Matematička magija

Manuela Pavić *

Osijek, 2012.

Sažetak. Mnogi se mađioničarski trikovi temelje na matematici kao npr. trikovi s brojevima, kartama, kockama i trakama. Opće je poznato sa su mađioničarski trikovi većinom bazirani na varanju, no za razliku od njih u matematičkim trikovima nema klasičnog varanja već za svaki trik postoji odgovarajuće objašnjenje. Većina matematičkih trikova se može izvoditi u bilo koje vrijeme bez posebnih priprema. U ovom je članku navedena nekolicina matematičkih trikova, te matematičke tajne koje stoje iza njih.

Ključne riječi: Matematički trikovi, Aritmetka, Topologija, Algebra.

Mathematical magic

Abstract. Many magician tricks are based on mathematics, like tricks that include numbers, cards, dice and ribbons. It is, generally, well known that magician tricks are mostly based on cheating, but, in spite of that, in mathematical tricks there's no literal cheating, yet, there is adequate explanation for every trick. Most of mathematical tricks can be performed at any time without special preparations. In this article several mathematical tricks are presented, as are the mathematical secrets behind them.

Key words: Mathematical tricks, Arithmetics, Topology, Algebra.

1 Matematički trikovi

1.1 Trikovi u aritmetici

Aritmetika je grana matematike koja proučava računske operacije s brojevima. Dolazi od grčke riječi *arithmetike*, koja se sastoji od riječi: *arithmos* (broj) i *techne* (umijeće). S brojevima možemo izvoditi sedam računskih operacija: zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje. U aritmetici je definiran redoslijed izvođenja računskih operacija.

1.1.1. Računski trikovi

Trik 1. Izvođač trika daje sljedeće upute sudioniku u triku:
"Zamisli dva jednoznamenkasta broja. Prvi broj pomnoži s 5, umnošku dodaj 3, te zbroj

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, Osijek, Hrvatska, e-mail: `mpavic@mathos.hr`

pomnoži s 2. Broju koji si dobio dodaj drugi broj koji si zamislio. Nakon toga reci mi rezultat.”
Iz rezultata izvođač trika odmah zna prvi i drugi broj koji je sudionik zamislio.

Objašnjenje: Ako s x označimo prvi broj koji je sudionik u triku zamislio, a s y drugi odabrani broj, onda je rezultat gornjih operacija $2 \cdot (5x+3)+y = 10x+6+y$. Od sveukupnog rezultata oduzmemo 6, pa ostane $\overline{xy}$, odnosno dvoznamenkasti broj u dekadskom sustavu kojem je prva znamenka x, a druga y.

Trik 2. Dva sudionika u triku sjede na suprotnim stranama stola, a izvođač trika im daje iduće upute:
”Neka svatko od vas odabere po jedan broj između 1 i 9. Prvi od vas neka udvostruči broj koji je zamislio, doda mu broj 2, zbroj pomnoži s 5, umnošku doda broj koji je odabrao drugi. Prvi sudionik neka mi kaže rezultat koji je dobio!”
Iz tog broja izvođač trika odmah pogađa zamišljene brojeve (od rezultata oduzima 10, prva znamenka je prvi broj, a druga znamenka drugi).

Objašnjenje: Ako broj koji je odabrao prvi sudionik u triku označimo s x, a broj koji je izabrao drugi sudionik s y slijedi da je rezultat kojeg dobije prvi sudionik jednak $5(2x+2)+y = 10x+y+10$.

Trik 3. Izvođač trika pogađa godine sudionika u triku, te njegovu ocjenu iz matematike. Upute koje izvođač trika daje sudioniku u triku su:
”Svoju ocjenu iz matematike pomnoži s 2. Dodaj tome 5. Zbroj pomnoži s 50. Ako si ove godine već imao rođendan umnošku dodaj 1762, a ako nisi dodaj 1761. Na kraju od svega oduzmi svoju cijelu godinu rođenja i kaži mi rezultat.”
Zadnje dvije znamenke rezultata su godine od sudionika, a prva znamenka je ocjena iz matematike.

Objašnjenje: Ako s x označimo sudionikovu ocjenu iz matematike, dobivamo $[50 \cdot (2x+5)] + 1762$ ili $[50 \cdot (2x+5)] + 1761$, tj. $100x + 2012$ odnosno $100x + 2011$. Oduzimanjem godine rođenja dobivamo $100x+$ starost sudionika.

