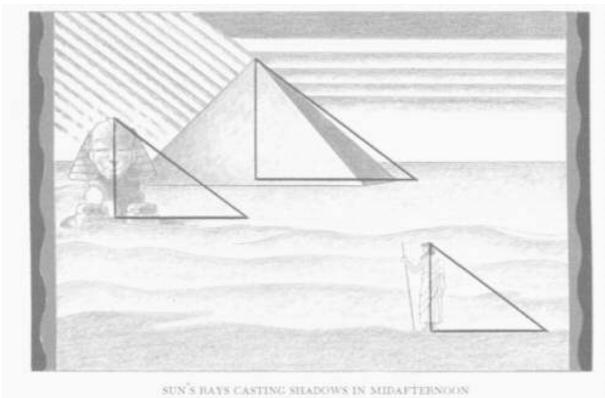
Zapanjeni vodiči zapali su u podužu raspravu. Nijedan od posjetitelja ih nikad nije pitao to. Uvijek su bili zadovoljni s dimenzijama baze piramide, 252 koraka sa svake strane. Nekada turisti u Gizi to nisu vjerovali, pa su sami brojali korake duž stranica kvadrata, odnosno baze Keopsove piramide. Ali ovaj je htio znati nešto drugo: visinu piramide! A to nitko nije znao. Možda nekad davno graditelji, ali to se do tadašnje dinastije zaboravilo. I naravno, nije se znalo kako izmjeriti visinu piramide. Dok su vodiči i dalje raspravljali, Tales i njegov prijatelj su šetali u sjeni piramide gdje je bio hlad. Odjednom je Tales viknuo:

"Zaboravite što sam pitao! Znam odgovor. Visina piramide je 160 koraka!"

Prestrašeni, vodiči su se bacili na koljena pred Talesom, uvjereni da je on nekakav čarobnjak. Naravno, tu nije bilo nikakve magije, nego je Tales do odgovara došao jednostavno mjereći dvije sjene na pijesku i koristeći *apstraktno pravilo* njegove nove geometrije.
Gdje su ostali vidjeli samo čovjeka i strukture i njihove sjene, Tales je vidio apstraktne pravokutne trokute!



Slika 1.2: Predvečer



Slika 1.3: Poslijepodne

U svakom trenutku, svi apstraktni trokuti su istog oblika, ali ne i veličine. Pravi kutevi i visine objekata ostali su nepromijenjeni, ali su se druge dvije stranice i druga dva kuta mijenjala ovisno o kretanju Sunca po nebu. Tales je znao da ga oči nisu prevarile. Duljina sjena će se uvijek mijenjati zajedno na isti način, dok će visina objekta ostati nepromijenjena. U sljedećem primjeru koristit ćemo jednake omjere između visine objekta i njegove sjene, te visine čovjeka i njegove sjene.

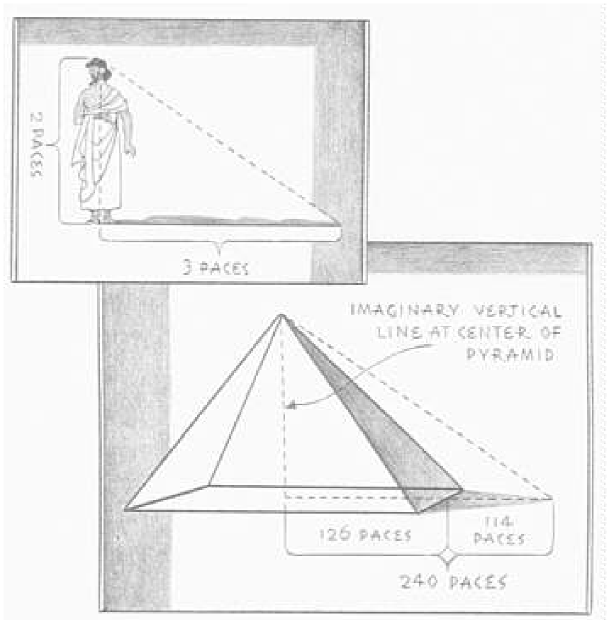
Primjer 1.2.1 *Neka je visina objekta V naprema sjeni objekta S isto kao i visina čovjeka v naprema sjeni čovjeka s:*

$$\frac{V}{S} = \frac{v}{s}.$$

Visinu objekta V ćemo dobiti tako da cijelu jednadžbu pomnožimo sa sjenom objekta S:

$$V = S \cdot \frac{v}{s}$$

Na ovaj način je i Tales došao do visine piramide. Prisjetimo se; nakon što je upitao vodiče kolika je visina piramide, oni su se počeli prepirati međusobno. U međuvremenu je Tales, koji je već znao da duljina svake stranice piramide iznosi 252 koraka, bio zauset brojanjem koraka da bi odredio duljinu piramidine sjene. Izbrojao je 114 koraka. Tales je znao svoju vlastitu visinu - 2 koraka. Još je njegov prijatelj izmjerio duljinu Talesove sjene - 3 koraka. Tako je Tales imao sve potrebne dimenzije, tri strane proporcije dat



Slika 1.4: Proporcija

će mu nepoznatu četvrtu, odnosno visinu piramide. Dakle, Tales je koristio apstraktni pravokutni trokut. Zamislio je visinu Velike piramide kao imaginarnu dužinu od njenog vrha do točke centra baze. Ta imaginarna dužina bi imala imaginarnu sjenu, sve odakle je stajala u centru piramide do kraja piramidine stvarne sjene. Tako duljina imaginarne dužine iznosi jednu polovinu duljine baze plus stvarna projekcija sjene. Stoga slijedi:

Primjer 1.2.2 *Neka je V_1 visina piramide odnosno imaginarne dužine, S_1 je sjena imaginarne dužine, B baza, a v_T je Talesova visina, a s_T duljina Talesove sjene.*

$$V_1 = S_1 \cdot \frac{v_T}{s_T}$$

$$V_1 = (\frac{1}{2}B + S) \cdot \frac{v_T}{s_T}$$

$$V_1 = (126\ \ koraka + 114\ \ koraka) \cdot \frac{2\ \ koraka}{3\ \ koraka}$$

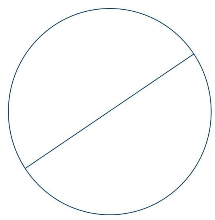
$$V_1 = 240 \cdot \frac{2}{3}$$
$$V_1 = 160 \;\; koraka$$

Naravno, vodiči su odmah raširili ovo Talesovo magično otkriće rješenja problema koji se tada činio nerješivim. Nakon što su se svećenici Tota uvjerili da duljina Velike piramide je 160 koraka, Tales je postao poznat diljem tadašnjeg svijeta. A priča je toliko "putovala" da je poznata i danas, nakon 2500 godina.

1.2.2 Teoremi

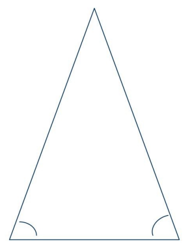
Talesu se pripisuje sljedećih pet teorema iz elementarne geometrije koji i mi danas učimo u školama. Iako su te teoreme sigurno znali još i Egipćani i Babilonci, Tales je bio prvi koji je ove teoreme i neformalno dokazao. On je svoje propozicije dokazivao "induktivno", ponavljajući pokuse pokazao je da su njegove propozicije točne i smatrao je opravdanima da se rezultati takvih eksperimenata prihvate kao dokazi.

1. Svaki promjer raspolavlja krug.



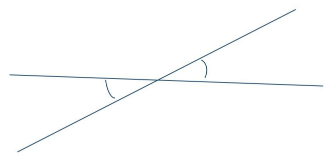
Slika 1.5: Teorem 1

2. Kutevi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.



Slika 1.6: Teorem 2

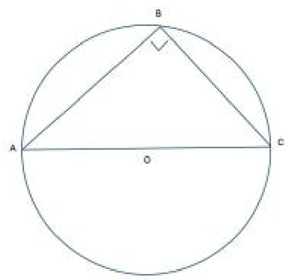
3. Vršni kutevi su jednaki.



Slika 1.7: Teorem 3

4. K-S-K teorem o sukladnosti trokuta: dva su trokuta sukladna ako imaju jednu jednako dugu stranicu i jednake njoj priležeće kuteve.

5. **Talesov teorem**: Kut nad promjerom kruga je pravi kut.



Slika 1.8: Teorem 5

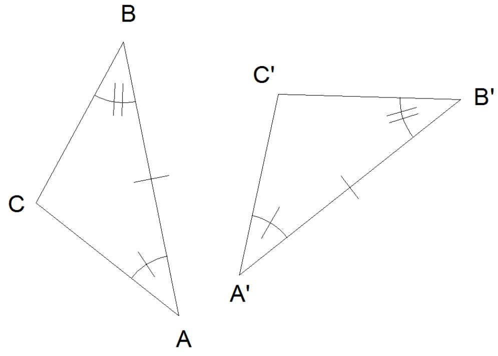
Prva četiri teorema Talesu pripisuje Proklos, a peti mu se pripisuje na osnovi odjeljka u knjizi Diogena Laertija. Valja napomenuti da u opisu drugog teorema Proklos koristi riječ značenja više "sličan" nego "jednak" i vjerojatno je da Tales nije imao načina za mjeriti kuteve.

Današnji iskaz Talesovog četvrtog teorema i dokaz glase:

Teorem 1.2.1 (K-S-K teorem o sukladnosti) *Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

Dokaz.
Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trokuta tako da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ i $\angle ABC = \angle A'B'C'$.
Sada $\angle C'A'B'$ nanesimo na $\angle CAB$ s vrhom u A, krakom $A'B'$ na AB i krakom $A'C'$ na AC. Tada će B' pasti u B. Dalje, $\angle A'B'C'$ nanesimo na $\angle ABC$ s vrhom u B, krakom $A'B'$ na AB i krakom $B'C'$ na BC. Tada će sjecište polupravaca $A'C'$ i $B'C'$ pasti u sjecište polupravaca AC i BC, tj. C' će pasti u C.

