Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Maja Ivić

Hamiltonov ciklus i Eulerova tura

Završni rad

Osijek, 2009.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Maja Ivić

Hamiltonov ciklus i Eulerova tura

Završni rad

Voditelj: Doc. dr. sc. Antoaneta Klobučar

Osijek, 2009.

Sadržaj

Sažetak. Ovaj rad govori o Hamiltonovom ciklusu i Eulerovoj turi.Radi se o obilascima grafova.Uz Hamiltonov ciklus i Eulerovu turu veže se još neki problemi koji su deteljanije opisani u radu kao i sva svojstva i teoremi vezani uz ovo područje.

Ključne riječi: Hamiltonov ciklus, Eulerova tura, problem trgovačkog putnika, problem kineskog poštara

Abstract. In this paper the Hamiltonian cycle and Eulerian cycle is elaborated. These are visits graph.Hamiltonian cycle and Eulerian cycle is associated with several other problems that are described in the work as well as all the properties and theorems related to this area.

Key words: Hamiltonian cycle, Eulerian cycle, problem of commercial passenger, Chinese postman problem

1. Uvod

Teorija grafova je grana matematike koja definira grafove i poučava njihova svojstva. Hamiltonov ciklus i Eulerova tura spadaju u obilaske grafova.Irski matematičar William R. Hamilton(1805-1865) bavio se proučavanjem obilaska svih vrhova, dok se Leohnard Euler (1707 - 1783) bavio proučavanjem obilaska bridova.Problem egzistencije i traženja Hamiltonovog ciklusa u grafu mnogo je teži od problema Eulerove ture i staze.

Prvotno su definirani osnovni pojmovi iz teorije grafova kao npr. definicija grafa, šetnje, puta, ciklusa...

Sljedeće poglavlje fokusirano je na Eulerovu turu, teoreme koji su vezani uz ovo područje. Uz Eulerovu turu javlja se problem kineskog poštara koji je detaljnije opisan.

U posljednjem poglavlju definiran je Hamiltonov ciklus, navedena su svojstva Hamiltonovog ciklusa, kao i problemi koji su vezani za Hamiltonov ciklus, problem trgovačkog putnika i problem konjićevog skoka.

2. Grafovi

Postoji nebrojeno mnogo skupova s konačnim brojem elemenata među kojima postoje neke relacije.Takve i mnoge druge konačne skupove i strukture proučava matematička disciplina koja se zove kombinatorna i diskretna matematika. Vrlo važan dio kombinatorike su grafovi. Graf je jedna od osnovnih matematičkih struktura koja omogućuje modeliranje relacija izmedu elemenata konačnih skupova.

2.1. Definicija grafa

Definicija 2.1 *Graf je uređen par G=(V,E), gdje je* $\emptyset = V(G)$ *skup vrhova(eng.vertex), E=E(G) skup bridova(eng.edge) disjunktnih s V. Svaki brid* $e \in E$ *spaja dva vrha* $u, v \in V$ *koji se zovu krajevi od e. Tada s uvrhovi u i v incidentni s e, a vrhovi u i v susjedni i pišemo e=uv.*

Definicija 2.2 *Graf je uređena trojka* $G = (V, E, \varphi)$ *gdje je*

$$\varphi * E \to \binom{v}{2}$$

f-ja koja svakom bridu e pridružuje 2-članimultiskup vrhova $\varphi(e) = u, v$ *koji se zovu krajevi od e.*

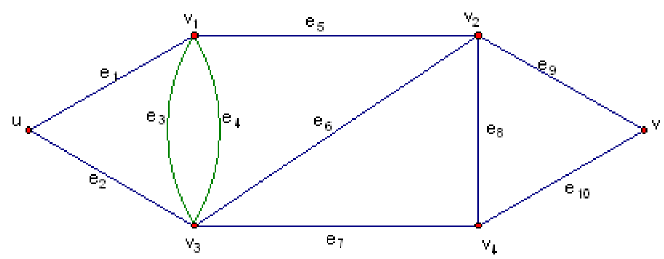
Definicija 2.3 *Brid čiji se krajevi podudaraju zove se* ***petlja****, a ako su krajevi različiti ona se naziva* ***pravi brid****.*

Definicija 2.4 *Graf je jednostavan ako nema petlji ni višestrukih bridova.*

Definicija 2.5 *Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom naziva se* ***potpun graf****.*

Definicija 2.6 *Graf kod kojeg se skup vhova može particionirati u dva skupa* X *i* Y *tako da svaki brid ima jedan kraj u* X*,a drugi u* Y *naziva se* ***bipartitan graf****.*

Definicija 2.7 ***Potpun bipartitan graf*** - *Jednostavan bipartitan graf s biparticijom* (X, Y) *u kojima je svaki vrh iz* X *spojen sa svakim vrhom iz* Y



PRIKAZ GRAFA

2.2. Šetnje,putovi i povezanost

Definicija 2.8 *Šetnja u grafu G je niz $W := v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$,čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i,$1 \leq i \leq k$.*

U jednostavnom je grafu šetnja potpuno određena samo nizom svojih vrhova $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj šetnje W.