Trik 4. Izvođač trika pogađa količinu novca koju sudionik ima u džepu. Pritom izvođač trika daje iduće upute sudioniku u triku:
”Zamisli bilo koji broj, udvostruči ga i pribroji mu 8. Rezultat podijeli s 2, od kvocijenta oduzmi broj koji si zamislio i na kraju razlici pribroji koliko kuna imaš u džepu. Što si dobio?”
Nakon toga izvođač trika odmah objavljuje koliko kuna sudionik ima u džepu (oduzme 4 od rezultata).

Objašnjenje: Ako je x odabrani broj, a y broj kuna u džepu, slijedi da će izvođač u triku izračunati $\left(\frac{2x-8}{2} - x\right) + y = y + 4$. tj. dobiveni rezultat je za 4 veći od broja kuna u džepu.

1.1.2. Trikovi s kalendarima

Trik 5. Sudionik u triku uzima kalendar i u njemu odabire 3 puta 3 kvadrat, te govori izvođaču trika prvi broj iz prvog retka zaokruženog kvadrata. Izvođač trika kaže zbroj svih zaokruženih brojeva.

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29					

Slika 1.

Objašnjenje: Zaokruženi brojevi su $a, a+1, a+2, a+7, a+8, a+9, a+14, a+15, a+16$. Nas zanima srednji član toga niza $a+8$ jer je zbroj svih članova niza jednak umnošku srednjeg člana niza i 9, odnosno $S_n = \frac{9}{2}(a+a+16) = 9a+72 = 9(a+8)$. Dakle, izvođač samo prvom broju treba pribrojiti 8 i taj zbroj pomnožiti s 9.

Definicija 1. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza iznosi $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

1.2 Trikovi u teoriji brojeva

Teorija brojeva je grana matematike koja se bavi proučavanjem svojstava:

- skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$,
- skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ i
- skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Definicija 2. Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b djeljiv s a odnosno da a dijeli b ako postoji cijeli broj x takav da je $b = a \cdot x$.

Definicija 3. Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, onda kažemo da je a kongruentan b modulo m i pišemo $a \equiv b (mod\, m)$.

Teorem 1. Ako je broj a djeljiv s brojem b, onda je i svaki višekratnik broja a djeljiv brojem b.
Dokaz: Ako je $a = bc$, onda slijedi da je i $an = bcn$.

Teorem 2. Da bi zbroj $a + b$ bio djeljiv s c, dovoljno je da svaki od pribrojnika bude djeljiv s c.
Dokaz: Ako je $a = cm$ i $b = cn$ onda vrijedi i $a + b = c(m + n)$.

1.2.1. Trikovi sa složenim brojevima

Trik 6. Izvođač trika pogađa godine starosti sudionika u triku. Upute koje izvođač trika daje sudioniku u triku:
"Zamisli svoj sretan broj, pomnoži ga s 9, umnošku pribroji svoje godine i kaži rezultat."
Iz toga podatka izvođač pogađa godine sudionika u triku (jednake su zbroju ostatka pri dijeljenju rezultata s 9, odnosno $9, 18, 27$, ...)

Objašnjenje: Ako je x sretan broj, a y godine sudionika u triku, operacije koje je sudionik provodio su $x \cdot 9 + y$. Tražimo ostatak pri dijeljenju broja $9x + y$ s 9 tako da zbrajamo znamenke toga broja sve dok ne dobijemo jednoznamenkasti broj koji je ujedno ostatak dijeljenja i označimo ga s w. Iz niza $w, w + 9, w + 2 \cdot 9, w + 3 \cdot 9, \dots$ procijenit ćemo starost sudionika u triku.

Trik 7. Izvođač trika daje upute sudioniku u triku:
"Zamisli troznamenkasti broj koji ima sve znamenke različite, ispiši svih šest mogućih kombinacija od po dvije od tih znamenki. Zbroji te dvoznamenkaste brojeve.Zatim zbroji i znamenke troznamenkastog broja koji si zamislio, te s tim zbrojem podijeli zbroj dvoznamenkastih brojeva."
Izvođač pogađa da je sudionikov rezultat 22.

