Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku
Algoritmi i strukture podataka

Odgovori na ispitna pitanja

1 Ispitna grupa: Vektori

Pitanje 1.1. *Zadan je pravokutni koordinatni sustav* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *i vektorski prostor* $X_0(M)$ *svih radij vektora u ravnini*
(a) *Koja svojstva ima računska operacija zbrajanja* $+ : X_0(M) \times X_0(M) \to X_0(M)$ *na vektorskom prostoru* $X_0(M)$*?*
(b) *Za vektore* $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ *odredite vektore* $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ *i* $\vec{d} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ *i nacrtajte pripadne slike.*
(c) *Jesu li vektori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linearno zavisni?*
Odgovor: *(a) Skup svih radij vektora u ravnini s operacijom zbrajanja čini aditivnu Abelovu (komutativnu) grupu. Ima svojstava asocijativnosti, posjeduje neutralni element (nul-vektor), svaki element ima svoj inverz (suprotni vektor) i ima svojstvo komutativnosti.*
(b) $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = -3\vec{i} + \vec{j}$
(c) jesu, jer je $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Pitanje 1.2.
(a) *Kako se definira skalarni produkt* $\langle , \rangle : X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$ *na vektorskom prostoru* X_0 *i koja svojstva ima?*
(b) *Za vektore* $a = (-2, -2, 0, 1)$, $b = (4, 4, 1, 4)$ *odredite skalarni produkt* $\langle a, b\rangle$ *i norme* $\|a\|_1, \|a\|_2, \|a\|_\infty$, $\|b\|_1, \|b\|_2, \|b\|_\infty$.
Odgovor:
(a) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. *Svojstva:*
(i) Komutativnost: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
(ii) Pozitivna definitnost: $\langle x, x\rangle \geq 0$ *i* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(iii) Distributivnost: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
(b) $\langle a, b\rangle = -12$, $\|a\|_1 = 5, \|a\|_2 = 3, \|a\|_\infty = 2$, $\|b\|_1 = 13, \|b\|_2 = 7, \|b\|_\infty = 4$

Pitanje 1.3. *Zadan je pravokutni koordinatni sustav* $(O;\vec{i},\vec{j})$ *i vektorski prostor* $X_0(M)$ *svih radij vektora u ravnini*
(a) *Koja svojstva ima računska operacija množenja sa skalarom* $\cdot : \mathbb{R} \times X_0(M) \to X_0(M)$*?*
(b) *Za vektore* $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ *odredite vektore* $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ *i* $\vec{d} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ *i nacrtajte pripadne slike.*
(c) *Jesu li vektori* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linearno nezavisni?*
Odgovor: *(a) Svojstva množenja sa skalarom:*
(i) Distributivnost u vektorskom faktoru: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
(ii) Distributivnost u skalarnom faktoru: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(iii) Homogenost: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
(iv) $1x = x$
(b) $\vec{c} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ *(c) nisu, jer je* $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Pitanje 1.4.
(a) *Kako se definira norma* $\|\cdot\| : X_0 \to \mathbb{R}_+$ *na vektorskom prostoru* X_0*?*
(b) *Za vektore* $a = (1, -2, -2, -4)$, $b = (5, -1, -3, 1)$ *odredite skalarni produkt* $\langle a, b\rangle$ *i norme* $\|a\|_1, \|a\|_2, \|a\|_\infty$, $\|b\|_1, \|b\|_2, \|b\|_\infty$.
Odgovor: *(a) Funkciju* $\|\cdot\| : X_0 \to [0, \infty)$, *koja svakom vektoru* $x \in X_0$ *pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s* $\|x\|$*) zovemo* **norma** *vektora* $x \in X_0$ *ako vrijedi*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0, \ldots, 0)$ [pozitivna definitnost],

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $x \in X_0$[homogenost],

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za svaki* $x, y \in X_0$ [nejednakost trokuta].

(b) $\langle a, b\rangle = 17$, $\|a\|_1 = 9, \|a\|_2 = 5, \|a\|_\infty = 4$, $\|b\|_1 = 10, \|b\|_2 = 6, \|b\|_\infty = 5$

Pitanje 1.5.
(a) *Što podrazumijevamo pod pojmom "vektor"? Koja svojstva ima skup svih vektora u ravnini* $X(M)$ *na kome je definirana računska operacija zbrajanja pravilom paralelograma?*
(b) *Za vektore* $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ *odredite i nacrtajte vektor* $\vec{a} + 2\vec{b}$ *i vektor* $\vec{a} - \vec{b}$.
Odgovor: *(a) Ako u ravnini* M *uvedemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u fiksnoj točki* $O \in M$ *u ravnini, onda svakoj točki* $P \in M$ *pripada jedinstveni vektor* $\overrightarrow{OP}$, *koji zovemo radijvektor ili vektor položaja i označavamo s* $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$. *Skup svih vektora u ravnini* $X(M)$ *na kome je definirana računska operacija zbrajanja je adidtivna Abelova (komutativna) grupa.*
(b) $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{a} - \vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

Pitanje 1.6.
(a) *Napišite definiciju linearne zavisnosti vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$.
(b) *Jesu li vektori* $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j}$ *linearno zavisni ili linearno nezavisni?*
(c) *Može li se vektor* $\vec{a}$ *prikazati kao linearna kombinacija vektora* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$*?*
Odgovor: *(a) Kažemo da je skup vektora* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in X_0$ **linearno nezavisan** *ako njihova proizvoljna linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način:*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

U protivnom kažemo da je skup vektora **linearno zavisan**, *tj. postoji barem jedna njihova linearna kombinacija koja iščezava na netrivijalan način, tj.*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{pri čemu} \quad \exists\, \lambda_i \neq 0.$$