Vrhovi $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ su **unutarnji vrhovi šetnje**, a broj k se zove **duljina šetnje** W.

Ako su $W := v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ i $W' := v_k, e_k, v_{k+1}, e_{k+1}, \ldots, e_l, v_l$ dvije šetnje,onda se šetnja $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, \ldots, e_l, v_l$ dobivena nadovezivanjem W i W' kod vrha v_k označava s WW', a šetnja $v_k, e_k, v_{k-1,\ldots,e_1,v_0}$ dobivena obrnutim redosljedom obilaska od W naziva **inverzna šetnja** od W i obilježava s W^{-1}

Definicija 2.9 *Ako su svi bridovi $e_1, \ldots, e_k$ šetnje W međusobno različiti, onda se W zove* ***staza****.*

Definicija 2.10 *Ako su na stazi W svi vrhovi $v_1, \ldots, v_k$ međusobno tazličiti onda se šetnja zove* ***put****.*

Definicija 2.11 *Zatovrena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi međusobno tazličiti (osim krajeva) zove se* ***ciklus****.*

Dva vrha u, v grafa G su povezana ako postoji (u, v)-put u G.Udaljenost $d_G(u, v)$ dvaju vrhova u i v u grafu G je duljina najkraćeg (u, v)-puta u G.

Dijametar grafa G, diamG je maksimalna udaljenost među njegovim bridovima tj. to je duljina puta maksimalne duljine u G.
Struk je duljina najkraćeg ciklusa u grafu.Ciklus je paran ako je parne duljine, inače je neparan.

2.3. Usmjereni grafovi ili digrafovi

Definicija 2.12 ***Usmjereni graf ili digraf*** *D je graf G u kojem svaki brid ima smjer od početka prema kraju. D se još zove orjentacija od G i pišemo $D = \overrightarrow{G}$. Brid s početko mu u, a krajem u v je uređen par (u, v) i katkad pišemo $u \to v$.*

Definicija 2.13 ***Striktni graf*** *je onaj bez višestrukih lukova i petlji.*

Definicija 2.14 ***Pridruženi digraf*** *$D(G)$ grafa G je digraf dobiven iz G zamjenom svakog brida dvama suprotno orjentiranim lukovima s isim krajevima.*

Pripadni graf $G(D)$ digrafa D je graf dobiven iz D brisanjem svih strelica(tj.orjentacija). **Turnir** je digraf čiji je pripadni graf jednostavan i potpun.

3. Eulerova tura

Temelje teoriji grafova udario je dobro poznati švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.-1783.) koji je 1736. godine riješio problem *Kö*nigsberških mostova. Naime, stari pruski grad *Königsberg*, današnji Kalinjingrad u Rusiji, smješten je na obalama rijeke Pregel. Dio grada nalazi se na dvije ade (riječna otoka), koje su povezane s kopnom i medusobno sa sedam mostova.Gradani *Königsberga* voljeli su šetati po mostovima, no nitko nije mogao pronaći način da prošeta gradom tako da svih sedam mostova prijeđe samo jednom i zatim se vrati kući. Za pomoć su se obratili Euleru koji je u to vrijeme djelovao u Petrogradu.

LEONHARD EULER

Euler je vrlo brzo pokazao da je takva šetnja nemoguća. Pretpostavimo da je takva šetnja moguća. Tada ona završava u komponentama kopna A, B, C ili D, eventualno tamo gdje je započela. Primijetimo da svaka komponenta kopna u kojoj šetnja nije započela i nije završila mora biti spojena s parnim brojem mostova, jer za svaki most preko kojeg se dolazi na tu komponentu mora postojati i most preko kojeg se odlazi s te komponente. Zato svaka komponenta koja je spojena s neparnim brojem mostova mora biti ili početak ili kraj šetnje. No u slučaju *Königsberga* svaka komponenta A, B, C i D ima neparan broj mostova s kojima je povezana, a kako najviše dvije komponente mogu biti početak, odnosno kraj šetnje, zaključujemo da takva šetnja nije moguća.Ako komponente A, B, C i D prikažemo kao točke ili vrhove, a mostove koji ih spajaju kao bridove ili spojnice, dobivamo pojednostavljenu shemu vrhova i njihovih spojnica, tj. graf.Problem šetanja po *kö* nigsberškim mostovima ekvivalentan je problemu obilaska ovog grafa tako da krenemo iz jednog vrha i sve bridove prijedemo točno jedanput.

Definicija 3.1 *Eulerova tura na grafu je zatvorena staza koja sadrži svaki brid tj. zatvorena staza koja prolazi svakim bridom točno jedanput. Graf je Eulerov ako dopušta Eulerovu turu.*

Definicija 3.2 *Usmjerena Eulerova tura na digrafu D je usmjerena zatvorena staza koja svakim lukom prođe točno jedanput.*

Teorem 3.1 *Povezani graf je Eulerov ako i samo ako mu je svaki vrh parnog stupnja.*

Dokaz 1. $\Rightarrow$ Neka je C Eulerova tura na G. Svaki put kada C "uđe" u vrh V, mora i izaći iz V. Točnije ako fiksiramo jednu orjentaciju obilaska Eulerovom turom C onda se skup bridova incidentnih s V može particionirati u 2 skupa ulazeći i izlazeći iz V i među njima postoji očita bijekcija.
$\Leftarrow$ prvo moramo pogledati najdužu moguću stazu u G i dokazati da je to Eulerova tura. Neka je dakle

$$T = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$$

najduža staza duljine m. Dovoljno je dokazati da je

a)$v_0 = v_m$
b)$E(G) = e_0, \ldots, e_m$.