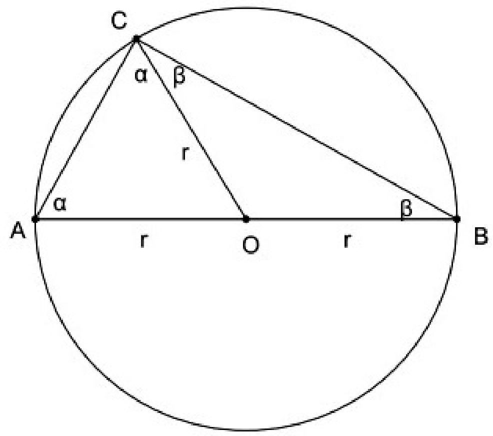
■



Slika 1.9: K-S-K teorem o sukladnosti

Tales je zadnji teorem dokazao pomoću sljedeće matematičke tvrdnje: Četverokut kojemu su dijagonale jednake duljine i koje se raspolavljaju nužno je pravokutnik. Dokazivanjem jedne matematičke tvrdnje drugom tvrdnjom, Tales je zapravo na pragu deduktivne metode u matematici. Ali njegov dokaz nije logički strog, jer pomoćna tvrdnja nije dokazana.
Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice i njegov dokaz (kako učimo danas) glase:

Teorem 1.2.2 *Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, tada je $\angle ACB$ pravi.*



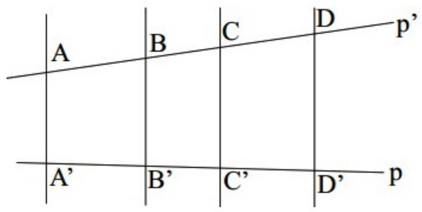
Dokaz.
Neka je O središte kružnice promjera $\overline{AB}$. Neka je $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$. Kako je ΔAOC jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$, to je $\angle ACO = \alpha$, a kako je ΔBOC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, to je $\angle BCO = \beta$. Slijedi $\gamma = \angle ACB = \angle ACO + \angle OCB = \alpha + \beta$. Konačno, iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ slijedi $2\gamma = 180°$ i konačno $\gamma = 90°$.

■

Iskažimo sada Talesov teorem o proporcionalnosti:

Teorem 1.2.3 *Ako su točke A, B, C, D na pravcu p', a točke A', B', C', D' na pravcu p dobivene paralelnom projekcijom, onda će se odgovarajući omjeri duljina sačuvati, tj.*

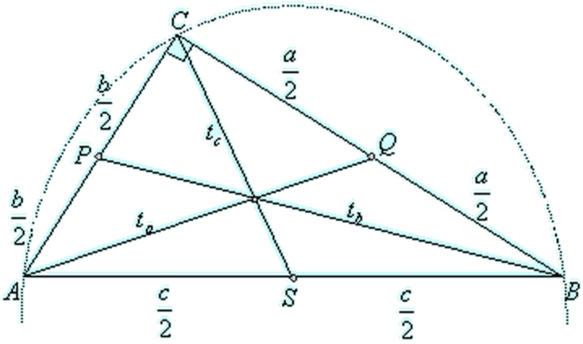
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}, \qquad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|}.$$



Poglavlje o Talesu ćemo zaokružiti kroz dva riješena primjera u kojima se koriste Talesovi teoremi.

Primjer 1.2.3 *U pravokutnom trokutu duljina težišnice povučene iz vrha pravog kuta iznosi 2. Koliki je zbroj kvadrata duljina preostalih dviju težišnica?*

Rješenje.



Težišnice trokuta raspolavljaju stranice.
Iz pravokutnog trokuta AQC imamo:

$$t_a{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2,$$

a iz pravokutnog trokuta BCP:

$$t_b{}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2.$$

Zbrojimo li ove težišnice dobijemo:

$$t_a{}^2 + t_b{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + b^2$$

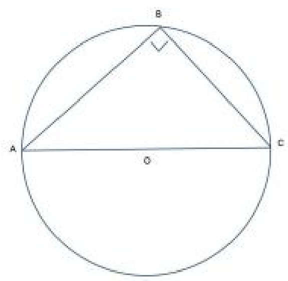
$$= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)+a^2+b^2$$
$$= \frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)$$
$$= \frac{5}{4}c^2.$$

Točka S je polovište hipotenuze, pa prema Talesovom teoremu slijedi da je ona i središte opisane kružnice trokuta ABC. Prema tome su $\frac{c}{2}$ i t_c polumjeri kružnice, što znači da je $c = 2t_c$. Rješenje je:

$$t_a{}^2 + t_b{}^2 = \frac{5}{4}(2t_c)^2 = 5t_c{}^2 = 20.$$

Primjer 1.2.4 *U kružnicu polumjera* 1.25 *cm upisan je pravokutni trokut površine* 1.25 cm^2. *Koliki je zbroj duljina kateta trokuta?*

Rješenje.
Koristimo Talesov teorem o pravom kutu nad promjerom kružnice. Vrijedi:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4P,$$

gdje je P povšina pravokutnog trokuta.
Kada korjenujemo ovaj izraz, dobijemo točno rješenje:

$$a+b=\sqrt{c^2+4P}=2\sqrt{r^2+P}=2\sqrt{\left(\frac{25}{16}+\frac{5}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{5}}{2}cm.$$

Najvažnije što mu matematičari pripisuju, jest činjenica da je Tales prvi dao logičke temelje dokazivanju teorema. Drugim riječima, Tales je prvi naglasio da nije dovoljno samo opažati pojave, već ih i dokazati. On je izrekao mnoge tvrdnje, koje je i dokazao, a njegova metoda rješavanja i postavljanja problema bila je revolucionarna za ono vrijeme. Ti matematički počeci dokazivanja su Talesovo nasljeđe, jer se on nadao da će ga mnogi matematičari slijediti i nadograđivati njegove teorije. Jedan od tih matematičara bio je i Pitagora, možda najpoznatije ime danas iz stare grčke matematike.

Poglavlje 2

Pitagora iz Samosa

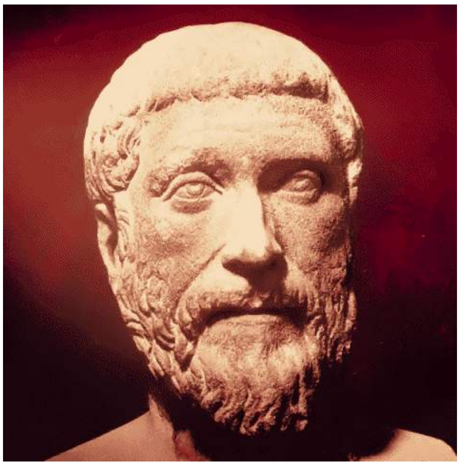
"Ne može se reći onoliko mudrosti, koliko se može prešutjeti gluposti."
Pitagora

Pitagora iz Samosa se često opisuje kao prvi "pravi" matematičar i premda znamo relativno malo o njegovim matematičkim postignućima smatra se važnom ličnošću u povijesti razvoja matematike. Za razliku od mnogih kasnijih grčkih matematičara, za koje imamo neke od knjiga koje su napisali, od Pitagorinih tekstova danas nemamo ništa sačuvano. Društvo koje je osnovao i vodio bilo je naučnog, ali i religioznog karaktera. Rad im je bio obavijen velom tajanstvenosti što nam govori da je i sam Pitagora bio misteriozna ličnost. Ipak, neke detalje iz Pitagorinog života znamo zahvaljujući njegovim ranim biografijama koje se oslanjaju na važne originalne izvore i koje svjedoče o Pitagori kao božanskoj osobi. Neki povjesničari ove podatke smatraju samo zanimljivim legendama, ali ono što je sigurno jest činjenica da su ove biografije zaista vrlo stare.

2.1 Ukratko o Pitagorinom životu

Pitagora je rođen oko 582. pr. Kr. na grčkom otoku Samosu, kao sin bogatog trgovca. Kao dijete, Pitagora je svoje rane godine proveo u Samosu, ali je i često putovao s ocem. Na tim se putovanjima mladi Pitagora susreo s mnogim učiteljima i misliocima iz onog vremena koji su ga poučavali filozofiji i znanosti. Jedan od tih učitelja bio je i Tales. Kaže se da je Pitagora posjetio Talesa u Miletu kada mu je bilo između 18 i 20 godina. U to je vrijeme Tales bio star čovjek i njegova su otkrića utjecala da se Pitagora još više zainteresira za matematiku i astronomiju, te je savjetovao Pitagoru da otputuje u Egipat gdje će još više naučiti o područjima koja ga zanimaju.

Otprilike 535. pr. Kr. Pitagora je otputovao u Egipat. Tamo je sudjelovao u mnogim filozofskim raspravama sa svećenicima i učenjacima. Nakon ritualne svečanosti, i sam Pitagora je postao hramski svećenik u Diospolisu. Ideje koje će kasnije propovijedati na svojoj školi u Italiji zasigurno imaju korijene u egipatskim hramovima, npr., tajnovitost egipatskog svećenstva, njihovo odbijanje jedenja boba, odbijanje oblačenja



Slika 2.1: Pitagora

odjeće koja se dobiva od kože životinja, njihov zavjet čistoće itd... Sve je to utjecalo kasnije na rituale, strogost i tajnovitost Pitagorejske škole.