(b) linearno su zavisni *(c) može,* $\vec{a} = -3/4\vec{b} - 5/4\vec{c}$

Pitanje 1.7.
(a) *Kako se definira i koja svojstva ima računska operacija skalarni produkt na vektorskom prostoru? U kojim slučajevima je skalarni produkt dva vektora jednak nuli?*
(b) *Odredite skalarni produkt vektora* $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ *i* $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.
Odgovor: *(a)* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. *Svojstva:*
(i) Komutativnost: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(ii) Pozitivna definitnost: $\langle x, x\rangle \geq 0$ *i* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(iii) Distributivnost: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
Skalarni produkt dva vektora jednak je nuli ako je barem jedan od vektora jednak nuli ili ako su vektori okomiti.
(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

Pitanje 1.8.
(a) *Kako se definira i koja svojstva ima norma vektora* $\|\cdot\|$ *na vektorskom prostoru ?*
(b) *Za vektor* $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ *odredite* $\|\vec{a}\|_1$, $\|\vec{a}\|_2$, $\|\vec{a}\|_\infty$.
Odgovor: *(a) Funkciju* $\|\cdot\| : R^n \to [0, \infty)$, *koja svakom vektoru* $x \in \mathbb{R}^n$ *pridružuje nenegativni realni broj (koji ćemo označiti s* $\|x\|$*) zovemo* **norma** *vektora* $x \in \mathbb{R}^n$ *ako vrijedi*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0, \ldots, 0)$ *[pozitivna definitnost],*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $x \in \mathbb{R}^n$ *[homogenost],*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za svaki* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *[nejednakost trokuta].*

(b) $\|\vec{a}\|_1 = 12, \quad \|\vec{a}\|_2 = 5\sqrt{2}, \quad \|\vec{a}\|_\infty = 5.$

Pitanje 1.9. *U ravnini je zadan trokut* $\triangle(A, B, C)$ *s vrhovima* $A = (1, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (5, 2)$. d_2*-opseg tog trokuta je* 10.8909. *Odredite opseg trokuta koristeći* d_1*-udaljenost.*
Odgovor: $O = 4 + 5 + 5 = 14$

Pitanje 1.10. *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^5$ *zadani su vektori* $a = (2, -1, 0, 1, 2)^T$ *i* $b = (0, 1, 3, -2, 1)^T$. *Odredite*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & a - b \\
(b) & 2a + b \\
(c) & \|a\|_1, \quad \|b\|_\infty \\
(d) & d_1(a, b)
\end{array}
$$

Odgovor: $a - b = (2, -2, -3, 3, 1)^T$; $2a + b = (4, -1, 3, 0, 5)^T$; $\|a\|_1 = 6$, $\|b\|_\infty = 3$; $d_1(a, b) = \|a - b\|_1 = 11$

2 Kvazimetričke funkcije i reprezentanti

Pitanje 2.1. *Neka je* $d_{LS}\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ *LS-kvazimetrička funkcija.*
(a) Kako se definira najbolji LS-reprezentant podataka $\mathcal{A}=\{(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2\colon i=1,\dots,m\}$ *s težinama* $w_1,\dots,w_m>0$*?*
(b) Za podatke zadane u tablici odredite najbolji LS-reprezentant i grafički prikažite rezultat.

i	1	2	3	4	5
x_i	0	-2	6	7	6
y_i	5	-1	-3	1	7
w_i	2	1	3	2	1

Odgovor: *(a)* $c=\left(\frac{1}{W}\sum\limits_{i=1}^{m}w_ix_i,\ \frac{1}{W}\sum\limits_{i=1}^{m}w_iy_i\right)$, *gdje je* $W=\sum\limits_{i=1}^{m}w_i$
(b) $c=(4,1)$

Pitanje 2.2. *Zadan je skup* $\mathcal{A}=\{0,1,2,4,8,10\}$ *i LS-kvazimetrička funkcija* $d_{LS}\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$*.*
(a) Koliko ima svih dvočanih particija ovaj skup? Koliko ima dvočlanih particija koje se nastavljaju?
(b) Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?
$\Pi_1=\{\{0,1,2,4\},\{8,10\}\},\quad \Pi_2=\{\{0,1,2\},\{4,8,10\}\}.$
Odgovor: *(a)* $2^5-1=31,\ \binom{5}{1}=5,$
(b) $F(\Pi_1)=\frac{35}{4}+2=\frac{43}{4}$; $\qquad F(\Pi_2)=2+\frac{56}{3}=\frac{62}{3}$; *Optimalnija je particija* Π_1

Pitanje 2.3. *Zadana je LAD-metrička funkcija* $d_{LAD}\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ *i skup*
$\mathcal{A}=\{\mathbf{a}_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2 : i=1,\dots,9\}$*, gdje je*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	2	3	4	5	5	7	7	8
y_i	1	3	4	2	2	3	2	5	4

(a) Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup?
(b) Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?
$\Pi_1=\{\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}\},\quad \Pi_2=\{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\},\{a_7,a_8,a_9\}\}.$
Odgovor: *(a)* $2^8-1=255$*, (b)* $F_{LAD}(\Pi_1)=18, F_{LAD}(\Pi_2)=17$*, bolja je particija* Π_2

Pitanje 2.4. *Neka je* $d_{LAD}\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ *LAD-kvazimetrička funkcija.*
(a) Kako se definira najbolji LAD-reprezentant podataka $\mathcal{A}=\{(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2\colon i=1,\dots,m\}$*?*
(b) Za podatke zadane u tablici odredite najbolji LAD-reprezentant i grafički prikažite rezultat.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	-1	3	2	3	-2
y_i	2	4	3	-3	1	-4