Pretpostavimo da je $v_m \neq v_0$. Tada je v_0 incidentan s neparnim brojem bridova iz T. No,kako je $d_G(v_0)$ paran,postoji brid $e \in E(G) \setminus E(T)$ incidentan s v_0,pa bi T mogli produžiti tim bridom, što je u kontradikciji s izborom T. Time smo dokazali a)

b)uzimimo prvo da je $v(T) \neq v(G)$ i neka je $u \in V(G) \setminus V(T)$. Kako je G povezan, odmah slijedi da postoji brid $e = vv_k$,$v \notin V(T)$, $v_k \in V(t)$ tada imamo stazu

$$(v, e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$$

duljine m+1, što je kontradikcija s izborom T. Ako je V(T)= V(G), a $E(T) \neq E(G)$ neka je $e \in E(G \setminus E(T))$.Tada je e oblika $e = v_k v_l$ za neki k,l slično prethodnom slučaju sada imamo stazu,

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_l)$$

duljine m+1, opet kontradikcija.$\square$

Definicija 3.3 *Eulerova staza je staza koja prolazi svakim bridom grafa točno jednom(ne mora biti zatvorena).*

Korolar 3.1 *Povezan graf G ima Eulerovu stazu, ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja.*

Dokaz 2.Ako G ima Eulerovu stazu onda kao u u dokazu prethodnog teorema, svaki vrh koji nije početak ni kraj te staze ima paran stupanj.Ako G ima najviše 2 vrha neparnog stupnja, onda ih ima 0,1 ili 2. Ako ih ima 0 tj. svi su parnog stupnja,onda prema prethodnom teorem G ima zatvorenu Eulerovu stazu.Kako je $\sum d(v) = 2e(G)$, ne može biti samo jedan vrh neparnog stupnja, pa ako ih uopće ima mora ih biti točno 2, recimo u i v.Neka je e=uv novi(artificijelni) brid i promotrimo graf G+e.U tom su grafu svi vrhovi parnog stupnja, pa prema Teoremu 2.1 ima Eulerovu turu T.Tada je T-e Eulerova staza u G.□

Korolar 3.1 povlači sljedeću tvrdnju: Graf mostova u *Königsbergu* nema Eulerovu stazu.

"Konkretnu" primjenu Eulerovih grafova nalazimo u problemu kineskog poštara. "Problem" - poštar u poštanskom uredu pokupi poštu, odlazi je razdjeliti i vraća se u ured.Pritom on mora barem jednom proći svakom ulicom svoje četvrti, a želi odabrati rutu kojom će što manje hodati.
$\Rightarrow$ problem je ekvivalentan s time da se u povezanom težinskom grafu(G,w) s težinama $w(e) \geqslant 0$, $\forall e$ (to su duljine ulica) nađe Eulerova tura najmanje težine tzv. optimalna Eulerova tura.
Ako je G Eulerov graf, onda je svaka Eulerova tura na G optimalna, jer se njome svaki brid prijeđe točno jedan put. U tom slučaju problem kineskog poštara riješava se **FLEURYJEVIM ALGORITMOM** koji konstruira Eulerovu turu tako da počne u nekom vrhu i u svakom koraku bira vezni brid neprijeđenog podgrafa samo da nema alternative.

4. Hamiltonov ciklus

Prvi matematičar koji je proučavao obulazak svih vrhova grafova bio je irski matematičar William R. Hamilton(1805-1865).

W.R.Hamilton

Definicija 4.1 *Hamiltonov put na grafu je razapinjući put tj. put koj sadrži sve vrhove grafa.*

Definicija 4.2 *Hamiltonov ciklus je razapinjući ciklus grafa tj. ciklus koji sadrži sve vrhove grafa.*

$\Rightarrow$ Graf je Hamiltonov ako ima Hamiltonov ciklus.

Problem egzistencije i nalaženja Hamiltonovog ciklusa mnogo je teži i kompliciraniji nego analogan problem za Eulerovu stazu.Hamiltonovi i Eulerovi grafovi nemaju izravne veze.
Jedan od najvećih nerješivih problema teorije grafova je dati netrivijalan i zadovoljavajući nužan i dovoljan uvjet da graf bude Hamiltonov.Ustvari problem određnivanja jeli graf Hamiltonov je NP-potpun.