Nakon 10 godina boravka u Egiptu, proveo je 5 godina zarobljeništva u Babilonu. Nakon toga vraća se na Samos. Na Samosu osniva školu, pod nazivom "Polukrug", koja je i stoljećima kasnije mještanima otoka služila kao okupljalište mislioca. Međutim, zbog metoda, strogosti i načina mišljenja koje su bile vrlo slične onima koje je naučio u Egiptu, stanovnici sa Samosa, naučeni na drugačiji način mišljenja, nisu bili zadovoljni Pitagorinim poučavanjem. Zato je otplovio u južnu Italiju, u grad Krotonu (današnja Crotona) gdje je stekao mnoge sljedbenike. Ustanovio je matematičku školu u kojoj su učenici obdržavali stroga pravila družbe. Školu danas nazivamo **Pitagorejskom školom**, a njegove sljedbenike **Pitagorejcima**. Društvo se sastojalo od dva kruga: *unutrašnji krug* činili su učitelji i matematičari, a *vanjski* učenici. Članovi unutranjeg kruga, među kojima je bio i sam Pitagora, nisu imali privatnog vlasništva, morali su biti vegetarijanci i živjeti u zajednici. Članovi vanjskog kruga nisu morali biti vegetarijanci, mogli su imati privatno vlasništvo i stanovali su u vlastitim kućama. I muškarci i žene su mogli postati članovi Društva, nekoliko sljedbenica Pitagorejki kasnije su postale poznati filozofi. Naime, *"Pitagorijska dijeta"* je bilo zajedničko ime za apstinenciju od ribe i mesa, sve do rađanja pravog vegetarijanstva u devetnaestom stoljeću. Obrok u kojem su preskakali meso, koji je ionako bio jedini u kojem su ga imali priliku jesti, najčešće je bio poslijepodne.

Pitagora je, međutim, prije svega bio filozof. U skladu s njegovim vjerovanjima o brojevima, geometriji i astronomiji, imao je filozofske nazore da je cijeli svijet sastavljen od suprotnosti, tj. suprotnih parova; zatim da su sve postojeće stvari sastavljene od oblika, a ne od materijalne tvari, a da je duša broj koji se samostalno pokreće i reinkarnira dok ne dođe do potpunog očišćenja (do kojeg se dolazi kroz intelektualne i obredne vježbe strogih Pitagorejaca). Što se moralnog života Pitagorejaca tiče, i tu su imali svoja pravila. Pitagora je, naime, njegovao i promicao prijateljstvo, nesebičnost i iskrenost.

Ne zna se točan datum i okolnosti Pitagorine smrti. Legenda kaže da je Pitagorejsku školu napao zao i okrutan grof iz Krotona koji je želio ući među Pitagorejce, ali mu je zahtjev odbijen zbog njegove zle naravi te da su Pitagorejci morali potražiti utočište u bijegu. Pitagora je također pobjegao iz Krotona u Metapontium i mnogi autori se slažu da je vjerojatno tamo i umro. Neki čak sumnjaju u samoubojstvo iz očaja jer je napadnuto njegovo Bratstvo. I nakon Pitagorine smrti Pitagorejska škola je još dugo bila na okupu. Nakon 500. god. pr. Kr. škola se sve manje bavila znanošću, a sve više politikom i zato se uskoro rascjepkala na grupice. Godine 460. pr. Kr. škola je naprasno zatvorena, a za Pitagorejcima je ostao do danas bogat plod njihovog izučavanja astronomije, aritmetike i geometrije.

2.1.1 Pitagorejska škola

U Pitagorejskoj školi naglasak je bio na tajnosti i zajedništvu, tako da je danas teško odgonetnuti što je rad samog Pitagore, a što njegovih učenika. Ono što je sigurno, je da je njegova škola dala velik doprinos matematici. No, Pitagorejci nisu radili matematiku u atmosferi kakvu mi danas imamo u školama i na fakultetima. Nije bilo zadataka koje bi trebalo riješiti, nije bilo otvorenih problema s kojima bi se trebalo uhvatiti u koštac, niti su oni pokušavali formulirati matematičke izjave kako to današnji matematičari rade.

Pitagorejce su zanimale osnove matematike, pojam broja, trokuta i ostalih matematičkih likova, te apstraktna ideja dokaza. Drugim riječima, Pitagorejce je zanimalo sve ono što se danas nama čini toliko poznato da se o tome nema što razmišljati. Pitagora je vjerovao da se sve relacije i odnosi mogu svesti na operacije s brojevima, da se sve oko nas i cijeli svemir može objasniti brojevima. Do toga su zaključka došli nakon mnogih opažanja u glazbi, matematici i astronomiji.

Poznato je Pitagorino opažanje da žice glazbala proizvode tonove u harmoniji kada su koeficijenti duljina tih žica cijeli brojevi. Pitagora je jako pridonio stvaranju matematičke teorije muzike. Bio je vrstan glazbenik, svirao je liru i koristio je glazbu kao sredstvo liječenja bolesnika *(muzikoterapija)*.

Pitagora je proučavao svojstva prirodnih brojeva koja su i dan danas poznata, kao na primjer parni i neparni brojevi, savršeni brojevi itd. Po njemu, svaki broj ima čak i svoje osobine: muški i ženski, savršen ili nepotpun, lijep ili ružan. Postojao je i najbolji od svih brojeva: broj 10, kojeg su prepoznali kao zbroj prva četiri prirodna broja $(1 + 2 + 3 + 4 = 10)$.

Naravno, mi danas pamtimo Pitagoru po poznatom **Pitagorinom poučku**. Iako je taj poučak nazvan po Pitagori, on je bio poznat još i starim Babiloncima 1000 godina prije nego što se Pitagora rodio. Naime, Pitagora nije prvi otkrio Pitagorin teorem, već je Pitagora (ili neki drugi Pitagorejac) prvi koji je dokazao taj teorem i zato se on naziva Pitagorin poučak. Po nekima, kada je Pitagora dokazao taj teorem, bogovima u čast je žrtvovao vola što su ga prosvijetlili.

2.1.2 Dostignuća Pitagorejske škole

Evo poznatijih tvrdnji koje su dokazali Pitagorejci:

1. Zbroj kuteva u trokutu jednak je kao dva prava kuta.

2. Kvadrat na hipotenuzi jednak je zbroju kvadrata na ostale dvije stranice u pravokutnom trokutu *(Pitagorin poučak)*. Primijetimo ovdje da Pitagorejcima "kvadrat" nije označavao množenje duljine stranice sa samom sobom, već je označavao

jednostavno geometrijski lik kvadrat konstruiran na stranici. Činjenica da je zbroj dva kvadrata jednak trećemu, značila je da se dva kvadrata mogu izrezati na likove od kojih se može složiti jedan kvadrat koji je sukladan kvadratu nad hipotenuzom.

3. Otkriće iracionalnih brojeva. Pitagorejci su čvrsto vjerovali da se sve može prikazati u obliku broja, pri čemu je svaki broj kvocijent dva cijela broja. Međutim, kada su pokušali izmjeriti hipotenuzu jednakokračnog pravokutnog trokuta, došli su do zaključka da se ona ne može prikazati kao kvocijent dva cijela broja i to ih je užasnulo. Zapravo, činjenica da postoje brojevi koji se ne mogu prikazati kao omjer dva cijela broja toliko ih je osupnula da su tu tvrdnju čuvali u dubokoj tajnosti kako ne bi izašla na vidjelo. Konkretno, Pitagorejci su dokazali da $\sqrt{2}$ nije racionalan, tj. da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva stranici kvadrata.

4. Pet pravilnih geometrijskih tijela *(Platonova tijela)*. Smatra se da je sam Pitagora znao kako konstruirati prva tri pravilna tijela, ali ne i posljednja dva.

5. U astronomiji je Pitagora poučavao da je Zemlja kugla u središtu Svemira. On je također prepoznao da se Mjesečeva putanja nalazi pod kutom u odnosu na ekvator. On je također bio jedan od prvih koji je primijetio da je Venera kao večernja zvijezda bila isti planet kao Venera kao jutarnja zvijezda.

6. Prema legendi Pitagora je prvi matematičar kojemu je pao na pamet način zapisivanja sličan današnjem ASCII-kodu.

2.2 Matematički doprinosi

2.2.1 Pitagorejska geometrija

Pitagorin poučak

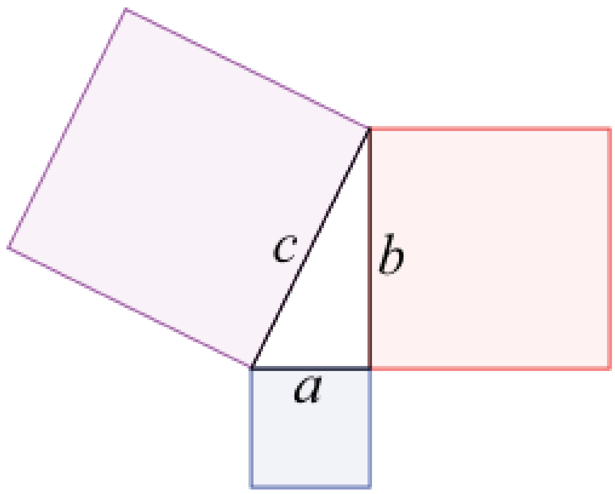
Pitagorin poučak je jedan od osnovnih teorema geometrije. Bitno je istaknuti da je Pitagorejcima bio poznat potpun teorem, uključivši i obrat:

Teorem 2.2.1 *Zbroj kvadrata nad katetama jednak je kvadratu nad hipotenuzom. Obratno, ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvije njegove stranice jednaka kvadratu nad trećom, onda se radi o pravokutnom trokutu.*

Dokaz Pitagorina poučka

Pitagorin dokaz čisto je vizualan, bez podrške algebre i računanja. Danas je poznato više od 100 raznih dokaza Pitagorinog poučka. Recimo i to da je i 20. američki predsjednik James A. Garfield (1831. - 1881.), dokazao Pitagorin poučak. Međutim, kada se ovi dokazi bolje prouče, tada se uviđa da se oni mogu podijeliti u četiri grupe:

1. Dokazi koji se zasnivaju na izjednačavanju površina



Slika 2.2: Pitagorin poučak

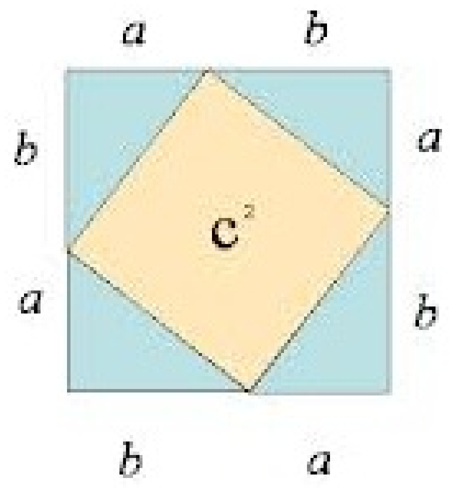
2. Dokazi pomoću razlaganja površina tzv. *mozaički dokazi*

3. Dokazi pomoću računanja

4. Dokazi koji se zasnivaju na sličnosti geometrijskih figura

Slijedi redom po jedan dokaz iz svake ove grupe:

Dokaz 1.
Površina kvadrata, čija je stranica duljine $(a+b)$, iznosi $P=(a+b)^2$, a tu površinu možemo još računati kao zbroj površina malog kvadrata stranice c, i 4 trokuta stranica a, b. Ta 4 trokuta su sukladna pa imaju istu površinu.