Odgovor: *(a)* $c=(\operatorname{med} x_i, \operatorname{med} y_i)$
(b) $c=(2,[1,2])$

Pitanje 2.5. *Zadan je skup* $\mathcal{A}=\{-2,0,2,6,8,10\}$ *i LS-kvazimetrička funkcija* $d_{LS}\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$*.*

(a) *Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup? Koliko ima dvočlanih particija koje se nastavljaju?*
(b) *Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?*
$\Pi_1 = \{\{-2,0,2\},\{6,8,10\}\}$, $\Pi_2 = \{\{-2,0,2,6\},\{8,10\}\}$.
Odgovor: *(a)* $2^5 - 1 = 31$, $\binom{5}{1} = 5$ *(b)* $F_{LS}(\Pi_1) = 16, F_{LS}(\Pi_2) = 37$, *bolja je particija* Π_1

Pitanje 2.6. *Zadana je LAD-metrička funkcija* $d_{LAD}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *i skup* $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1,\ldots,8\}$, *gdje je*

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2	3	4	2	4	3	5	2

(a) *Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup?*
(b) *Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?*
$\Pi_1 = \{\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{a_5,a_6,a_7,a_8\}\}$, $\Pi_2 = \{\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\},\{a_6,a_7,a_8\}\}$.
Odgovor: *(a)* $2^7 - 1 = 127$, *(b)* $F_{LAD}(\Pi_1) = 14, F_{LAD}(\Pi_2) = 14$, *obje particije su jednako blizu optimalnoj*

Pitanje 2.7.
(a) *Kako se definira i koja osnovna svojstva ima aritmetička sredina podataka* $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ *? Ilustrirajte to na primjeru skupa podataka* $\{1,1,2,2,4,5\}$
(b) *Kako se definira i koja osnovna svojstva ima medijan podataka* $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ *? Ilustrirajte to na primjeru skupa podataka* $\{1,1,2,2,4,5\}$ *?*
Odgovor: *(a)* $A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i$. *Svojstva:*
(i) $\min a_i \le A \le \max a_i$
(ii) $\sum_{i=1}^m (a_i - A) = 0$
(iii) $\min_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^m (x - a_i)^2 = \sum_{i=1}^m (A - a_i)^2$
$A(1,1,2,2,4,5) = 2.5$
(b) $\operatorname{med} a_i$ *je srednji element sortiranih podataka.* $\min_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^m |x - a_i| = \sum_{i=1}^m |\operatorname{med} a_i - a_i|$,
$\operatorname{med}(1,1,2,2,4,5) = 2$

Pitanje 2.8.
(a) *Kako se definira centroid skupa točaka u ravnini* $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1,\ldots,m\}$ *? Odredite centroid skupa* $\mathcal{A} = \{(1,1),(2,3),(3,2),(3,5),(4,6),(5,3),(10,1)\}$. *Nacrtajte sliku.*
(b) *Kako se definira medijan skupa točaka u ravnini* $A = \{a_i = (x_i, y_i) \colon x_i, y_i \in \mathbb{R}\}$ *? Odredite medijan skupa* $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,5),(4,6),(5,1),(10,3)\}$. *Nacrtajte sliku.*
Odgovor: *(a)* $c = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i, \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i\right)$, $c_{\mathcal{A}} = (4,3)$ *(b)* $\operatorname{med}(A) = (\operatorname{med}(x_i), \operatorname{med}(y_i)) = (3,3)$

Pitanje 2.9. *Neka je* $y = (y_1,\ldots,y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ *vektor podataka mjerenja.*
(a) *Kako se definira i kako se naziva najbolja* l_2 *aproksimacija mjerenja, a kako najbolja* l_1 *aproksimacija mjerenja ?*

(b) *Za vektor* $y = (1, 3, 2, 2, 4)^T \in \mathbb{R}^5$ *odredite najbolju* l_2 *i najbolju* l_1 *aproksimaciju mjerenja.*
Odgovor: *(a) Najbolja* l_2 *aproksimacija mjerenja je aritmeticka sredina podataka* $\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$*;*
Najbolja l_1 *aproksimacija mjerenja je medijan podataka* $\operatorname{med} y$*;*
(b) $l_1: \quad \operatorname{med} y = 2, \quad l_2: \quad A(y) = 2.4$

Pitanje 2.10. *Zadane su četiri točke u ravnini:*

$$T_1 = (x_1, y_1), \quad T_2 = (x_2, y_2), \quad T_3 = (x_3, y_3), \quad T_4 = (x_4, y_4).$$

(a) *Kako se definira centroid (Steinerova točka) točaka* T_1, T_2, T_3, T_4 *?*
(b) *Odredite centroid točaka:* $T_1 = (-2, -1), \quad T_2 = (2, -2), \quad T_3 = (4, 3), \quad T_4 = (-1, 1)$ *i izradite odgovarajući grafički prikaz.*
Odgovor: *(a)* $c = \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i, \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i\right)$
(b) $C = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

Pitanje 2.11. *Zadane su tri točke u ravnini:*

$$T_1 = (x_1, y_1), \quad T_2 = (x_2, y_2), \quad T_3 = (x_3, y_3).$$

(a) *Kako se definira* l_1*-geometrijski medijan, a kako* l_2*-geometrijski medijan točaka* T_1, T_2, T_3 *?*
(b) *Odredite* l_1*-geometrijski medijan točaka* $T_1 = (-1, -1), T_2 = (4, 2), T_3 = (3, 4)$ *i izradite odgovarajući grafički prikaz.*
(c) *Navedite metodu kojom se može izračunati* l_2*-geometrijski medijan.*
Odgovor: *(a) Točka* $M = (x_{GM}, y_{GM})$ *za koju se postiže minimum funkcionala*

