Ekonomski fakultet, Sveučilište u Osijeku
Algoritmi i strukture podataka

Ispitna pitanja

1 Ispitna grupa: Vektori

Pitanje 1.1. *Zadan je pravokutni koordinatni sustav $(O;\vec{i},\vec{j})$ i vektorski prostor $X_0(M)$ svih radij vektora u ravnini*
(a) *Koja svojstva ima računska operacija zbrajanja $+ : X_0(M) \times X_0(M) \to X_0(M)$ na vektorskom prostoru $X_0(M)$?*
(b) *Za vektore $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ odredite vektore $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ i nacrtajte pripadne slike.*
(c) *Jesu li vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno zavisni?*

Pitanje 1.2.
(a) *Kako se definira skalarni produkt $\langle , \rangle : X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$ na vektorskom prostoru X_0 i koja svojstva ima?*
(b) *Za vektore $a = (-2,-2,0,1)$, $b = (4,4,1,4)$ odredite skalarni produkt $\langle a, b\rangle$ i norme $\|a\|_1, \|a\|_2, \|a\|_\infty$, $\|b\|_1, \|b\|_2, \|b\|_\infty$.*

Pitanje 1.3. *Zadan je pravokutni koordinatni sustav $(O;\vec{i},\vec{j})$ i vektorski prostor $X_0(M)$ svih radij vektora u ravnini*
(a) *Koja svojstva ima računska operacija množenja sa skalarom $\cdot : \mathbb{R} \times X_0(M) \to X_0(M)$?*
(b) *Za vektore $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ odredite vektore $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{d} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ i nacrtajte pripadne slike.*
(c) *Jesu li vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno nezavisni?*

Pitanje 1.4.
(a) *Kako se definira norma $\|\cdot\| : X_0 \to \mathbb{R}_+$ na vektorskom prostoru X_0?*
(b) *Za vektore $a = (1,-2,-2,-4)$, $b = (5,-1,-3,1)$ odredite skalarni produkt $\langle a, b\rangle$ i norme $\|a\|_1, \|a\|_2, \|a\|_\infty$, $\|b\|_1, \|b\|_2, \|b\|_\infty$.*

Pitanje 1.5.
(a) *Što podrazumijevamo pod pojmom "vektor"? Koja svojstva ima skup svih vektora u ravnini $X(M)$ na kome je definirana računska operacija zbrajanja pravilom paralelograma?*
(b) *Za vektore $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ odredite i nacrtajte vektor $\vec{a} + 2\vec{b}$ i vektor $\vec{a} - \vec{b}$.*

Pitanje 1.6.
(a) *Napišite definiciju linearne zavisnosti vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in X_0$.*
(b) *Jesu li vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j}$ linearno zavisni ili linearno nezavisni?*
(c) *Može li se vektor $\vec{a}$ prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$?*

Pitanje 1.7.
(a) *Kako se definira i koja svojstva ima računska operacija skalarni produkt na vektorskom prostoru ? U kojim slučajevima je skalarni produkt dva vektora jednak nuli ?*
(b) *Odredite skalarni produkt vektora* $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ *i* $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.

Pitanje 1.8.
(a) *Kako se definira i koja svojstva ima norma vektora* $\|\cdot\|$ *na vektorskom prostoru ?*
(b) *Za vektor* $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ *odredite* $\|\vec{a}\|_1$, $\|\vec{a}\|_2$, $\|\vec{a}\|_\infty$.