Slika 2.3: Dokaz 1.

$$P = P(malog \quad kvadrata) + 4 \cdot P(trokuta)$$

Dakle,

$$P(malog \quad kvadrata) = c^2, \quad P(trokuta) = \frac{ab}{2}$$

iz čega slijedi

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

Nakon izjednačavanja dobivenih površina

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

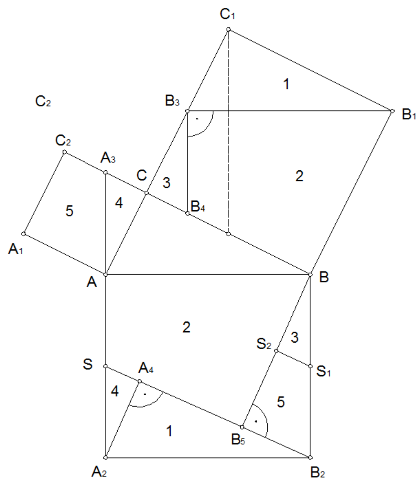
iz čega slijedi

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Obrat nećemo dokazivati.

■

Dokaz 2.
Na slici ispod kvadrati nad katetama i kvadrat nad hipotenuzom rastavljeni su na četverokute označene s 2 i 5, i na trokutove označene sa $1, 3$ i 4, pri čemu su S i S_1 sredine stranica AA_2, odnosno BB_2 , dužina B_1B_3 paralelna hipotenuzi AB, a dužina AA_3 produžetak stranice AA_2. Četverokuti označeni s 2 i četverokuti označeni s 5 su



Slika 2.4: Dokaz 2.

sukladni.
Trokuti označeni sa 1 sukladni su s danim pravokutnim trokutom ABC.
Pravokutni trokuti označeni s 3 su sukladni jer $B_3B_4 = BS_1$ i $\angle CB_3B_4 = \angle S_2BS_1$.
Trokuti označeni s 4 također su sukladni jer $A_2A_4 = AC$ i $\angle SA_2A_4 = \angle A_3AC$. Iz navedenog slijedi da je zbroj dijelova kvadrata nad katetama jednak zbroju (dijelova)

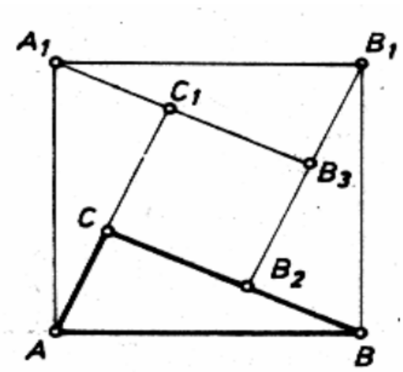
kvadrata nad hipotenuzom.
Ovaj dokaz potječe iz 900. godine.

Dokaz 3.
Na donjoj slici vidimo da je nad hipotenuzom AB danog pravokutnog trokuta ABC konstruiran kvadrat ABB_1A_1. Zatim je iz A_1 povučena A_1B_3 paralelna s BC i iz B_1 povučena dužina B_1B_2 paralelna s AC. Kada se AC produži do presjeka C_1 s A_1B_3, tada se kvadrat nad hipotenuzom AB sastoji od kvadrata $CC_1B_3B_2$, čija je dužina stranice jednaka razlici $a - b$ kateta ($a = BC$ i $b = BC = BB_2$) danog pravokutnog trokuta ABC, i četiri sukladna pravokutna trokuta: ABC , AA_1C_1 , $A_1B_1B_3$ i BB_1B_2. Prema ovome slijedi:

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2}$$

tj.

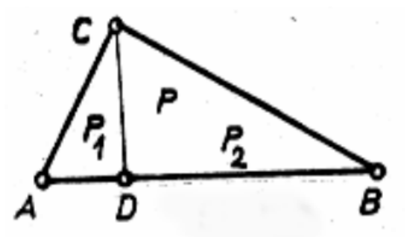
$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Slika 2.5: Dokaz 3.

■

Dokaz 4.
Kada se u danom pravokutnom trokutu ABC povuče visina CD koja odgovara hipotenuzi AB, kao što je to napravljeno na slici ispod, tada se dobiju dva nova pravokutna trokuta ACD i BCD koji su slični sa danim trokutom ABC.



Slika 2.6: Dokaz 4.

Ako su P, P_1 i P_2 površine trokutova ABC, ACD i BCD, onda vrijedi:

$$P : P_1 : P_2 = AB^2 : AC^2 : BC^2,$$

odnosno

$$P : P_1 : P_2 = c^2 : b^2 : a^2.$$

Odakle slijedi:

$$P = kc^2, P_1 = kb^2, P_2 = ka^2,$$

gdje je k faktor proporcionalnosti različit od nule. Kako je $P = P_1 + P_2$, to je prema tome i prethodnom:

$$kc^2 = kb^2 + ka^2,$$

odnosno

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

■

2.2.2 Pitagorejska aritmetika

Pitagorejci su proučavali razne vrste prirodnih brojeva: parne i neparne, savršene i prijateljske, razne figurativne brojeve.

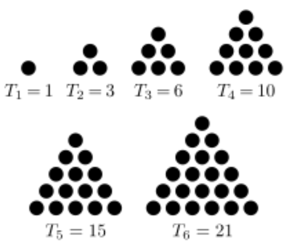
Figurativni brojevi

Figurativni brojevi su prirodni brojevi koje možemo prikazati slaganjem kamenčića u geometrijske likove. Neki od figurativnih brojeva su:

1. **Trokutasti brojevi**
   Trokutasti brojevi nastaju prebrojavanjem kamenčića koji formiraju i ispunjavaju pravilan trokut. Formula općeg člana glasi:

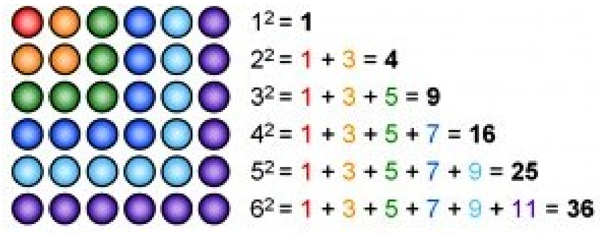
   $$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Kao što smo rekli, Pitagorejci su posebnu pažnju pridavali broju $10 = 1+2+3+4$, a to je primjer trokutastog broja.



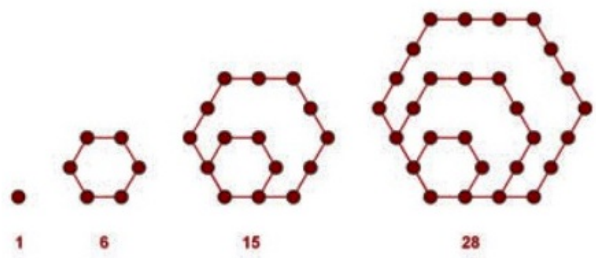
Slika 2.7: Trokutasti brojevi

2. **Kvadratni brojevi**
   Kvadratni brojevi su kvadrati prirodnih brojeva, n^2, i Pitagorejci su pokazali da im je oblik sljedeći:
   $$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$



Slika 2.8: Kvadratni brojevi

3. **Šesterokutni brojevi**
   Šestreokutni brojevi su $1, 6, 15, 28, \ldots$. Njihov opći oblik je
   $$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 2n^3 - n.$$
   Geometrijski se mogu predočiti kao pravilno raspoređene točkice po stranicama i unutrašnjosti pravilnog šesterokuta.



Slika 2.9: Šesterokutni brojevi

4. **Prijateljski brojevi**
   Prijateljski brojevi su parovi prirodnih brojeva koji imaju svojstvo da je svaki od njih jednak zbroju pravih djelitelja drugoga (djelitelji broja manji od njega samoga). Primjerice, to su brojevi 220 i 284. Pretpostavlja se da je to jedini par prijateljskih brojeva koji je bio poznat Pitagorejcima. U 18. su stoljeću Fermat i Descartes, neovisno jedan o drugome, našli sljedeći par prijateljskih brojeva. To su 17296 i 18416. Danas je poznato oko 1100 parova prijateljskih brojeva, ali se ne zna koliko ih ima (konačno ili beskonačno). Isto tako, još uvijek se ne zna postoji li par prijateljskih brojeva, od kojih je jedan paran, a drugi neparan.