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^{3} d_2(T(x, y), A_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \to \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

naziva se geometrijski medijan točaka $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}^2$ *u smislu* l_2*-norme i ne može se eksplicitno izraziti.*

$$M_2 = (x_{GM} y_{GM}) = \operatorname{argmin} \Psi,$$

Točka $M_1 = (m_x, m_y) \in \mathbb{R}^2$ *za koju je suma* l_1*-udaljenosti do vrhova trokuta minimalna zvat ćemo geometrijski medijan u* l_1 *normi.*

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{3} d_1(T(x, y), T_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{3} [|x - x_i| + |y - y_i|] \\ &= \sum_{i=1}^{3} |x - x_i| + \sum_{i=1}^{3} |y - y_i| \to \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

odakle dobivamo: $\qquad M_1 = \operatorname{argmin} F_1 = \left(\operatorname*{med}_{i=1,3} x_i, \operatorname*{med}_{i=1,3} y_i\right)$

(b) $M = (3, 2)$ $\qquad$ *(c) Weiszfeldov algoritam*

3 Ispitna grupa: Klasteri

Pitanje 3.1. *Zadana je particija $\Pi^0 = \{\{1,2,3\},\{6,16\}\}$ skupa $\mathcal{A}$. Primjenom k-means algoritma odredite LS-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuće vrijednosti funkcije cilja F i dualne funkcije cilja G.*

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,16\}$				
1						

Odgovor:

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,16\}$	2	11	*52*	*97.2*
1	$\{1,2,3,6\}$	$\{16\}$	3	16	*14*	*135.2*
2	$\{1,2,3,6\}$	$\{16\}$	3	16	*14*	*135.2*

Pitanje 3.2. *Zadana je particija $\Pi^0 = \{\{1,2,3\},\{6,12,16\}\}$ skupa $\mathcal{A}$. Primjenom k-means algoritma odredite LAD-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuću vrijednost funkcije cilja F.*

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,12,16\}$			
1					

Odgovor:

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,12,16\}$	*2*	*12*	*12*
1	$\{1,2,3,6\}$	$\{12,16\}$	*2.5*	*14*	*10*
2	$\{1,2,3,6\}$	$\{12,16\}$	*2.5*	*14*	*10*

Pitanje 3.3. *Zadan je skup podataka $\mathcal{A} = \{a_i \in \mathbb{R} \colon i = 1,\dots,m\} \subset \mathbb{R}$ i realni brojevi $z_1, \neq z_2$.*
(a) *Principom minimalnih udaljenosti definirana je particija $\Pi = \{\pi(z_1), \pi(z_2)\}$, gdje je*

$$\pi(z_1) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$
$$\pi(z_2) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$

(b) *Neka je $\mathcal{A} = \{1,2,4,6,7,10,11\}$, $z_1 = 4$, $z_2 = 9$. Odredite particiju $\Pi = \{\pi(z_1), \pi(z_2)\}$ i LS-centre klastera.*

Odgovor: *(a)*

$$\pi(z_1) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon d(a_i, z_1) \le d(a_i, z_2)\}$$
$$\pi(z_2) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon d(a_i, z_2) \le d(a_i, z_1)\}$$

(b) $\Pi = \{\{1,2,4,6\},\{7,10,11\}\}, c_1 = 13/4, c_2 = 28/3$

Pitanje 3.4. *Zadan je skup podataka $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1,\dots,m\}$ koji treba razdijeliti u 2 klastera π_1, π_2.*
(a) *LS-funkcija cilja definira se kao $F(\pi_1,\pi_2) = \sum\limits_{a_i\in\pi_1} \|c_1 - a_i\|^2 + \sum\limits_{a_i\in\pi_2} \|c_2 - a_i\|^2$, gdje je*
$c_1 = \qquad\qquad\qquad , c_2 = \qquad\qquad\qquad$ (dopunite!)
(b) *Počevši od početne particije navedene u tablici, provedite k-means algoritam na skupu $\mathcal{A} = \{(0,6),(4,6),(8,0),(10,8),(10,10)\}$ i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja F i*

vrijednost dualne funkcije cilja G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,6),(8,0)\}$	$\{(4,6),(10,8),(10,10)\}$				
1						

Odgovor: *(a)* $c_1 = \frac{1}{|\pi_1|}\sum\limits_{a_i\in\pi_1} a_i$, $c_2 = \frac{1}{|\pi_2|}\sum\limits_{a_i\in\pi_2} a_i$

(b)

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,6),(8,0)\}$	$\{(4,6),(10,8),(10,10)\}$	$\{4,3\}$	$\{8,8\}$	82	49.2
1	$\{(0,6),(8,0),(4,6)\}$	$\{(10,8),(10,10)\}$	$\{4,4\}$	$\{10,9\}$	58	73.2
2	$\{(0,6),(8,0),(4,6)\}$	$\{(10,8),(10,10)\}$	$\{4,4\}$	$\{10,9\}$	58	73.2

Pitanje 3.5. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(4,3),(5,2),(7,4),(8,2),(9,5)\}$. *Počevši od početnih centara* c_1^0, c_2^0, c_3^0, *provedite k-means algoritam na tom skupu podataka koristeći LAD kriterij i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja F.*

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(1,1)$	$(5,1)$	$(9,1)$				
1							

Odgovor:

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(1,1)$	$(5,1)$	$(9,1)$	$\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$	$\{(4,3),(5,2),(7,4)\}$	$\{(8,2),(9,5)\}$	11
1	$(1,2)$	$(5,3)$	$(8.5,3.5)$	$\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$	$\{(4,3),(5,2)\}$	$\{(7,4),(8,2),(9,5)\}$	9
2	$(1,2)$	$(4.5,2.5)$	$(8,4)$	$\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$	$\{(4,3),(5,2)\}$	$\{(7,4),(8,2),(9,5)\}$	9
3	$(1,2)$	$(4.5,2.5)$	$(8,4)$				

Pitanje 3.6. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{-3,-1\},\{1,5,9\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LS-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuće vrijednosti funkcije cilja F i dualne funkcije cilja G.*

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{-3,-1\}$	$\{1,5,9\}$				
1						

Odgovor:

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{-3,-1\}$	$\{1,5,9\}$	-2	5	34	58.8
1	$\{-3,-1,1\}$	$\{5,9\}$	-1	7	16	76.8
2	$\{-3,-1,1\}$	$\{5,9\}$	-1	7	16	76.8

Pitanje 3.7. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{-1,1,4\},\{5,6,9\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LAD-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuću vrijednost funkcije cilja F.*

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{-1,1,4\}$	$\{5,6,9\}$			
1					

Odgovor:

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{-1,1,4\}$	$\{5,6,9\}$	*1*	*6*	*9*
1	$\{-1,1\}$	$\{4,5,6,9\}$	*0*	*5.5*	*8*
2	$\{-1,1\}$	$\{4,5,6,9\}$	*0*	*5.5*	*8*

Pitanje 3.8. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A}=\{a_i\in\mathbb{R}\colon i=1,\dots,m\}\subset\mathbb{R}$ *i realni brojevi* $z_1,\neq z_2$.
(a) *Principom minimalnih udaljenosti definirana je particija* $\Pi=\{\pi(z_1),\pi(z_2)\}$, *gdje je*

$$\pi(z_1)=\{a_i\in\mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \}\quad \textit{dopunite!}$$
$$\pi(z_2)=\{a_i\in\mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \}\quad \textit{dopunite!}$$

(b) *Neka je* $\mathcal{A}=\{1,3,4,6,7,10,12\}$, $z_1=2$, $z_2=10$. *Odredite particiju* $\Pi=\{\pi(z_1),\pi(z_2)\}$ *i LAD-centre klastera.*
Odgovor: *(a)*

$$\pi(z_1)=\{a_i\in\mathcal{A}\colon d(a_i,z_1)\le d(a_i,z_2)\}$$
$$\pi(z_2)=\{a_i\in\mathcal{A}\colon d(a_i,z_2)\le d(a_i,z_1)\}$$

(b) $\Pi=\{\{1,3,4,6\},\{7,10,12\}\}, c_1=3.5, c_2=10$ *ili*
$\Pi=\{\{1,3,4\},\{6,7,10,12\}\}, c_1=3, c_2=8.5$

Pitanje 3.9. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A}=\{a_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2 : i=1,\dots,m\}$ *koji treba razdijeliti u 2 klastera* π_1,π_2.
(a) *Dualna LS-funkcija cilja definira se kao* $G(\pi_1,\pi_2)=m_1\|c_1-c\|^2+m_2\|c_2-c\|^2$, *gdje je* $c=\qquad$, $c_1=\qquad$, $c_2=\qquad$, $m_1=\qquad$, $m_2=\qquad$ *(dopunite!)*
(b) *Počevši od početne particije navedene u tablici, provedite k-means algoritam na skupu* $\mathcal{A}=\{(0,0),(0,2),(2,10),(6,4),(10,4)\}$ *i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F *i vrijednost dualne funkcije cilja* G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,0),(0,2),(6,4)\}$	$\{(2,10),(10,4)\}$				
1						

Odgovor: *(a)* $c=(\frac{1}{m}\sum_{a_i\in\mathcal{A}}x_i,\frac{1}{m}\sum_{a_i\in\mathcal{A}}y_i)$, $c_1=(\frac{1}{m_1}\sum_{a_i\in\pi_1}x_i,\frac{1}{m_1}\sum_{a_i\in\pi_1}y_i)$, $c_2=(\frac{1}{m_2}\sum_{a_i\in\pi_2}x_i,\frac{1}{m_2}\sum_{a_i\in\pi_2}y_i)$, $m_1=|\pi_1|$, $m_2=|\pi_2|$

(b)

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,0),(0,2),(6,4)\}$	$\{(2,10),(10,4)\}$	$\{2,2\}$	$\{6,7\}$	*82*	*49.2*
1	$\{(0,0),(0,2)\}$	$\{(6,4),(2,10),(10,4)\}$	$\{0,1\}$	$\{6,6\}$	*58*	*73.2*
2	$\{(0,0),(0,2)\}$	$\{(6,4),(2,10),(10,4)\}$	$\{0,1\}$	$\{6,6\}$	*58*	*73.2*

Pitanje 3.10. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A}=\{(1,1),(2,1),(2,2),(4,3),(5,2),(7,4),(8,2),(9,5)\}$. *Počevši od početnih centara* c_1^0, c_2^0, c_3^0, *provedite k-means algoritam na tom skupu podataka koristeći LAD kriterij i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F.