Propozicija 4.1 *Ako je G Hamiltonov graf, onda svaki pravi podskup $S \subseteq V(G)$ ima svojstvo da za broj komponenti $C(G-S)$ vrijedi $C(G-S) \leq\mid S \mid$*

Dokaz 3. Neka je Hamiltonov ciklus od G, a $\emptyset \neq S \subset V(G)$. Tada očito $C \setminus S$ ima najviše $\mid S \mid$ komponenti pa je $C(G-S) \leq\mid S \mid$. Kako je $C-S$ razapinjući podgraf od $G-S$ slijedi da je $C(G-S) \leq C(C-S)$ pa tvrdnja slijedi.$\square$

Primjer 4.1 *Dokažite da $K_{n,n+1}$ nije Hamiltonov i općenito je $K_{m,n}$ $m \neq n$ pa i općenito bipartitan graf s biparticijom (X, y) za koju je $\mid X \mid\neq\mid Y \mid$ nije Hamiltonov graf*

Dokaz primjera. Ako je $G = K_{n,n+1}$ s biparticijom (X, Y), $\mid X \mid= n$, $\mid Y \mid= n+1$. Uzmimo $S = X$. Tada je $C(G-S) = n+1$, a $\mid S \mid= n$ pa prema prethodnoj propoziciji G nije Hamiltonov ciklus.$\square$

Teorem 4.1 ***(Dirac,1952)*** *Neka je G jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova i minimalnim stupnjem $\delta \geq \frac{n}{2}$. Tada je G Hamiltonoc graf.*

NAPOMENA: Uvjet $\delta \leq n\backslash 2$ s ne može zamjeniti s n vrhova $\delta \leq \llcorner n\backslash 2 \lrcorner$ što pokazuje $G = K_{\llcorner n\backslash 2 \lrcorner, \ulcorner n\backslash 2 \urcorner}$

Korolar 4.1 *Ako je G jednostavan graf s n vrhova i $\delta \geq \frac{(n-1)}{2}$ onda G ima Hamiltonov put.*

<u>Dokaz</u> Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna. Za $n \geq 2$ dodajmo vrh u. Graf $H = G + v$ ima n+1 vrh i minimalni stupanj $\geq \frac{(n+1)}{2}$. Iz Diracovog teorema slijedi da H ima Hamiltonov ciklus C. Tada je $C - v$ Hamiltonov put u G.□

Teorem 4.2 ***(B.Bollobás i dr, 1993)*** *Neka je G jednostavan graf s n vrhova,a S skup svih vrhova iz G stupnja barem $n\backslash 2$.Ako je $\mid S \mid \geq 3$,onda G ima ciklus koji sadrži sve vrhove iz S. (za $S = V(G)$ dobivamo Diracov teorem)*

<u>Dokaz</u>.Zaključivanje je slično dokazu Diracovog teorema, pa nećemo iznijeti sve detalje. Neka je C ciklus koji ima najveći mogući broj vrhova iz S. Pretpostavimo da je $S\backslash V(C) \neq \emptyset$ i neka je $C \cup P$ jedan (x, y)-put, gdje je $x \in S$. Ciklus C ima bar dva vrha iz S, jer svaka dva nesusjedna vrha iz S leče na 4-ciklusu u G. Neka je z prvi vrh iz S poslije y na C. Tada kao u dokazu Diracovog teorema, izbor ciklusa C povlači da je $d(x) + d(z) \leq n - 1$, što je kontradikcija.□

Kada malo bolje pogledamo dokaz Diracovog teorema vidimo da iz tog dokaza slijedi i sljedeće:

Teorem 4.3 ***(O.Ore,1968)*** *Neka je G jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova, takav da je za svaka dva nesusjedna vrha, zbroj njihovih stupnjeva barem n. Tada je G Hamiltonov graf.*

⇒ Oreov teorem se zapravo dokazuje pomoću sljedeće leme

Lema 4.1 *Neka je G jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova, a x i y nesusjedni vrhov iza koje je $d(x) + d(y) \geq n$. Tada je G Hamiltonov ako i samo ako je $G + xy$ Hamiltonov.*

<u>Dokaz</u>.Jasno, ako je G Hamiltonov, onda je i $G + xy$ Hamiltonov.Obratno, ako je $G + xy$ Hamiltonov, a pretpostavimo li da G nije Hamiltonov, onda kao u dokazu Diracovog teorema dobivamo $d(x) + d(y) \leq n - 1$,suprotno pretpostavci.□

Iz ove Leme proizlazi definicija zatvarača grafa $\Rightarrow$Zatvarač grafa G na n vrhova je graf dobiven iz G rekurzivnim spajanjem parova nesusjednih vrhova čija je suma stupnjeva $\geq n$.

Teorem 4.4 ***(V.Chvataál, 1972)*** *Neka je G jednostavan graf na $n \geq 3$ vrhova i nizom stupnjeva $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.Pretpostavimo da vrijedi*

$$d_k \leq k < n\backslash 2 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$$

Tada je G Hamiltonov graf.