5. **Savršeni brojevi**
   Savršeni brojevi su brojevi koji su jednaki zbroju svih svojih pravih djelitelja. Pitagorejci su im pripisivali magična svojstva. Pretpostavlja se da su savršeni brojevi poznati puno prije Pitagorejske škole. Savršeni brojevi su:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$$

   Može se reći da su savršeni brojevi oni brojevi koji su prijateljski sa sobom.

Pitagorejske trojke

Pitagorejci su još proučavali pitagorejske trojke. Njih ima beskonačno mnogo što se lako može vidjeti, jer za svaki $n \in \mathbb{N}$ brojevi $2n$, $n^2 - 1$ i $n^2 + 1$ čine pitagorejsku trojku.

Poglavlje 3

Euklid

"Od Euklidovih "Elemenata" krenule su sve zamisli prema savršenijem utemeljenju geometrije."
Kagan[1]

Euklid je grčki matematičar koji je izvršio najveći utjecaj na zapadno akademsko mišljenje. Kroz čitavu povijest čovječanstva, mnogi znanstvenici i učenjaci su davali svoje postulate i razne teorije, ali ipak, Euklid je taj koji s razlogom nosi naziv "otac geometrije". Njegovi *"Elementi"*, u kojima je skupio, ne samo sva svoja razmišljanja i teorije, nego i teorije svojih prethodnika, doživjeli su čak 1700 izdanja i s razlogom se smatraju najprevođenijim, najtiskanijim i najproučavanijim djelom u ljudskoj povijesti poslije Biblije.

3.1 Ukratko o Euklidovom životu

O Euklidovom životu ne postoji puno pouzdanih podataka. Živio je za vrijeme Ptolomeja Sotera u središtu egipatskog kraljevstva, Aleksandriji, od oko 330. do 275. godine prije Krista. Nakon smrti Aleksandra Velikog i raspada njegovog ogromnog carstva, Ptolomej je počeo vladati Egiptom. On je osnovao poznatu visoku školu Museion - sveučilište i biblioteka u jednom. U to vrijeme, Aleksandrija je bila glavni znanstveni centar u kojem su se nalazili tadašnji najveći znanstvenici. Sam Museion je sadržavao više od 700000 rukopisa. Prvi "šef" matematike u Museionu bio je upravo Euklid. Smatralo ga se čovjekom koji je živio samo za znanost i uporno je stajao na stajalištu da je znanje potrebno jedino zbog samog znanja, a nikako zbog koristi koja se iz njega može izvući[2]. O njegovoj predanosti geometriji, odnosno znanosti uopće, govore sljedeće dvije anegdote:

[1]Veniamin Fedorovich Kagan (1869. – 1953.) - ruski matematičar
[2]http://mis.element.hr/fajli/102/01-07.pdf

Slika 3.1: Euklid

Anegdota *I*

Najpoznatija anegdota o Euklidu (autor je Proklo), kaže kako je Euklid išao faraonu Ptolemeju pokazati svoju knjigu Elementi. Faraon ga je upitao: "Postoji li lakši i kraći način do geometrije od proučavanja Elemenata?" Ovaj je odgovorio: "Da, postoji." Faraon ga upita: "Postoji li "kraljevski" način do matematike?" Euklid mu odgovori: "Ne, ne postoji. Onaj tko želi shvatiti geometriju mora raditi. Isto vrijedi i za kraljeve."

Anegdota *II*

Nakon završetka Euklidovog predavanja u njegovoj školi, jedan od Euklidovih učenika geometrije upitao je kakvu će korist u životu imati od tog predavanja i koliko on može zaraditi ako to sve nauči. Euklid nije odgovorio na to pitanje, pozvao je roba i po robu poslao tom učeniku jedan zlatnik i otpustio ga iz škole.

Što se tiče Euklidovih djela, već spomenuti "Elementi" su za nas najvažniji. Srećom, oni su sačuvani, kao i:

- *Uvjeti* - zadaci koji se rješavaju pomoću geometrijske algebre,
- *O dijeljenju figura* - konstruktivni zadatci,
- *Data* - vrsta repitorija,
- *Pojave* - astronomski spisi,
- *Optika* - s teorijom perspektive.

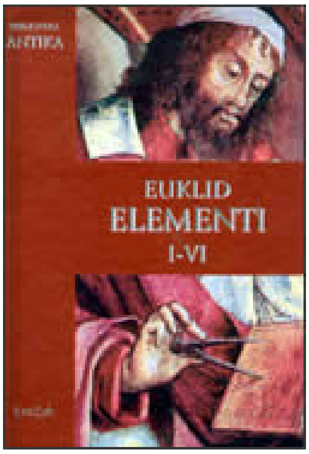
Ostala djela su izgubljena, a područja interesa bila su iz matematike, optike, glazbe i astronomije.

3.2 Matematički doprinosi

3.2.1 Euklidovi *"Elementi"*

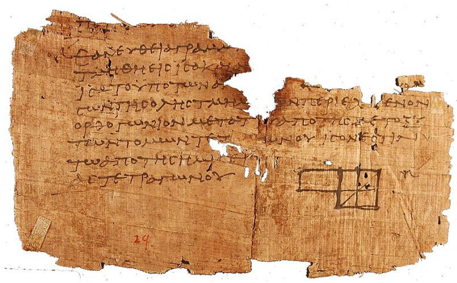
Euklidovi su *"Elementi"* vrlo važno djelo, ne samo matematike, nego svjetske znanosti i kulture uopće. Prof. dr. sc. Vladimir Volenec je u o Elementima rekao sljedeće:

"Euklidovi su Elementi i jedno od najkontroverznijih djela u povijesti znanosti. Upravo kritikom sadržaja Elemenata razvijala se povijest strogo logičkog zasnivanja matematike i bilo koje aksiomatske teorije. Dva osnovna problema koje su Elementi inicirali, problem paralela i problem potpunosti aksiomatike euklidske geometrije, riješeni su tek početkom odnosno krajem 19. stoljeća nakon bezuspješnih pokušaja gotovo svih najvećih matematičara kroz više od dvije tisuće godina."



Slika 3.2: Hrvatsko izdanje Euklidovih *"Elemenata"*

Euklidovi *"Elementi"* objavljeni su oko 300. g. pr. Kr. i predstavljaju sintezu sve dotad poznate matematike u 13 knjiga. Ne postoji originalni rukopis *"Elemenata"*, nego su na temelju postojećih nezavisnih tekstova krajem 19. stoljeća J.L. Heiberg i H. Menge restaurirali originalni Euklidov tekst. Značenje "Elemenata" je u svakom



Slika 3.3: Sačuvani fragmenti Euklidovih *"Elemenata"*

pogledu veliko. Vrlo uspješno je izložena elementarna geometrija na aksiomatskoj osnovi. Teoremi su logički poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih ili

pak osnovnih tvrdnji (23 definicije, 5 aksioma i 5 postulata) danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno. Prof. dr. sc. F.M. Bruckler u svojoj *"Povijesti matematike"* također navodi da je ideja *"Elemenata"* izvesti cijelu matematiku iz malog broja početnih pretpostavki. U ovom djelu se izrazito osjeti utjecaj Aristotela na Euklida koji je već ranije izložio bit znanstvenih definicija, aksioma i dokaza. Tako je Euklid svaku svoju geometrijsku tvrdnju formulirao općenito, pa konkretno, crtežima pokazujući ono što je zadano i što treba dokazati ili konstruirati. Nakon dokaza slijedi zaključak.
Zanimljivo je što su *"Elementi"* služili kao udžbenik iz geometrije sve do 19. stoljeća. Razlika između *"Elemenata"* i današnjih udžbenika je recimo što se u *"Elementima"* ne spominje neposredno mjerenje površina i obujama figura, nego samo njihova usporedba, nigdje se ne spominje broj π, a dokazi su čisto apstraktni, dobiveni čistim logičkim razmišljanjem. No, ipak mnogi poučci u današnjim udžbenicima su sadržajno jednaki kao i u Elementima, a metode dokaza su u većini slučajeva jednake.

Dakle, *"Elementi"* se sastoje od 13 knjiga.

- Knjiga 1: temeljna svojstva geometrije, Pitagorin poučak, jednakost kutova, paralelnost, zbroj kutova u trokutu,
- Knjiga 2: površine trokuta i četverokuta, zlatni rez,
- Knjiga 3: krugovi, kružnice i njihova svojstva, odsječci, tangente,
- Knjiga 4: konstrukcijom kružnici opisanih i upisanih trokuta te konstrukcijom pravilnih poligona;
- Knjiga 5: omjeri veličina,
- Knjiga 6: primjena omjera u geometriji, sličnost trokuta,
- Knjiga 7: teorija brojeva (djeljivost, prim brojevi),
- Knjiga 8: geometrijski redovi,
- Knjiga 9: kombinira rezultate sedme i osme knjige – beskonačnost prim brojeva, suma geometrijskog reda,
- Knjiga 10: nesumjerljivost i iracionalni brojevi,
- Knjiga 11: primjena rezultata prve do šeste knjige na prostor,
- Knjiga 12: oplošja i volumeni stošca, piramide, valjka, sfere,
- Knjiga 13: generalizacija četvrte knjige na prostor,upisivanje pet Platonovih pravilnih tijela u sferu.

Što se tiče geometrije i njene aksiomatike, najvažnija je prva knjiga jer se u njoj nalaze svi aksiomi na kojima se zasnivaju ostale knjige. Pisana je tzv. egzaktnim matematičkim stilom: matematički:

$$definicija - aksiom - teorem - dokaz.$$

Knjiga je pisana u potpunosti riječima jer tada nisu postojali simboli za određene pojmove. Proučavanje geometrijskih prostora je, u pravom smislu te riječi, počelo kada je Euklid postavio svojih pet aksioma o prostoru. Takav prostor se danas zove euklidski prostor, no tokom mnogo godina su se razvili i neeuklidski prostori te još mnogi drugi.
U radu ćemo navesti 23 definicije koje se nalaze u prijevodu prve knjige na hrvatski jezik, te, 5 postulata i 5 aksioma u modernoj formulaciji.