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(5,1)$	$(5,3)$	$(5,5)$				
1							

Odgovor:

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(5,1)$	$(5,3)$	$(5,5)$	$\{(1,1),(2,1),(2,2),(5,2),(8,2)\}$	$\{(4,3),(7,4)\}$	$\{(9,5)\}$	*16*
1	$(2,2)$	$(5.5,3.5)$	$(9,5)$	$\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$	$\{(4,3),(5,2),(7,4),(8,2)\}$	$\{(9,5)\}$	*11*
2	$(2,1)$	$(6,2.5)$	$(9,5)$	$\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$	$\{(4,3),(5,2),(7,4),(8,2)\}$	$\{(9,5)\}$	*11*
3	$(2,1)$	$(6,2.5)$	$(9,5)$				

Pitanje 3.11. *Zadani su centri* $c_1 = 2$, $c_2 = 5$ *i skup točaka na pravcu* $A = \{1, 2.8, 3.6, 4, \frac{5}{4}, \frac{8}{3}, \frac{9}{2}\}$. *Principom minimalnih udaljenosti skup* A *razdijelite u dva klastera.*

Odgovor: $\pi_1 = \{1, \frac{5}{4}, \frac{8}{3}, 2.8\}$, $\pi_2 = \{3.6, 4, \frac{9}{2}\}$

Pitanje 3.12. *Zadane su dvije particije*

$$\Pi_1 = \{\pi_1, \pi_2\}, \quad \pi_1 = \{1,1,2,3,3\}, \quad \pi_2 = \{2,3,3,4\},$$
$$\Pi_2 = \{\pi_3, \pi_4\}, \quad \pi_3 = \{1,1,2,2,3,3\}, \quad \pi_4 = \{3,3,4\}.$$

skupa $A = \{1,1,2,2,3,3,3,3,4\}$. (a) *Odredite vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja na tim particijama. Koja particija je kompaktnija i bolje odijeljena u Least Squares smislu ?*
(b) *Odredite vrijednost Least Absolute Deviations kriterijske funkcije cilja na tim particijama. Koja particija je kompaktnija i bolje odijeljena u LAD smislu ?*

Odgovor: *(a)* $c(\Pi_1) = \{2,3\}$, $\mathcal{F}(\Pi_1) = 4 + 2 = 6$, $c(\Pi_2) = \{2, \frac{10}{3}\}$, $\mathcal{F}(\Pi_2) = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ – *kompaktnija je particija* Π_2;
(b) $c(\Pi_1) = \{2,3\}$, $\mathcal{F}(\Pi_1) = 4 + 2 = 6$, $c(\Pi_2) = \{2,3\}$, $\mathcal{F}(\Pi_2) = 4 + 1 = 5$ – *kompaktnija je particija* Π_2

Pitanje 3.13. *Primijenite k-means algoritam na particiju* Π_1 *iz Zadatka 3.12. Što dobivate ?*

Odgovor: *Particiju* $\Pi^* = \{\{1,1,2,2\},\{3,3,3,3,4\}\}$

Pitanje 3.14. *Zadana je particija* Π *s klasterima* $\pi_1 = \{3,3,4,4\}$, $\pi_2 = \{1,1,2,2,5\}$. (a) *Pronađite element iz klastera* π_2 *kojeg treba premjestiti u klaster* π_1*, tako da se vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja poveća.*
(b) *Pronađite element iz klastera* π_2 *kojeg treba premjestiti u klaster* π_1*, tako da se vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja smanji.*

Odgovor: *(a)* $\hat{y} = 1$, *(b)* $\hat{y} = 5$

Pitanje 3.15. *Zadan je skup* $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$.
(a) *Definirajte dvočlanu particiju klastera* $\{\pi_1, \pi_2\}$ *i LS-kriterijsku funkciju cilja.*
(b) *Za skup* $\{2, 4, 8\}$ *napišite sve particije, odredite njihove centroide i vrijednost LS-kriterijske funkcije cilja.*
Odgovor: *(a)* $\Pi = \{\pi_1, \pi_2\}$ *je dvočlana particija skupa* S *ako su* π_1 *i* π_2 *neprazni, međusobno disjunktni skupovi čija je unija čitav skup* S.
(b) $\Pi_1 = \{\{2\}, \{4\}, \{8\}\}, c = \{2, 4, 8\}, F(\Pi_1) = 0$, $\Pi_2 = \{\{2, 4\}, \{8\}\}, c = \{3, 8\}, F(\Pi_2) = 2$, $\Pi_3 = \{\{2, 8\}, \{4\}\}, c = \{5, 4\}, F(\Pi_3) = 18$, $\Pi_4 = \{\{2\}, \{4, 8\}\}, c = \{2, 6\}, F(\Pi_4) = 8$, $\Pi_5 = \{\{2, 4, 8\}\}, c = \{14/3\}, F(\Pi_5) = 56/3$

Pitanje 3.16. *Zadane su tri particije skupa točaka* $T_1 = (-2, -1)$, $T_2 = (2, -2)$, $T_3 = (4, 3)$, $T_4 = (-1, 1)$:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \{\{T_1\}, \{T_2, T_3, T_4\}\}, \\
\Pi_2 &= \{\{T_3\}, \{T_1, T_2, T_4\}\}, \\
\Pi_3 &= \{\{T_1, T_4\}, \{T_2, T_3\}\}.
\end{aligned}$$

Izračunajte l_1*-centre ovih klastera i vrijednosti* l_1*-kriterijske funkcije cilja i izradite odgovarajući grafički prikaz.*
Odgovor: $c = \{(-2, -1), (2, 1)\}, F(\Pi_1) = 0 + 10$, $c = \{(4, 3), (-1, -1)\}, F(\Pi_2) = 0 + 7 = 7$, $c = \{(-1.5, 0), (3, 0.5)\}, F(\Pi_3) = 3 + 7 = 10$

4 Ispitna grupa: Regresije

Pitanje 4.1.
(a) *Formule za vrijednosti optimalnih parametara linearne regresije* $f(x;\alpha,\beta)=\alpha x+\beta$,

$$\alpha^\star=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})},\qquad \beta^\star=\alpha^\star\bar{x}-\bar{y}$$

su pogrešne. Napišite ispravne formule.