Dokaz.Pokazat ćemo da je zatvarač od G potpun, pa će tvrdnja slijediti iz prethodnje Leme. Pretpostavimo da G nije Hamiltonov graf i neka je H zatvarač od G. Tada je suma stupnjeva svaka dva nesusjedna vrha iz H najviše $n-1$. Neka su x i y dva takva vrha s najvećom sumom stupnjeva. Uzmimo da je $d_H(x) \leq d_H(y)$ i neka je $d_H(x) = k$. Tada je $k \leq (n-1)\backslash 2$, a $d_H(y) \leq n-k-1$.Promotrimo sljedeće skupove:

$X := \{v \in V(G) \mid v \nsim y \text{ u } H\}$, $Y := \{w \in V(G) \mid w \nsim x \text{ u } H\}$

Tada je $\mid X \mid = n-1-d_H(y) \geq k$, a i zbog izbora x i y slijedi $d_G(v) \leq d_H(v) \leq k, \forall v \in X$. Slično je $\mid Y \mid = n-k-1$ i $d_G(w) \leq n-k-1, \forall w \in Y$ Prema tome, G ima barem k vrhova stupnja barem k i barem $n-k$ vrhova stupnja barem $n-k-1$.To proturječi pretpostavci, pa je zatavarač od G potpun i tvrdnja slijedi.$\square$

Korolar 4.2 *Neka je G jednostavan graf na $n \geq 3$ vrhova s nizom stupnjeva $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.Ako vrijedi $(\imath)$ ili $(\imath\imath)$, onda je G Hamiltonov. Pritom je*

$(\imath)$ ***(Posa)*** $d_k \geq k+1$, *za* $k < n\backslash 2$

$(\imath\imath)$***(Bondy)***$d_k \leq k, d_l \leq l \Rightarrow d_k + d_l \geq n$

Dokaz.Ako vrijedi $(\imath)$ onda vrijedi $d_k \leq k < n\backslash 2 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$.Ako vrijedi $(\imath\imath)$, neka je $d_k < k \leq n\backslash 2$ i $l = n-k$.Tada je ili $d_l \geq l$ ili $d_k + d_l \geq l + k = n$, pa stoga $d_{l)>l}$, pa stoga opet vrijedi $d_k \leq k < n\backslash 2 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$ i zato je Hamiltonov.$\square$

Za neki niz realnih brojeva $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$kažemo da je majoriziran nizom$(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ako je $p_i \leq q_i$, za sve i. Ako su G i G' grafovi s $v(G) = v(G' = n)$ i nizom stupnjeva $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$,$d'_1 \leq d'_2 \leq \ldots \leq d'_n$ redom, onda kažemo da je G stuspnjevima majoriziran s G', ako je $d_i \leq d'_i$, za svako i. Spoj $G * H$ disjunktnih grafova G i H dobije se tako da se svaki vrh iz G spoji jednim bridom sa svakim vrhom iz H. Za $1 \leq m < n\backslash 2$, neka je $C_{m,n} := K_m * (K_m^C \cup K_{n-2m})$.

Lema 4.2 *$C_{m,n}$ nije Hamiltonov, a niz stupnjeva mu je*

$$(\underbrace{m, \ldots, n}_{m},\underbrace{n-m-1, \ldots, n-m-1}_{n-2m},\underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{m})$$

Dokaz.Neka je S skup svih vrhova $C_{m,n}$ stupnja $n-1$. Tada je $\emptyset \neq S \subset V(C_{m,n})$ i $c(C_{m,n)-S)=m+1>|S|}$, pa $\Rightarrow C_{m,n}$ nije Hamiltonov.$\square$

Korolar 4.3 *Ako je G ne-Hamiltonov jednostavan graf s $n \geq 3$ vrhova, onda je G stupnjevima majoriziran s nekim $C_{m,n}$*

Dokaz.Neka je $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ od G.Iz prethodnog teorema slijedi da postoji $m < n\backslash 2$, tako da je $d_n \leq m$, a $d_{n-m} < n-m$. Odatle slijedi da je $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ majoriziran nizom $(\underbrace{m, \ldots, n}_{m},\underbrace{n-m-1, \ldots, n-m-1}_{n-2m},\underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{m})$ $\square$

Korolar 4.4 *Neka je G jednostavan graf s $n \leq 3$ vrhova i brojem bridova $e(G) > \binom{n-1}{2} + 1)$.Tada je G Hamiltonov grag. Jedini jednostavan ne-Hamiltonov graf s n vrhova i $\binom{n-1}{2} + 1$ bridova je $C_{1,n}$ i za $n = 5, C_{2,5}$.*

Dokaz.Iz prethodnog korolara slijedi da je G stupnjevno majoriziran s nekim $C_{m,n}$, gdje je $0 < m < n\backslash 2$

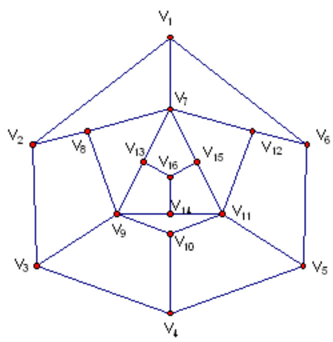
$$e(G) = e(C_{m,n}) = \frac{1}{2}[m^2+(n-2m)(n-m-1)+m(n-1)] = \binom{n-1}{2}+1-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

$$-(m-1)(n-2m-1) \leq \binom{n-1}{2} + 1$$

odakle slijedi prva tvrdnja.
Nadalje, u prvoj nejednakosti može nastupiti jednakost samo ako G ima isti niz stupnjeva kao$C_{m,n}$, a u drugoj nejednakosti nastupa jednakost ako i samo ako je $m = 1$ ili $m = 2, n = 5$.Stoga je $e(G) = \binom{n-1}{2} + 1$ ako i samo ako G ima isti niz stupnjeva kao $C_{1,n}$ ili $C_{2,5}$, a odavde se lako vidi da mora biti $G \approx C_{1,n}$ ili $G \approx C_{2,5}$.□

⇒ Da bi ustanovili ima li neki graf Hamiltonov ciklus ili Hamiltonov put, često treba primjeniti neku ad hoc metodu.