Definicije

D1. Točka je ono što nema djelova.

D2. Crta je duljina bez širine.

D3. Krajevi crte su točke.

D4. Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.

D5. Ploha je ono što ima samo duljinu i širinu.

D6. Krajevi plohe su crte.

D7. Ravnina je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj.

D8. Kut u ravnini je nagib u ravnini jedne prema drugoj dviju crta koje se međusobno dotiču i koje ne leže u dužini.

D9. Kada su crte koje obuhvaćaju kut ravne, kut se naziva ravnocrtnim.

D10. Kada dužina uspravljena na dužinu čini međusobno jednake susjedne kutove, tada je svaki od jednakih kutova pravi, a dužina koja stoji naziva se okomitom na onu kojoj stoji.

D11. Tupi kut je onaj koji je veći od pravog.

D12. Oštar kut je onaj koji je manji od pravog.

D13. Granica je ono što je nečemu kraj.

D14. Lik je ono što je obuhvaćeno s jednom ili više granica.

D15. Krug je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne točke od onih koje leže unutar lika međusobno jednake.

D16. Ta se točka naziva središtem kruga.

D17. Promjer kruga je bilo koja dužina povučena kroz središte i ograničena s obje strane kružnicom kruga, a koja također siječe krug u dva jednaka dijela.

D18. Polukrug je lik obuhvaćen promjerom i njime odrezanom kružnicom. A središte polukruga isto je ono koje je i središte kruga.

D19. Ravnocrtni su likovi oni koji su omeđeni dužinama, oni obuhvaćeni s tri su trostranični, oni obuhvaćeni s četiri četverostranični, a oni obuhvaćeni s više od četiri dužine jesu mnogostranični likovi.

D20. Od trostraničnih likova jednakostraničan trokut jest onaj koji ima tri iste stranice, jednakokračan onaj koji ima samo dvije jednake stranice, a raznostraničan onaj koji ima tri nejednake stranice.

D21. Od trostraničnih likova još je pravokutan trokut onaj koji ima pravi kut, tupokutan onaj koji ima tupi kut, a oštrokutan onaj koji ima tri oštra kuta.

D22. Od četverostraničnih likova kvadrat je onaj koji je jednakostraničan i pravokutan, pravokutnik onaj koji je pravokutan, a nije jednakostraničan, romb onaj koji je jednakostraničan, a nije pravokutan, a romboid je onaj kojemu su nasuprotne stranice i kutovi međusobno jednaki, a koji nije ni jednakostraničan ni pravokutan. A četverostranični likovi pored tih neka se nazovu trapezima.

D23. Paralelne su one dužine koje se, neograničeno produžene u oba smjera, međusobno ne sastaju ni u jednom smjeru.

Postulati

P1. Dvije točke određuju dužinu.

P2. Dužina se može produžiti u svakom smjeru.

P3. Kružnica je zadana središtem i radijusom.

P4. Svi pravi kutevi su jednaki.

P5. Postulat o paralelama: Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) sijeku, tj. nisu paralelni.

Postulate nije potrebno dokazivati, a Euklid ih je smatrao temeljnim tvrdnjama.
Od ovih pet postulata zadnja dva se pripisuju Euklidu. Prva tri postulata pripadaju Euklidovim prethodnicima.

Aksiomi

A1. Jednakost je tranzitivna relacija.

A2. Ako je $a = b$ i $c = d$, onda je $a + c = b + d$.

A3. Ako je $a = b$ i $c = d$, onda je $a - c = b - d$.

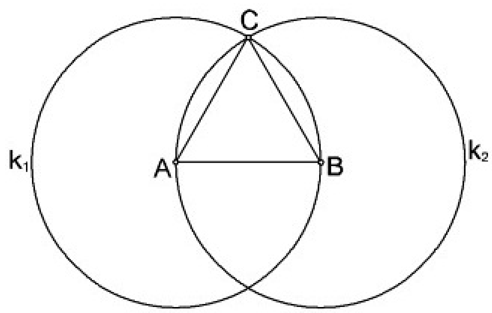
A4. Ono što se podudara je jednako.

A5. Cjelina je veća od dijela.

Aksiomi nisu vezani samo za geometriju, nego su to opće pretpostavke koje matematičarima omogućuju gradnju deduktivne znanosti.
U svim knjigama "Elemenata" dokazane su i mnoge propozicije. U radu ćemo dokazati prvu propoziciju prve knjige:

Propozicija 3.2.1 (Propozicija 1.)
Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.

Dokaz.
Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Treba konstruirati jednakostraničan trokut ΔABC sa stranicom $\overline{AB}$.
Konstruirajmo kružnice $k_1 = k(A, \overline{AB})$ oko točke A radijusa $\overline{AB}$, te analogno $k_2 = k(B, \overline{AB})$ [primjenom postulata P3.]. Neka je C presječna točka tih kružnica. Spojimo C s A i C s B [po postulatu P1.]. Time je nastao ΔABC za kojeg tvrdimo da je



Slika 3.4: Propozicija 1.

jednakostraničan. Zaista, jer je $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$ [po definiciji D15.] imamo $\overline{AC} = \overline{BC}$ [po aksiomu A1].
Ovim je dokazano $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, tj. ΔABC je jednakostraničan.

■

3.2.2 Euklidov algoritam

Euklidov algoritam je jedan od najstarijih algoritama koji se koriste i dan danas. Nalazimo ga u Euklidovim *"Elementima"*, u VII. knjizi, gdje je Euklidov algoritam formuliran za cijele brojeve, te u X. knjizi gdje imamo primjenu Euklidovog algoritma na geometriju. Iako smo od Euklida saznali o ovom algoritmu, ne postoje dokazi da je on originalni tvorac tog algoritma. Iako stoljećima kasnije, Euklidov algoritam je otkriven u Indiji i Kini.
U 19. stoljeću dolazi do razvoja novih brojeva, zahvaljujući upravo Euklidovom algoritmu. Euklidov algoritam je bio prvi algoritam za utvrđivanje cjelobrojne povezanosti, odnosno za pronalazak cjelobrojnih odnosa između usporedljivih realnih brojeva. Krajem 20. stoljeća razvijeno je još nekoliko novih algoritama koji mogu provjeriti cjelobrojnu povezanost.

Euklidov algoritam i danas koristimo za pronalazak najveće zajedničke mjere dvaju ili više brojeva.
Definirajmo zajedničku mjeru dva broja a i b.

Definicija 3.2.1 *Najveća zajednička mjera (ili najveći zajednički djelitelj)brojeva a i b jest broj m koji ima svojstva:*

1. *m je djelitelj svakog od brojeva a i b,*
2. *m je najveći broj s tim svojstvom.*

Najveću zajedničku mjeru označavamo s $M(a, b)$.

Sada možemo izreći teorem, odnosno Euklidov algoritam:

Teorem 3.2.1 (Euklidov algoritam)
Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ gdje su $a, b > 0$. Pretpostavimo da je uzastopnom primjenom teorema o dijeljenju s ostatkom dobiven niz jednakosti:

$$
\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1, \qquad 0 < r_1 < b \\
&b = r_1q_2 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1 \\
&r_1 = r_2q_3 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
&r_{j-2} = r_{j-1}q_j + r_j, \qquad 0 < r_j < r_{j-1} \\
&r_{j-1} = r_jq_{j+1}.
\end{aligned}
$$

Tada je $M(a, b) = r_j$, odnosno najveći zajednički djeljitelj je jednak posljednjem ostatku različitom od nule u Euklidovom algoritmu. Vrijednosti od x_0 i y_0 u izrazu $M(a, b) = ax_0 + by_0$ mogu se dobiti izračunavanjem svakog ostatka r_i kao linearne kombinacije od a i b.

Za dokaz ovog teorema potrebna nam je sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2.2 *Vrijedi*

$$M(a,b) = M(a, b+ax)$$

gdje je $x \in \mathbb{Z}$.

Dokaz(Teorem 3.2.1 Euklidov algoritam).
Prema gornjoj propoziciji slijedi:

$$M(a,b) = M(a-bq_1, b) = M(r_1, b) = M(r_1, b-r_1q_1) = M(r_1, r_2) = M(r_1-r_2q_3, r_2) = M(r_1, r_3).$$

Nastavljajući ovaj proces, dobivamo:$M(a,b) = M(r_{j-1}, r_j) = M(r_j, 0) = r_j$.
Indukcijom ćemo dokazati da je svaki r_i linearna kombinacija od a i b.
Za r_1 i r_2 to vrijedi pa pretpostavimo da vrijedi i za r_{i-1} i r_{i-2}. Kako je $r_i = r_{i-2} - r_{i-1}q_i$, po pretpostavci indukcije dobivamo da je r_i linearna kombinacija od a i b.

■

Pokažimo na primjeru:

Primjer 3.2.1 *Pronađite najveću zajedničku mjeru brojeva* 3102 *i* 4002.

Rješenje.
$4002 = 1 \cdot 3102 + 900$
$3102 = 3 \cdot 900 + 402$
$900 = 2 \cdot 402 + 96$
$402 = 4 \cdot 96 + 18$
$96 = 5 \cdot 18 + 6$
$18 = 3 \cdot 6$

Najveća zajednička mjera brojeva 3102 i 4002 je

$$M(4102, 3102) = 6.$$

Poglavlje 4

Arhimed

"Ima stvari koje izgledaju nemoguće većini ljudi koji nisu proučavali matematiku."
Arhimed

Posljednje razdoblje starogrčke matematike pripada Arhimedu. Kao i kod ostalih tadašnjih matematičara, i na Arhimeda i njegov matematiči rad utjecali su filozofski stavovi. Njegovi radovi zadivljuju svojom raznolikošću. Bio je matematičar, mehaničar, inženjer, praktičar, astronom i teoretičar koji je svojim razmišljanjima i djelima postavio temelje suvremenoj matematici i fizici.