(b) *Za podatke* $\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 3 & 4 & 3 & 6 \end{array}$ *odredite optimalne parametre i varijancu linearne regresije, grafički prikažite podatke i nacrtajte pripadni graf linearne regresije.*

Odgovor: *(a)* $\alpha^\star=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$, $\beta^\star=\bar{y}-\alpha^\star\bar{x}$ *(b)* $f(x)=.8x+3.6$, *Var=.7*

Pitanje 4.2.
(a) *Kako se definira stopa promjene model funkcije* $t\mapsto f(t)$ *u trenutku* t_0*?*

(b) *Prosječna stopa rasta podataka* $\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 10 & 10 & 12 & 14 & 14 \end{array}$ *dobivena pomoću eksponencijalne funkcije je* 9.96%*. Odredite stopu rasta primjenom geometrijske sredine i primjenom Taylorove formule*

Odgovor: *(a)* $\frac{1}{f(t_0)}\frac{df(t_0)}{dt}$ *(b)* $sG=0\%$, $sT=8.77\%$

Pitanje 4.3.
(a) *Malthusov model rasta populacije obično se iskazuje diferencijalnom jednadžbom*

$$\frac{dN}{dt}=kN.$$

Što je pri tome značenje nezavisne varijable N*, zavisne varijable* t *i konstante* k*?*

(b) *Ako potrošnja prirodnog plina raste po prosječnoj godišnjoj stopi od* 3.5%*, za koliko godina se potrošnja udvostručuje?*

(c) *Ako se potrošnja prirodnog plina udvostručuje za* 10 *godina, kolika je prosječna godišnja stopa rasta potrošnje?*

Odgovor: *(a) N-ukupna populacija k-stopa rasta t-vrijeme* *(b) 20 godina* *(c)* 7%

Pitanje 4.4. *Početni kapital* $C_0=100\,000,00kn$ *uložen je u banku uz primjenu dekurzivnog složenog ukamaćivanja i godišnju kamatnu stopu* 10%*. Kolika je vrijednost kapitala nakon pola godine uz primjenu*

a) konformne ispodgodišnje kamatne stope
b) relativne ispodgodišnje kamatne stope

Odgovor: *(a) 104 881 kn* *(b) 105 000 kn*

Pitanje 4.5. ***(a)*** *Napišite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje logistička funkcija i riječima iskažite njeno značenje.*

(b) *Odredite faze rasta logističke funkcije* $f(x)=\frac{5}{1+8e^{-0.5x}}$.

Odgovor: *(a)* $\frac{1}{y(t_0)}\frac{dy(t_0)}{dt}=c(A-y(t_0))$ *Riječima, stopa promjene u trenutku t_0 proporcionalna je ekonomskom potencijalu (tj. razlici između maksimalnog i trenutnog stanja) (b) faza pripreme:* $(0,1.52)$*, faza intenzivnog rasta:* $(1.52,6.79)$*, faza zasićenja* $(6.79,\infty)$

Pitanje 4.6.
(a) *Ako su zadani podaci* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$ *i linearna model funkcija* $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, *kako se mogu odrediti optimalni parametri u smislu najmanjih kvadrata, a kako u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja ?*
(b) *Napišite formule za optimalne parametre* $\alpha^\star, \beta^\star$ *u smislu najmanjih kvadrata. Čemu je jednako* $\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i; \alpha^\star, \beta^\star)$ *?*
(c) *Za podatke* $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ *odredite optimalne parametre* $\alpha^\star, \beta^\star$ *u smislu najmanjih kvadrata. Koliko je prosječno kvadratno odstupanje ?*
Odgovor: *(a) Minimizacijom funkcionala* $F_2(\alpha, \beta) = \sum_i (y_i - \alpha x_i - \beta)^2 \to \min$, *tj. minimizacijom funkcionala* $F_1(\alpha, \beta) = \sum_i |y_i - \alpha x_i - \beta| \to \min$ *(b)* $\alpha^\star = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$, $\beta^\star = \bar{y} - \alpha^\star \bar{x}$, $\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i; \alpha^\star, \beta^\star) = 0$ *(c)* $\alpha^\star = 1.5$, $\beta^\star = 1.5$, $V = 0.875$

Pitanje 4.7.
(a) *Napišite opći oblik eksponencijalne model funkcije. Kako se zove zakon rasta koji se opisuje tom funkcijom ?*
(b) *Kolika je približna prosječna godišnja stopa rasta potrošne nekog resursa, ako se potrošnja svakih* 20 *godina udvostručuje ? Kolika bi bila ta stopa rasta ako se potrošnja udvostručuje svake druge godine ?*
Odgovor: *(a)* $f(t) = be^{ct}$, *Malthusov zakon neograničenog rasta* *(b)* $p_1 = 3.5\%$, $p_2 = 35^{\%}$

Pitanje 4.8.
(a) *Poznati su mjesečni podaci o kretanju prodaje neke robe* $y_i : 2, 3, 5, 6, 10$. *Primjenom eksponencijalne model funkcije dobije se prosječna mjesečna stopa rasta* $c = 0.392$, *tj. 39.2%. Napišite minimizirajuću funkciju kojom dobivate optimalne parametre u smislu najmanjih kvadrata.*
(b) *Odredite prosječnu mjesečnu stopu rasta primjenom geometrijske sredine. U kojem slučaju se ne može primijeniti ova formula ?*
(c) *Poznajete li još neki način za određivanje prosječne stope rasta. ? Koje su loše osobine tih formula ?*
Odgovor: *(a)* $F(b, c) = \sum_i (y_i - be^{cx_i})^2$ *(b)* $c = 0.459$ *(c)* $c = \sqrt[4]{\frac{10}{2}} - 1 = 0.495$ *(c) primjenom geometrijske sredine i primjenom Taylorove formule, vidi pitanje 4.2*