Objašnjenje: $\overline{abc}, \quad a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad a \neq b \neq c, \quad a \neq 0$

$$\overline{ab} = 10a + b, \quad \overline{ac} = 10a + c, \quad \overline{ba} = 10b + a,$$
$$\overline{bc} = 10b + c, \quad \overline{ca} = 10c + a, \quad \overline{cb} = 10c + b.$$
$$10a + b + 10a + c + 10b + a + 10b + c + 10c + a + 10c + b =$$
$$22a + 22b + 22c = 22(a + b + c)$$

1.2.2. Trikovi s kartama

Trik 8. Trik se izvodi s 21 kartom iz kompleta igraćih karata. Izvođač trika daje iduće upute sudioniku u triku:
"Odaberi jednu kartu koja se nalazi u tih 21. Vrati kartu u komplet i promiješaj karte."
Nakon toga izvođač trika karte dijeli u tri stupca (poleđinom dolje), stavljajući karte redom na prvi, drugi, pa treći stupac sve dok nije rasporedio sve karte.
"U kojem stupcu se nalazi karta koju si odabrao?"
Izvođač trika taj stupac sa odabranom kartom stavlja između dva preostala i postupak dijeljenja s međuupitom ponavlja još dva puta.
Naposljetku otvara jednu po jednu kartu iz "špila" i pogađa odabranu kartu (nalazila se na 11. mjestu među svim kartama, tj. u sredini).

Objašnjenje: Kartama složenima u "špil" pridružimo oznake redom počevši od gornje lijeve $a_0, a_1, \dots, a_{20}$ po redovima.
Neka je npr. a_6 odabrana karta. Ako indeks te karte pri dijeljenju s 3 daje kvocijent k

onda ta karta dolazi prvim dijeljenjem na poziciju k u svom stupcu ($k \in 0, \dots, 6$).
Sada gledamo ostatak pri dijeljenju, označit ćemo ga sa v ($a_6 \equiv v(mod 3)$). Ako vrijedi da je $v = 0$ karta će se nalaziti u 1. stupcu, ako $v = 1$ u 2. stupcu, odnosno ako je $v = 2$ u 3. stupcu.
Nakon preslagivanja karta dolazi na mjesto $7 + k$ između svih karata. Pozicija karte nakon drugog dijeljenja ponovno će biti određena kvocijentom k' pri dijeljenju s 3 ($k' \in \{2, 4\}$).
Preslagivanjem karta dolazi na $7 + k'$ mjesto.
Treće dijeljenje promatramo na isti način. Kvocijent k'' pri dijeljenju s 3 nakon trećeg dijeljenja jednoznačno je određen, odnosno $k'' = 3$. Preslagivanjem karta dolazi na poziciju $7 + k''$, to jest postaje jedanaesta karta u špilu.

1.3 Trikovi u algebri

- Elementarna algebra je matematička disciplina koja zahtjeva poznavanje aritmetike.
- Linearna algebra je matematička disciplina koja se bavi vektorima i matricama te općenito vektorskim prostorima i linearnim transformacijama.

Grupa je neprazan skup G zajedno s binarnom operacijom $\cdot$, kojom dvama elementima x i y iz G pridružujemo element $x \cdot y$ u G, tako da vrijedi:

a) $x(yz) = (xy)z$ za sve $x, y, z \in G$ (asocijativnost);

b) postoji element $e \in G$ tako da za sve $x \in G$ vrijedi $xe = ex = x$ (e zovemo neutralnim elementom);

c) za svaki $x \in G$ postoji element x^{-1} takav da je $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ (x^{-1} zovemo elementu x inverznim elementom).

Kraće govorimo o grupi kao o uređenom paru $(G, \cdot)$ s gornjim svojstvima.
Ako vrijedi još i

d) $xy = yx$ za sve $x, y \in G$, za grupu kažemo da je komutativna ili Abelova grupa.

1.3.1. Trikovi s novcem

Trik 9. Za trik je potrebna jedna novčanica. Znamo da svaka hrvatska novčanica ima jedinstveni serijski broj koji se sastoji od sedam znamenaka.
Izvođač trika daje sljedeće upute sudioniku u triku:
"Uzmi jednu novčanicu i zapiši pripadajući joj serijski broj. Zatim zbroji prvu znamenku toga broja s drugom, drugu s trećom, treću s četvrtom, itd. i na kraju zbroji sedmu s prvom. Sada mi redom govori zbrojeve koje si dobio."
Izvođač trika zapisuje te brojeve.
Nakon što je zapisao redom izgovara svih sedam znamenki serijskog broja s novčanice.