Primjer 4.2 *Graf G na donjoj slici nema Hamiltonov put.Dokazati*



Dokaz primjera.Svaki Hamiltonov put sadrži najviše dva brida incidentna nekom vrhu. Vrh v_7 grafa G ima stupanj 5, pa stoga baream tri brida incidentna s v_7 nisu u Hamiltonovom putu. To isto vrijed i za vrhove v_9 i v_{11}.Stupnjevi vrhova v_2, v_4, v_6, v_{16} jednaki su 3 pa barem jedan brid incidentan svakom tom vrhu nije u Hamiltonovom putu. Prema tome ako G sadrži Hamiltonov put, nda na tom putu ne smije biti barem 13 od ukupno 27 bridova od G.Budući da G ima 16 vrhova, a Hamiltonovom bi putu od G trebalo barem 15 bridova.Dakle, G nema Hamiltonov put.□

4.1. Usmjereni Hamiltonovi putovi i ciklusi

Usmjereni Hamitonov put u digrafu D je usmjereni put (tj. diput) koji sadrži sve vrhove iz D.Osnovni rezultat ovdje je teorem o turnirima.

Definicija 4.3 *Turnir je potpuni usmjereni graf.*

Definicija 4.4 *Digraf D je striktan ako nema petlji i nikoja dva luka s istim krajevima nemaju istu orjentaciju.*

Teorem 4.5 *(**Rédei,1934**) Svaki turnir ima usmjereni Hamiltonov put.*

Da bi smo dokazali ovaj teorem, potrebna nam je sljedeća Lema.

Lema 4.3 *Neka je D striktni digraf, $P(x, y)$-diput u D duljine $l, v \in V(D)\backslash V(P))$, a $d_p(v)$ broj lukova iz D s jednim krajem v, a drugim iz P. Tada*

$(\imath)$Ako postoji (x, y)-diput P', tako da je $(V(P') = V(P) \cup \{v\})$, onda je $d_p(v) \leq l + 2$;
$(\imath\imath)$Ako je P najdulji diput u D, onda je $d_p(v) \leq l$.

Dokaz.$(\imath)$Neka je $P = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$,$v_0 = x$, $v_l = y$.Promotrimo skupove $X := \{v_i \in V(P)\backslash\{v_0\} \mid (v, v_i) \in A(D)\}$,$Y := \{v_i \in V(P)\backslash\{v_0\} \mid (v_{i-1}, v) \in A(D)\}$. Tada je $X \cup Y \subseteq \{v_0, v_2, \ldots, v_l$ .Tvrdimo da je $X \cap Y = \emptyset$.Naime, kad bi postojao $v_i \in X \cap Y$,onda bi postojao (x, y)-diput

$$P' = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_i, \ldots, v_l)$$

suprotno pretpostavci.
Tada imamo

$$d_p(v) \leq\mid X \mid + \mid Y \mid +2 =\mid X \cup Y \mid + \mid X \cap Y \mid +2 \leq l + 2.$$

$(\imath\imath)$Ako je P najdulji put u D, onda ni (v, v_0)ni (v_l, v) ne mogu biti lukovi od D, jer bi u protivnom imali još dulje dipute.Stoga kao gore zaključujemo $d_p(v) \leq\mid + \mid\leq l$.$\square$

<u>Dokaz teorema</u>.Neka je T turnir, a P najdulji diput u T duljine l.Kad P ne bi bio Hamiltonov,onda bi postojao vrh $v \in V(T) \backslash V(P)$.Kako je T turnir,imamo $d_p(v) = l + 1$,a iz Leme ($\imath\imath$) znamo da je $d_p(v) \leq l$.To je kontradikcija, pa je P Hamiltonov diput na T.$\square$ $\Rightarrow$Poopćenje Rédeiovog teorema je sljedeći teorem:

Teorem 4.6 ***(Camion,1959)*** *Turnir je jako povezan ako i samo ako ima usmjereni Hamiltonov ciklus.*