Pitanje 4.9.
(a) *Napišite osnovnu formulu financijske matematike.*
(b) *Zadan je početni kapital od* $C_0 = 100\,000$ *kuna. Odredite njegovu vrijednost nakon* 3 *mjeseca, nakon godinu dana i nakon* 15 *mjeseci uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope* $p = 6\%$ *uz primjenu konformnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.*
(c) *Kolike bi bile te vrijednosti uz primjenu relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka ?*
Odgovor: *(a)* $C_n = C_0 \cdot r^n$ *(b)* 102874, 112000, 115219 *(c)* 103030, 112683, 116097

Pitanje 4.10.
(a) *Napišite Verhulstov zakon rasta i odgovarajuću logističku funkciju.*
(b) *Ako su poznati parametri logističke funkcije, kako se određuju faze rasta ?*
(c) *Napišite generaliziranu logističku funkciju i Gompertzovu funkciju te skicirajte njihove grafove.*

Odgovor: *(a) zakon rasta:* $\frac{1}{y(t_0)}\frac{dy(t_0)}{dt} = c(A - y(t_0))$, *log.f.:* $f(x;b,c) = \frac{A}{1+be^{-cx}}$, $\quad b,c > 0$ *(b)* $(0, t_B)$*-faza pripreme,* (t_B, t_C)*-faza intenzivnog rasta,* (t_C)*-faza zasićenja, gdje su* $t_B = \frac{1}{c}\ln\frac{b}{2+\sqrt{3}}$, $t_C = \frac{1}{c}\ln\frac{b}{2-\sqrt{3}}$ *(c)* $f(x;b,c) = \frac{A}{(1+be^{-c\gamma x})^{1/\gamma}}$, $\quad b,c,\gamma > 0$, $\quad f(t;a,b,c) = e^{a-be^{-ct}}$, $\quad a,b,c > 0$

Pitanje 4.11.
(a) *Navedite neke pristupe za procjenu parametara linearne regresije* $f(t) = \alpha + \beta t$ *?*
(b) *Odredite optimalne parametre linearne regresije u smislu najmanjih kvadrata na bazi podataka*

t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	5	8	9	9	10

Odgovor: *(a)* l_1, l_2 *i* l_∞ *pristupi, minimizacijom odgovarajućih funkcionala (b)* $f(t) = 8.2 + 1.1t$

Pitanje 4.12.
(a) *Neka je* $t \mapsto f(t)$ *model funkcija. Kako se definira stopa promjene funkcije* f *u trenutku* t_0 *?*
(b) *Prosječna godišnja stopa rasta neke ekonomske kategorije određena na bazi godišnjih podataka*

t_i	0	1	2	3	4
y_i	5	8	9	9	10

iznosi 12.6 %. *Odredite prosječna godišnja stopa rasta primjenom geometrijske sredine i primjenom formule* $s = \left(\frac{y_T}{y_0}\right)^{1/T} - 1$.
Odgovor: *(a)* $\frac{1}{f(t_0)}\frac{df(t_0)}{dt}$ *(b)* $sg = 0\,\%$, $\quad sp = 14.8698\,\%$

Pitanje 4.13.
(a) *Osnovna formula financijske matematike je* $C_n = C_0 \cdot r^n$. *Koje značenje imaju pojedini simboli u ovoj formuli ?*
(b) *Neka je* $p = 6\,\%$ *godišnja kamatna stopa i* $C_0 = 100\,000$ *osnovni kapital. Odredite mjesečnu konformnu i mjesečnu relativnu kamatnu stopu. Odredite iznos složenih kamata nakon* 56 *mjeseci uz primjenu relativne i konformne kamatne stope.*
Odgovor: *(a)* C_0*-glavnica,* C_n*-kapital nakon vremena* n, r*-kamatni faktor (b)* $p_m = 0.486755\,\%$, $p_r = 0.5\,\%$, $\quad$ *Konf. kamate* $= 31\,248$, $\quad$ *Rel. kamate* $= 32\,221$

Pitanje 4.14.
(a) *Napišite Verhulstovu diferencijalnu jednadžbu i opišite njeno značenje.*
(b) *Zadana je logistička funkcija* $f(t) = \frac{10}{1+8e^{-0.5t}}$. *Odredite točku infleksije i faze rasta određene ovom logističkom funkcijom.*
Odgovor: *(a)* $\frac{1}{y(t_0)}\frac{dy(t_0)}{dt} = c(A - y(t_0))$ $\quad$ *Riječima, stopa promjene u trenutku* t_0 *proporcionalna je ekonomskom potencijalu (b)* $I = (4.15888, 5)$, $\quad B = 2\ln\frac{8}{3.73} = 1.52497$, $C = 2\ln\frac{8}{0.27} = 6.7928$

Pitanje 4.15.
(a) *Napišite generaliziranu logističku funkciju i odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu.*
(b) *Napišite Gompertzovu funkciju i odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu.*
Odgovor: *(a)* $f(x;b,c) = \frac{A}{(1+be^{-c\gamma x})^{1/\gamma}}$, $\quad b,c,\gamma > 0$, $\quad \frac{1}{y(t_0)}\frac{dy(t_0)}{dt} = c\left(1 - \left(\frac{y(t_0)}{A}\right)^\gamma\right)$ *(b)* $f(t;a,b,c) = e^{a-be^{-ct}}$, $\quad a,b,c > 0$, $\quad \frac{dy}{dt} = cy(a - \ln y)$