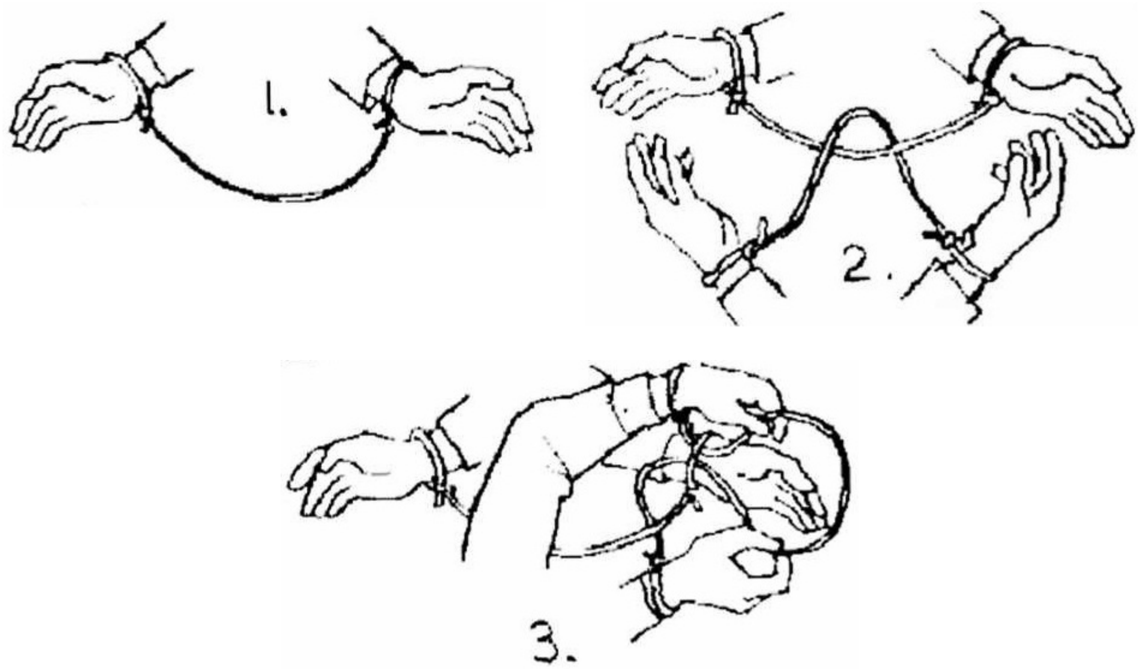
Objašnjenje: Zadatak je riješiti sustav sa 7 linernih jednadžbi i 7 nepoznanica, ali u što kraćem vremenu. Znamenke serijskog broja označimo redom slovima a, b, c, d, e, f, g. Sustav rješavamo tako da zbrojimo prvi, treći, peti i sedmi zbroj ($x = a+b+c+d+e+f+g+a = 2a+b+c+d+e+f+g$), zatim drugi, četvrti i šesti ($y = b+c+d+e+f+g$). Od prvog zbroja oduzmemo drugi ($x-y = 2a+b+c+d+e+f+g-b-c-d-e-f-g = 2a$), rezultat podijelimo s 2 i dobivamo prvu znamenku a.
Znamenku b dobivamo tako da od prvog zbroja oduzmemo a, znamenku c tako da od drugog zbroja oduzmemo b, itd.

1.4 Trikovi u topologiji

- Topologija (grč. *topos*=mjesto, *logos*=proučavanje) je matematička disciplina srodna geometriji.
- Dva lika (tijela, objekta) su topološki ekvivalentna ako se jedan može prevesti u drugi neprekidnom transformacijom odnosno homeomorfizmom ("gumena geometrija").

1.4.1. Trikovi s konopima

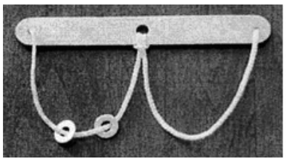
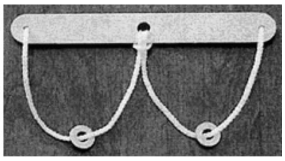
Trik 10. Za izvođenje ovoga trika trebamo dva konopa duljine oko jednog metra. U triku sudjeluju dvije osobe. Na svakom od konopa napravimo na krajevima po dvije omče za ruke. Obje osobe ih stavljaju na ruke (Slika 2.) kao na slici označenoj s 1., ali na način da budu povezane kao na slici označenoj s 2.