Pitanje 1.9. *U ravnini je zadan trokut* $\triangle(A, B, C)$ *s vrhovima* $A = (1, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (5, 2)$. d_2*-opseg tog trokuta je* 10.8909. *Odredite opseg trokuta koristeći* d_1*-udaljenost.*

Pitanje 1.10. *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^5$ *zadani su vektori* $a = (2, -1, 0, 1, 2)^T$ *i* $b = (0, 1, 3, -2, 1)^T$. *Odredite*

(a) $a - b$
(b) $2a + b$
(c) $\|a\|_1, \quad \|b\|_\infty$
(d) $d_1(a, b)$

2 Kvazimetričke funkcije i reprezentanti

Pitanje 2.1. *Neka je* $d_{LS}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *LS-kvazimetrička funkcija.*
(a) Kako se definira najbolji LS-reprezentant podataka $\mathcal{A} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2\colon i = 1, \dots, m\}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$*?*
(b) Za podatke zadane u tablici odredite najbolji LS-reprezentant i grafički prikažite rezultat.

i	1	2	3	4	5
x_i	0	-2	6	7	6
y_i	5	-1	-3	1	7
w_i	2	1	3	2	1

Pitanje 2.2. *Zadan je skup* $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 4, 8, 10\}$ *i LS-kvazimetrička funkcija* $d_{LS}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.
(a) Koliko ima svih dvočanih particija ovaj skup? Koliko ima dvočlanih particija koje se nastavljaju?
(b) Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?
$\Pi_1 = \{\{0, 1, 2, 4\}, \{8, 10\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{0, 1, 2\}, \{4, 8, 10\}\}.$

Pitanje 2.3. *Zadana je LAD-metrička funkcija* $d_{LAD}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *i skup*
$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, 9\}$*, gdje je*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	2	3	4	5	5	7	7	8
y_i	1	3	4	2	2	3	2	5	4

(a) Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup?
(b) Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?
$\Pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}\}.$

Pitanje 2.4. *Neka je* $d_{LAD}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *LAD-kvazimetrička funkcija.*
(a) Kako se definira najbolji LAD-reprezentant podataka $\mathcal{A} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2\colon i = 1, \dots, m\}$*?*
(b) Za podatke zadane u tablici odredite najbolji LAD-reprezentant i grafički prikažite rezultat.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	-1	3	2	3	-2
y_i	2	4	3	-3	1	-4

Pitanje 2.5. *Zadan je skup* $\mathcal{A} = \{-2, 0, 2, 6, 8, 10\}$ *i LS-kvazimetrička funkcija* $d_{LS}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.
(a) Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup? Koliko ima dvočlanih particija koje se nastavljaju?
(b) Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?
$\Pi_1 = \{\{-2, 0, 2\}, \{6, 8, 10\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{-2, 0, 2, 6\}, \{8, 10\}\}.$

Pitanje 2.6. *Zadana je LAD-metrička funkcija* $d_{LAD}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *i skup*
$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, 8\}$*, gdje je*

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2	3	4	2	4	3	5	2

(a) *Koliko ima svih dvočlanih particija ovaj skup?*
(b) *Za sljedeće particije odredite vrijednost funkcije cilja. Koja particija je bliža optimalnoj?*
$\Pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \{a_6, a_7, a_8\}\}$.

Pitanje 2.7.
(a) *Kako se definira i koja osnovna svojstva ima aritmetička sredina podataka* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *? Ilustrirajte to na primjeru skupa podataka* $\{1, 1, 2, 2, 4, 5\}$
(b) *Kako se definira i koja osnovna svojstva ima medijan podataka* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *? Ilustrirajte to na primjeru skupa podataka* $\{1, 1, 2, 2, 4, 5\}$ *?*

Pitanje 2.8.
(a) *Kako se definira centroid skupa točaka u ravnini* $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \ldots, m\}$ *? Odredite centroid skupa* $\mathcal{A} = \{(1,1), (2,3), (3,2), (3,5), (4,6), (5,3), (10,1)\}$. *Nacrtajte sliku.*
(b) *Kako se definira medijan skupa točaka u ravnini* $A = \{a_i = (x_i, y_i) \colon x_i, y_i \in \mathbb{R}\}$ *? Odredite medijan skupa* $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,5), (4,6), (5,1), (10,3)\}$. *Nacrtajte sliku.*