4.1 Ukratko o Arhimedovom životu

Arhimed je rođen oko 287. godine prije Krista, u Sirakuzi na Siciliji koja je tada bila grčka kolonija Magna Graecija. Rođen je u siromašnoj obitelji od oca Fidija koji je bio matematičar i astronom, no njegovo siromaštvo nije dugo potrajalo. Fidijev rođak Hijeron je ubrzo zavladao gradom. Otac je naučio svoga sina svemu što je znao. Znači težio je potpunom savršenstvu te se nije slagao s dotadašnjim filozofskim shvaćanjem da se treba istraživati samo do određene granice. Glavno očevo načelo je bilo da sinu treba dati znanje u ruke i neka on čini što mu volja.

Arhimed je većinu svoga života proveo u Sirakuzi. Kada mu je bilo potrebno usavršavanje u njegovom znanju uz pomoć Hijerona odlazi u Egipat u Aleksandriju gdje je pod vodstvom Euklida studirao. Tamo upoznaje i Eratostena. Nakon studija u Aleksandriji, ostatak života proveo je u Sirakuzi, gdje se posvetio matematici i bio Hijeronov savjetnik. O Arhimedovom životu se zna vrlo malo budući da su svi podaci izgubljeni do razdoblja renesanse. Ne zna se ni je li bio oženjen te je li imao djece. Poginuo je 212. godine prije Krista za vrijeme drugog Punskog rata kada su Rimljani okupirali Sirakuzu nakon dvogodišnje opsade. Arhimedovi izumi su služili Sirakuzi u obrani od Rimljana. Tako se Arhimedu pripisuju izumi mnogih ratnih strojeva, među kojima i sustav zrcala kojima su, uz pomoć sunčevih zraka, palili neprijateljske brodove dok su ovi još bili na sigurnoj udaljenosti od grada.

Slika 4.1: Arhimed

Postoje tri anegdote o načinu na koji je Arhimed umro.

Anegdota *I*

Prva anegdota kaže da je sjedio i crtao u pijesku. Udubljen u svoje razmišljanje nekih geometrijskih slika, primijetio je sjenu vojnika, koja je pala na njegove dijagrame. Tada je Arhimed uzviknuo:

"*Ne diraj moje krugove*!".

Vojnik se razljutio, izvadio mač i ubio matematičara u 75. godini života.

Anegdota *II*

U drugoj anegdoti saznajemo kako je Arhimed odbio da ide s vojnikom do generala Marcela prije nego završi svoj problem pa je zbog toga ubijen.

Anegdota *III*

Treća anegdota govori o tome kako je Arhimed samo išao kod Marcela noseći svoje matematičke instrumente u drvenom sanduku. Kada su ga vojnici vidjeli s tim kovčegom, pomislili su da se unutra krije zlato te su ga ubili.

Sirakužani nisu smjeli održavati Arhimedov grob. Njega je jedva pronašao Ciceron i to zahvaljujući crtežu lopte i valjka koji se nalazio na spomeniku iznad nekoliko stihova urezanih velikom matematičaru u spomen.

Uz Arhimeda i njegova otkrića vezane su mnoge zanimljivosti i legende.

Poznata je legenda koja kaže da je Hijeron od Arhimeda zatražio da provjeri je li njegova kruna od čistog zlata ili je zlatar u krunu umiješao i srebro. Do rješenja

problema Arhimed je došao ležeći u kadi. Shvatio je da dva tijela iste mase, ali od različitog materijala (različitih gustoća) imaju različit volumen, te zbog toga ne istisnu istu količinu vode kad se urone u nju. Ova spoznaja je omogućila da se ustanovi ima li srebra u Hijeronovoj kruni. Zlatna kruna bi pokazala veću razliku nego srebro ili mješavina zlata i srebra, jer je zlato, po zapremini teže od srebra. Tako je Arhimed otkrio da može odrediti čistoću krune, a da ju pri tome ne mora rastopiti. Kada je to shvatio, Arhimed je iskočio iz kade vičući: **"Eureka!"**. Na taj način je oblikovan sljedeći zakon kojeg s razlogom zovemo Arhimedov:
"Na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje uzgon – sila koja tijelo potiskuje prema gore i jednaka je težini istisnute tekućine".

4.2 Matematički doprinosi

Najveću slavu stekao je svojim raspravama o zaobljenim geometrijskim tijelima, čije je oplošje i volumen izračunavao složenom metodom bliskom današnjem infinitezimalnom računu. Glavna Arhimedova djela su:

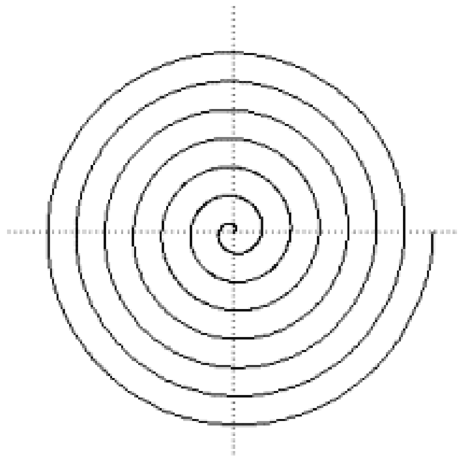
- O kugli i valjku
  U ovom djelu Arhimed je odredio volumen kugle u odnosu na valjak opisan oko te kugle.
  Arhimedov zaključak:
  $$V_{kugle} + V_{stosca} = \frac{1}{2} V_{valjka}.$$
- O mjerenju kružnice i kruga
  U ovom djelu, između ostalog, Arhimed je izračunao približnu vrijednost broja π.
- O plovećim tijelima
  Primjenom Arhimedovog zakona na plovna tijela mogu se postaviti tri uvjeta plovnosti[1]:
  1. Masa broda jednaka je masi istisnute vode.
  2. Spojnica težišta sustava broda i težišta istisnine je okomita na ravninu vodne linije.
  3. Početni meta-centar mora ležati iznad težišta sustava broda.

  U ovom su djelu postavljeni osnovni temelji hidrostatike.
- O ravnoteži u ravnini
  Zakon poluge se nalazi u ovom djelu, ali i osnove statike.
- O kvadraturi parabole
  U ovom djelu Arhimed je dokazao da je površina lika ograničenog parabolom i ravnom linijom $\frac{4}{3}$ puta veća od površine trokuta upisanog u tu parabolu.

[1]Plovnost je sposobnost tijela da mirno pluta na tekućini

- O konoidama i sferoidama
  Tema ovog djela su tijela koja nastaju rotacijom konika oko osi. Arhimed izračunava oplošje i volumene dijelova sfera, konusa i paraboloida.

- O spiralama
  Arhimedova spirala, krivulja koja nastaje kada se točka giba iz središta jednoliko ga obilazeći i udaljavajući se od njega.



Slika 4.2: Arhimedova spirala

- Metode
  U ovom djelu Arhimed je dao osnove infinitezimalnog računa.

- Pješčanik
  Ovo je jedino sačuvano djelo koje svjedoči o Arhimedovom zanimanju za astronomiju. Govori o označavanju velikih brojeva. Ideja je da je broj zrnaca pijeska u svemiru također broj te bi ga se moglo nekako označiti.

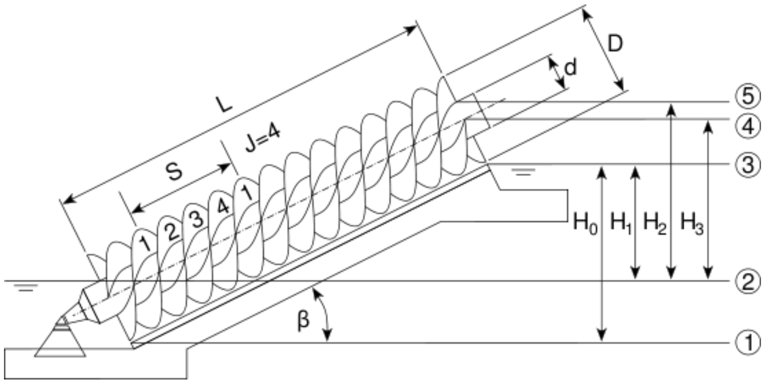
Neka od Arhimedovih postignuća dana su u sljedećim odlomcima.

4.2.1 Arhimedov vijak

Arhimedov vijak je naprava koja se često tijekom povijesti upotrebljavala za premještanje vode u kanale za natapanje. To je cijev svinuta kao zavoji vijka, a služi za dizanje vode. Kod okretanja diže se voda u toj cijevi od njenog donjeg kraja i curi kroz otvor gornjeg zavoja.

Glavne dimenzije Arhimedovog vijka:
d - unutarnji promjer cijevi,
D - vanjski promjer vijka,
β - kut nagiba uređaja,

H_0 - najveća moguća visina dizanja,
H_1 - najmanja visina dobave,
H_2 - najveća visina dobave,
H_3 - srednja visina dobave,
J - broj neovisnih navoja,
L - duljina navoja,
S - uspon vijka.



Slika 4.3: Dimenzije Arhimedovog vijka

Danas se Arhimedov vijak koristi za navodnjavanje i isušivanje, a primjenu Arhimedovog vijka možemo naći još u kanalizacijskim sustavima, pokretnim trakama, u ribogojilištima, ...