<u>Dokaz</u>.Ako turnir ima Hamiltonov ciklus,ond aje očito jako povezan.Neka je T jako povezan turnir, a $C = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ diciklus maksimalne duljine u T.Takav postoji,jer je aciklički turnir nije nako povezan.Pretpostavimo da C nije Hamiltonov i neka je $v \in V(T) \backslash V(C)$.Neka je $(v_0, v) \in A(T)$.Ako je $(v, v_1) \in A(T)$, onda je $(v_0, v, v_1, \ldots, v_l)$ dulji diciklus od C.Zato je $(v_0, v) \in A(T)$ i slično $(v_i, v) \in A(T)$,$i = 1, \ldots, l$.Neka je $X = \{x \in V(T) \mid (v_0, x) \in A(T)\}$.Tada je$(v_i, x) \in A(T), \forall x \in X$.Neka je $(x, y) \in A(T)$ luk za koji je $x \in X, y \notin X$.Tada $y \notin C$,pa stoga $y \notin X$ povlači $(y, v_0) \in A(T)$.No, tada je $(x, y, v_0, \ldots, v_l)$ diciklus dulji od C.$\square$

$\Rightarrow$ Drugo poopćenje Rédeiovog teorema je sljedeće:

Teorem 4.7 *Na svakom turniru ima neparan broj Hamiltonovih putova.*

Da bi smo dokazali ovaj teorem potrebno nam je: Neka je $D = (V, A)$ striktan digraf na skupu vrhova $V = 1, 2, \ldots, n$, a π permutacija od V. Definirajmo skup $A_\pi \subseteq A$ ovako:

$$A_\pi := A \cap (\pi(\imath), \pi(\imath + 1)) \mid \imath = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Tada A_π inducira digraf čije su komponente diputovi i zove se **sistem diputova**

Lema 4.4 *Neka je S_n skup svih permutacija od V, a H skup svih Hamiltonovih diputova na D. Za podskup $X \subset A$ definirajmo $f(X) := \{\pi \in S_n \mid X = A_\pi\}$, $h(X) := \{H \in H \mid X \subseteq A(H)\}$. Tada je $f(X) \equiv h(X) mod 2$.*

Dokaz Leme.Definirajmo $g(X) := \{\pi \in S_n \mid X \subseteq A_\pi\}$.Tada je $g(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq A} f(Y)$.Iz formule uključivanja-isključivanja slijedi da je

$$f(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq A} (-1)^{|Y|-|X|} g(Y)).$$

Primjetimo da je $g(Y) = r!$ ako i samo ako je razapinjući podgraf od D sa skupom lukova Y sistem diputova s r komponenti.Stoga je $g(Y)$ neparan ako i samo ako Y inducira neki Hamiltonov diput H od D.Stoga je

$$f(X) := \sum_{H \in H, X \subseteq A(H)} (-1)^{n-1-|X|} \equiv h(X)(mod 2).\square$$

Dokaz Teorema.Teorem očito vrijedi za acikličke turnire, jer svaki takav ima očito točno jedan Hamiltonov diput.No svaki se turnir može iz acikličkog dobiti preorjentacijom nekih lukova.Stoga je dovoljno dokazati da se broj $h(T)$ Hamiltonovih diputa na turniru T ne mjenja, ako mu preorjentiramo neki luk a.Uzmimo u prethodnoj Lemi da je $X = a$.Tada je $f(a) \equiv h(a)(mod 2)$.Ako je turnir t' dobiven iz turnira T preorjentacijom luka a,onda iz definicije f i h slijedi

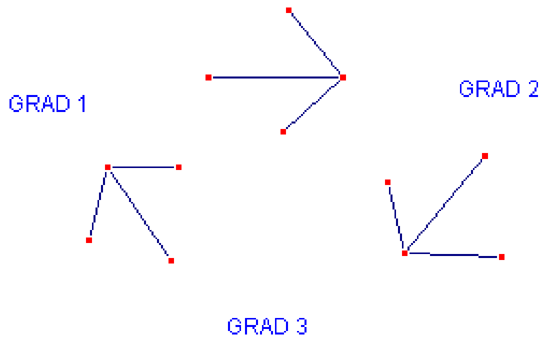
$$h(T' = h(T) + f(a) - h(a) \equiv h(T)(mod 2)).\square$$

Teorem 4.8 *Neka je D striktan jako povezan digraf na $n \geq 2$ vrhova, tako da je suma stupnjeva svaka dva nesusjedna vrha barem $2n-1$.Tada D ima Hamiltonov diciklus.*

4.2. Problem trgovačkog putnika

William R.Hamilton 1856. godine postavio je problem trgovqčkog putnika.Treb aobići neke gfradove i vratiti se na mjesto polaska tako da svaki grad posjeti točno jednom(i svakom cestom prođe najviše jednom).On je imao u vidu korektnu igru "put oko svijeta" na grafu dodekaedra,a ceste između gradova bridovi su dodekaedra.
Do danas nije poznat efikasni algoritam za rješavanje problema trgovačkog putnika.Jedan od pristupa je da na potpunom grafu sa zadanim teži ciklus najmanje težine.