Pitanje 2.9. *Neka je* $y = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ *vektor podataka mjerenja.*
(a) *Kako se definira i kako se naziva najbolja* l_2 *aproksimacija mjerenja, a kako najbolja* l_1 *aproksimacija mjerenja ?*
(b) *Za vektor* $y = (1, 3, 2, 2, 4)^T \in \mathbb{R}^5$ *odredite najbolju* l_2 *i najbolju* l_1 *aproksimaciju mjerenja.*

Pitanje 2.10. *Zadane su četiri točke u ravnini:*

$$T_1 = (x_1, y_1), \quad T_2 = (x_2, y_2), \quad T_3 = (x_3, y_3), \quad T_4 = (x_4, y_4).$$

(a) *Kako se definira centroid (Steinerova točka) točaka* T_1, T_2, T_3, T_4 *?*
(b) *Odredite centroid točaka:* $T_1 = (-2, -1), \quad T_2 = (2, -2), \quad T_3 = (4, 3), \quad T_4 = (-1, 1)$ *i izradite odgovarajući grafički prikaz.*

Pitanje 2.11. *Zadane su tri točke u ravnini:*

$$T_1 = (x_1, y_1), \quad T_2 = (x_2, y_2), \quad T_3 = (x_3, y_3).$$

(a) *Kako se definira* l_1*-geometrijski medijan, a kako* l_2*-geometrijski medijan točaka* T_1, T_2, T_3 *?*
(b) *Odredite* l_1*-geometrijski medijan točaka* $T_1 = (-1, -1), T_2 = (4, 2), T_3 = (3, 4)$ *i izradite odgovarajući grafički prikaz.*
(c) *Navedite metodu kojom se može izračunati* l_2*-geometrijski medijan.*

3 Ispitna grupa: Klasteri

Pitanje 3.1. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{1,2,3\},\{6,16\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LS-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuće vrijednosti funkcije cilja* F *i dualne funkcije cilja* G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,16\}$				
1						

Pitanje 3.2. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{1,2,3\},\{6,12,16\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LAD-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuću vrijednost funkcije cilja* F.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{1,2,3\}$	$\{6,12,16\}$			
1					

Pitanje 3.3. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{a_i \in \mathbb{R} \colon i = 1,\dots,m\} \subset \mathbb{R}$ *i realni brojevi* $z_1, \neq z_2$.
(a) *Principom minimalnih udaljenosti definirana je particija* $\Pi = \{\pi(z_1),\pi(z_2)\}$, *gdje je*

$$\pi(z_1) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$
$$\pi(z_2) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$

(b) *Neka je* $\mathcal{A} = \{1,2,4,6,7,10,11\}$, $z_1 = 4$, $z_2 = 9$. *Odredite particiju* $\Pi = \{\pi(z_1),\pi(z_2)\}$ *i LS-centre klastera.*

Pitanje 3.4. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1,\dots,m\}$ *koji treba razdijeliti u 2 klastera* π_1, π_2.
(a) *LS-funkcija cilja definira se kao* $F(\pi_1,\pi_2) = \sum\limits_{a_i\in\pi_1} \|c_1 - a_i\|^2 + \sum\limits_{a_i\in\pi_2} \|c_2 - a_i\|^2$, *gdje je*
$c_1 = \qquad\qquad\qquad , c_2 = \qquad\qquad\qquad$ (dopunite!)
(b) *Počevši od početne particije navedene u tablici, provedite k-means algoritam na skupu* $\mathcal{A} = \{(0,6),(4,6),(8,0),(10,8),(10,10)\}$ *i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F *i vrijednost dualne funkcije cilja* G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,6),(8,0)\}$	$\{(4,6),(10,8),(10,10)\}$				
1						

Pitanje 3.5. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(4,3),(5,2),(7,4),(8,2),(9,5)\}$. *Počevši od početnih centara* c_1^0, c_2^0, c_3^0, *provedite k-means algoritam na tom skupu podataka koristeći LAD kriterij i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F.