Slika 4.4: Primjena Arhimedovog vijka

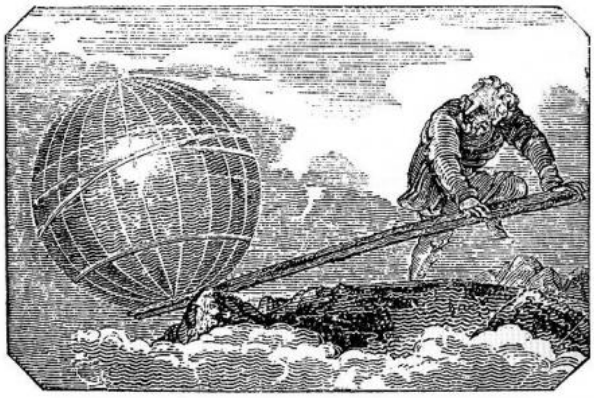
4.2.2 Arhimedov zakon poluge

Danas je poznat Arhimedov citat:

"Dajte mi čvrst oslonac i dovoljno dugačku polugu, pa ću vam pomaknut Zemlju!"

Stari grčki pisac Plutarh donosi:
"Jednom je Arhimed napisao sirakuškom kralju Hieronu II, svom zemljaku i rođaku, da se određenom silom može pokrenuti bilo koji predmet. Zanesen snagom svojih dokaza, on je dodao, da bi mogao pokrenuti i samu Zemlju, kada bi mogao naći dobar oslonac."

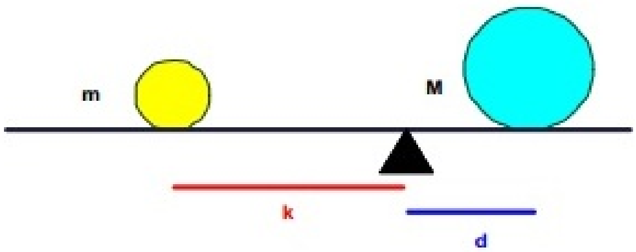
Arhimedovi su glavni rezultati u mehanici vezani za zakon poluge. On glasi: jednaki tereti na jednakim udaljenostima su u ravnoteži, dok na nejednakim udaljenostima nisu u ravnoteži već preteže onaj teret koji je na većoj udaljenosti, tj. poluga je u ravnoteži kad su umnošci duljine krakova i težine tereta jednaki za obje strane.



Slika 4.5: Arhimedova poluga

No, danas znamo da Arhimed ne bi bio u mogućnosti napraviti što je rekao, jer da bi to uspio, poluga mora biti dugačka "samo" 390.000.000.000.000.000.000.000.000.000 metara.
Matematički je očito da stavimo li na jednu stranu poluge (vage) na udaljenosti k tijelo mase m, a na drugu stranu na udaljenosti d tijelo mase M, ona će biti u ravnoteži kada je:

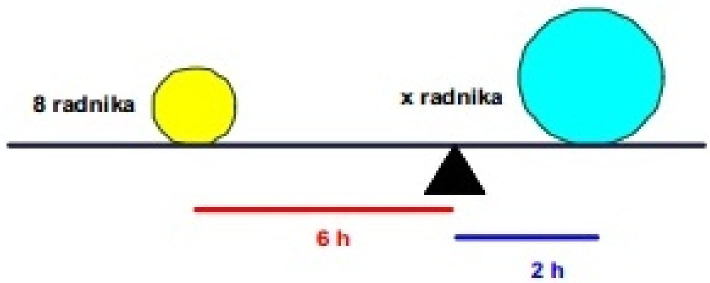
$$m \cdot k = M \cdot d.$$



Pogledajmo kako zakon poluge možemo primijeniti za rješavanje jednostavnog matematičkog problema:

Primjer 4.2.1 *Osam radnika obavi neki posao za 6 sati. Koliko treba radnika da se ovaj posao završi za 2 sata?*

Rješenje.
Važno je primjetiti da radnici trebaju obaviti isti posao. Ravnoteža vage oponaša (simulira) stalnost posla. Neka broj radnika odgovara masi, a broj sati duljini kraka. Neka je 8 radnika $= m$, 6 sati$= k$, x radnika $= M$, 2 sata$= d$.



$m \cdot k = M \cdot d,$
$8 \cdot 6 = 2 \cdot x$
$x = 24$
Trebat će 24 radnika.

4.2.3 Arhimed i broj π

Mnogi zaljubljenici u geometriju, tisućljećima su se mučili pitanjem kako izračunati duljinu kružnice prema njenom promjeru, tj. pitanjem broja π. U svom djelu *"O mjerenju kruga"*, Arhimed je prvi koji je započeo izračunavanje broja π na osnovi strogih teorijskih rasprava. Arhimed se približio točnoj vrijednosti opsega kruga promatranjem opisanih i upisanih pravilnih poligona sa sve većim brojem strana. Izračunavajući opsege tih poligona, Arhimed dobiva brojeve veće od opsega kruga (opsezi opisanih poligona) i brojeve manje od opsega kruga (opsezi upisanih poligona), a ti brojevi se sve manje razlikuju od opsega kruga što je broj strana poligona veći. Pošto je došao do poligona s 96 stranica, izračunao je (u našim oznakama):

$$3\frac{10}{71} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}} < 3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}$$

$$3\frac{1}{7} = 3.1428\ldots, 3\frac{10}{71} = 3.1408\ldots$$

Dakle, Arhimed je dobio točne dvije decimale broja π, tj. $\pi = 3.14\ldots$.
Ova metoda je najznačajnija po tome što bi se po njoj mogao izračunati opseg kruga s onolikom točnošću s kojom bi se htjelo, dakle, mogao bi se po njoj izračunati s proizvoljnom točnošću broj π, na onoliko decimala koliko se hoće.

4.2.4 Arhimedov zakon uzgona

Prema Arhimedovom zakonu tijelo uronjeno u tekućinu gubi od svoje težine onoliko koliko je težina istisnute tekućine. Ta razlika težine dolazi od sile uzgona:

$$F_u = \rho V g,$$

gdje je F_u sila uzgona, ρ gustoća fluida i V volumen tijela.

Primjer 4.2.2 *Koliki je uzgon u vodi na kamen mase* 10 kg *i gustoće* 2.5 g/cm^3*?* *(*$\rho_v = 1000kg/m^3$, $g = 9.81m/s^2$*)*

Rješenje.
$m = 10kg$
$\rho_k = 2.5g/cm^3 = 2500kg/m^3$
$\rho_v = 1000kg/m^3$
$g = 9.81m/s^2$
$F_{uz} =?$

Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t g V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine u koju je tijelo uronjeno (ovdje je to voda $\rho_t = \rho_v$), g ubrzanje sile teže, V volumen uronjenog tijela (ili volumen uronjenog dijela tijela). Volumen kamena izračuna se pomoću gustoće i mase:

$$\rho_k = \frac{m}{V} \Longrightarrow V = \frac{m}{\rho_k}.$$

Sada je uzgon lako izračunati:

$$F_{uz} = \rho_t g V = \rho_t g \frac{m}{\rho_k} = \frac{\rho_v}{\rho_k} g m = \frac{1000}{2500} \cdot 9.81 \cdot 10 = 39.24N$$

Poglavlje o Arhimedu i njegovim matematičkim dostignućima možemo zaključiti citatom starog grčkog pisca Plutarha:
"U cijeloj geometriji nema poučaka težih i dubljih od Arhimedovih. Meni se samom uvijek činilo, od trenutka kada sam se prvi put upoznao s njegovim matematičkim pretpostavkama, da su one tako teške da čovječji um nije u stanju dokazati ih. Istom kad saznaš kako ih je sam Arhimed dokazivao, čini ti se da si ih sam našao i da su oni jednostavni i laki."

Bibliografija

[1] Aristotel, *Politika*, prijevod Tomislav Ladan, Zagreb, Hrvatska sveučilišna naklada, 1992.

[2] F. M. Bruckler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[3] G. Isakovič Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.

[4] Herodot, *Povijest*, prijevod Dubravko Škiljan, Zagreb, Matica hrvatska, 2000.

[5] http : //en.wikipedia.org/wiki/Thales

[6] http : //hr.wikipedia.org/wiki/Tales

[7] http : //www.anselm.edu/homepage/dbanach/thales.htm

[8] http : //web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf

[9] http : //mis.element.hr/fajli/102/01 − 07.pdf

[10] http : //hr.wikipedia.org/wiki/Euklid

[11] http : //sanda.striga.org/doc/Teorija$_b$rojeva02.pdf

[12] http : //www.math.uniri.hr/ ajurasic/prvo20predavanje.pdf

[13] http : //www.pmfst.hr/ gorerc/OG − materijali/ELEMENTI20 − 20prva20knjiga.pdf

[14] http : //www.fsb.unizg.hr/geometrija.broda/100/110/gb114.htm

[15] http : //www.halapa.com/pravipdf/vagazad.pdf

[16] http : //www.lugram.net/pdf/Pitagorina$_t$eorema.pdf

Sažetak

Cilj ovog rada je reći nešto o životima četiri velika grčka matematičara: Talesu, Pitagori, Euklidu i Arhimedu. Malo je poznato o njihovim životima, ali njihov utjecaj na znanost, posebno matematiku, je ogroman i od velike važnosti čak i danas. Rad je podijeljen na četiri dijela, od kojih je svaki posvećen jednom od njih. Kroz rad saznajemo o njihovim životima i velikim postignućima koji su postigli, pogotovo u matematici.

Key words: Tales, Pitagora, Euklid, Arhimed

Summary

The aim of this work is to say something about the lives of the great Greek mathematicians: Thales, Pythagoras, Euclid and Archimedes. Little is known about their's lives, but their influence on science, especially mathematics, is enormous and of great importance even today. The paper is divided into four parts, each of which is dedicated for one of them. Throughout the work we learn about their lives and the great achievements that they have achieved, especially in mathematics.

Key words: Thales, Pythagoras, Euclid, Archimedes

Životopis

Rođen sam 1989. godine. Osnovnu školu sam završio u Cerni. U Županji sam pohađao srednju školu, smjer opća gimnazija. 2007. godine upisao sam se na Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, a 2010. godine sam upisao Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.