Slika 2.

Zadatak je da se te dvije osobe odvoje bez odvezivanja ili rezanja konopa. Kako to izvesti prikazano je na gornjoj slici označenoj s 3.
Topološki gledano te dvije osobe niti nisu bile međusobno povezane jer je odvajanje izvedivo bez rezanja i odvezivanja.

Trik 11. Ovo je jedan klasičan topološki trik koji se sastoji u tome da jedan od prstena s lijevog dijela treba prebaciti na desni. Rezanje i odvezivanje nije dozvoljeno, a rupa u sredini pločice je premala da prsten prođe kroz nju.
Rješenje se sastoji u tome da se čvor koji se nalazi u sredini provuče kroz rupu na drugu stranu te se prsten s te strane prebaci.

 → 

SLIKA 3.

1.4.1. Trikovi s kovanicama

Trik 12. Da bismo izveli ovaj topološki trik potrebna su nam dva kovana novčića, npr. novčići od jedne lipe i pet kuna (opseg manjeg mora biti manji od dvostrukog promjera većeg novčića) i list papira na kojem smo izrezali rupu opsega manjeg novčića. Postavlja se pitanje je li moguće veći novčić provući kroz tu rupu bez rezanja papira?

Objašnjenje: Rezultat se sastoji u tome da preklopimo papir točno preko rupe i tada pažljivo provlačimo novčić kroz rupu. To je moguće jer se preklapanjem papira preko rupe rupa malo proširuje što dovodi do toga da veći novčić prolazi kroz nju kao i manji.

- Veličina u topologiji nema nikakvo značenje.

1.5 Trikovi u geometriji

- Geometrija (grč. $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$: *geo*=zemlja, *metria*=mjerenje) je grana matematike koja se bavi proučavanjem likova u ravnini (planimetrija) i tijela u prostoru (stereometrija).
- Osnovni pojmovi geometrije su: točka, pravac, ravnina i prostor.
- *Euklidovi Elementi* (3. st. pr. Kr.)
- Pierre de Fermat i René Descartes u 17. st. izgradili su analitičku geometriju koja povezuje algebru i geometriju.
- Postoje geometrjski trikovi u kojima rezanjem, pomicanjem i preslagivanjem dijelova naizgled nestaje upravo neki od njih.

1.5.1. Geometrijska nestajanja

Trik 13. Za trik je potreban karton s ucrtanim kvadratnim poljem od 64 kvadratića, odnosno 8×8 kvadratića. Razrežemo taj karton po spojnici i tako dobijemo dva dijela, dio A i dio B.
Dio B pomaknemo za jedno mjesto ulijevo, vidimo da na gornjem desnom kraju strši jedan trokutić kojeg odrežemo i umetnemo na suprotan kraj na kojem nedostaje. Dobivamo kvadratno polje sa 63 kvadratića, odnosno 7×9 polja što znači da jedan kvadratić nedostaje.

Objašnjenje: Veličina kvadratića uz liniju rezanja nakon preslagivanja se gotovo neprimjetno promijeni.
Kvadrati tada postaju veći za 1/7 površine od polaznih kvadratića.

Trik 14. Trokut razrežemo po linijama kako je prikazano na slici, dobivene dijelove posložimo kao što je prikazano na donjoj slici. Dobivamo trokut s "rupom" - jedan kvadratić je nestao.

Objašnjenje: Veličina sedam kvadratića koji se nalaze s lijeve i desne strane "nestalog" kvadratića se gotovo neprimjetno promjenila, odnosno postali su pravokutnici s većom površinom.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Matematičarski trikovi u nastavi*, Zbornik radova II. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb, 2004.

[2] F. M. Brückler, *Povijest matematike I*, Grafika, Osijek, 2007.

[3] F. Ćurić, S. Mintaković, *Osnove matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[4] M. Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover Publications, New York, 1956.

[5] O. Ho, *Amazing Math Magic*, Sterling Publishing Co., New York, 2002.

[6] W. Simon, *Mathematical Magic*, Dover Publications, New York, 1993.

[7] *http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/rapid/magic.shtml*

[8] *http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbrubbergeom.htm*

[9] *http://www.card-trick.com*

[10] *http://www.spelman.edu/ colm/cards.html*