Primjer 4.3 *Jedan kružni put između tri grada*



putnik.eps putnik.eps

PUT IZMEĐU TRI GRADA

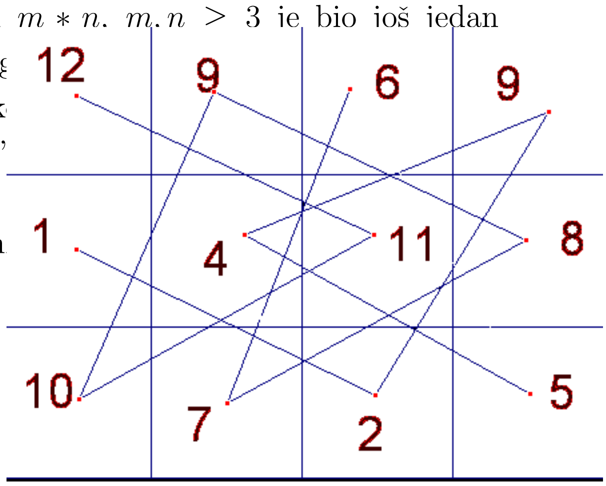
Ako imamo tri grada imamo dva kružna puta: $1-2-3-1$ Grad 1 je prethodnik od grada 2,grad 2 je sljedbenik od grada 1... $1-3-2-1$ Grad 1 je prethodnik od grada 3,grad 3 je sljedbenik od grada 1.....

$\Rightarrow$ Kada imamo n gradova, imamo $(n-1)!$ putova

4.3. Problem konjičevog skoka

Problem konjičevog skoka je na šahovskoj ploči $m*n$. $m.n > 3$ je bio još jedan izvor zanimanja za probleme koji su bazirani na g skakačem obići svako polje ploče tako da na svak riječima,postoji li na pridruženom grafu "konjičev" van osim kod ploča $3*3$,$3*5$,$3*6$,$4*4$.

Kao primjer ćemo uzeti šahovsku ploču dimen



skok.eps skok.eps

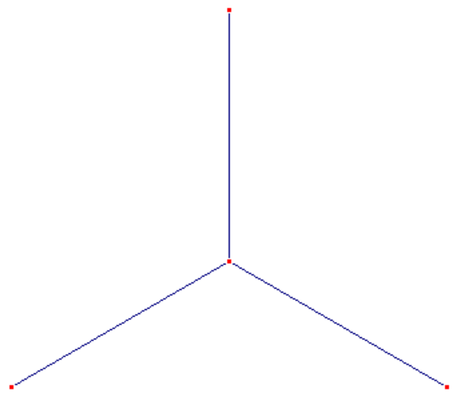
SAHOVSKA PLOCA 3*4

Ako je n nepaan broj, dokazati da nije moguće obići sva polja šahovske ploče dimenzije $n*n$ skakačem, tako da na svako polje šahovske ploče skakač skoči jednom i da se početno polje može neposredno, u jednom potezu dostići sa završnog.

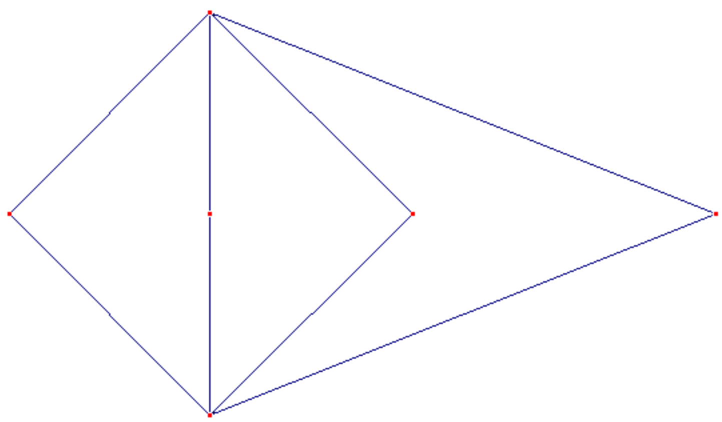
⇒ Potrebno je dokazati da graf G pridružen skakaču ne sadrži Hamiltonov ciklus.Budući da skakač uvijek prelazi sa polja jedne boje na polja druge boje, G je očito bikromatski graf.

Definicija 4.5 *Graf je bikromatski ako se može obojiti sa dvije boje.*

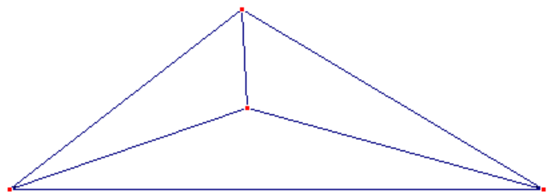
5. Primjeri Hamiltonovih ciklusa i Eulerovih tura



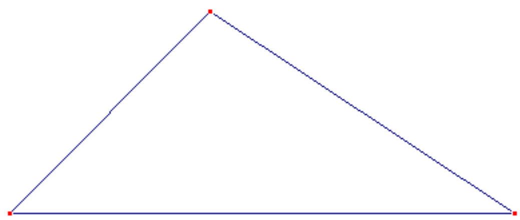
Hraf nije Eulerova tura,niti Hamiltonov ciklus



Graf je Eulerova tura,ali nije Hamiltonov ciklus



Graf nije Eulerova tura,ali je Hamiltonov ciklus



Graf je Eulerova tura i Hamiltonov ciklus

Literatura

[1] D.Veljan,Konačna matematika s teorijom grafova,Algoritam,Zagreb,2003

[2] D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb,2001

[3] Graph Theory Resources http://www.graphtheory.com/