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(1,1)$	$(5,1)$	$(9,1)$				
1							

Pitanje 3.6. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{-3,-1\},\{1,5,9\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LS-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuće vrijednosti funkcije cilja* F *i dualne funkcije cilja* G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{-3,-1\}$	$\{1,5,9\}$				
1						

Pitanje 3.7. *Zadana je particija* $\Pi^0 = \{\{-1,1,4\},\{5,6,9\}\}$ *skupa* $\mathcal{A}$. *Primjenom k-means algoritma odredite LAD-lokalno optimalnu particiju i odgovarajuću vrijednost funkcije cilja* F.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F
0	$\{-1,1,4\}$	$\{5,6,9\}$			
1					

Pitanje 3.8. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{a_i \in \mathbb{R}\colon i = 1,\dots,m\} \subset \mathbb{R}$ *i realni brojevi* $z_1, \neq z_2$.
(a) Principom minimalnih udaljenosti definirana je particija $\Pi = \{\pi(z_1), \pi(z_2)\}$, *gdje je*

$$\pi(z_1) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$
$$\pi(z_2) = \{a_i \in \mathcal{A}\colon \qquad\qquad\qquad \} \quad \textit{dopunite!}$$

(b) Neka je $\mathcal{A} = \{1,3,4,6,7,10,12\}$, $z_1 = 2$, $z_2 = 10$. *Odredite particiju* $\Pi = \{\pi(z_1), \pi(z_2)\}$ *i LAD-centre klastera.*

Pitanje 3.9. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{a_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1,\dots,m\}$ *koji treba razdijeliti u 2 klastera* π_1, π_2.
(a) Dualna LS-funkcija cilja definira se kao $G(\pi_1,\pi_2) = m_1\|c_1 - c\|^2 + m_2\|c_2 - c\|^2$, *gdje je* $c =$, $c_1 =$, $c_2 =$, $m_1 =$, $m_2 =$ *(dopunite!)*
(b) Počevši od početne particije navedene u tablici, provedite k-means algoritam na skupu $\mathcal{A} = \{(0,0),(0,2),(2,10),(6,4),(10,4)\}$ *i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F *i vrijednost dualne funkcije cilja* G.

it	π_1	π_2	c_1	c_2	F	G
0	$\{(0,0),(0,2),(6,4)\}$	$\{(2,10),(10,4)\}$				
1						

Pitanje 3.10. *Zadan je skup podataka* $\mathcal{A} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(4,3),(5,2),(7,4),(8,2),(9,5)\}$. *Počevši od početnih centara* c_1^0, c_2^0, c_3^0, *provedite k-means algoritam na tom skupu podataka koristeći LAD kriterij i u svakom koraku izračunajte vrijednost funkcije cilja* F.

it	c_1	c_2	c_3	π_1	π_2	π_3	F
0	$(5,1)$	$(5,3)$	$(5,5)$				
1							

Pitanje 3.11. *Zadani su centri* $c_1 = 2$, $c_2 = 5$ *i skup točaka na pravcu* $A = \{1, 2.8, 3.6, 4, \frac{5}{4}, \frac{8}{3}, \frac{9}{2}\}$. *Principom minimalnih udaljenosti skup* A *razdijelite u dva klastera.*

Pitanje 3.12. *Zadane su dvije particije*

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \{\pi_1, \pi_2\}, \quad \pi_1 = \{1, 1, 2, 3, 3\}, \quad \pi_2 = \{2, 3, 3, 4\},\\ \Pi_2 &= \{\pi_3, \pi_4\}, \quad \pi_3 = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}, \quad \pi_4 = \{3, 3, 4\}.\end{aligned}$$

skupa $A = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4\}$. (a) *Odredite vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja na tim particijama. Koja particija je kompaktnija i bolje odijeljena u Least Squares smislu ?*
(b) *Odredite vrijednost Least Absolute Deviations kriterijske funkcije cilja na tim particijama. Koja particija je kompaktnija i bolje odijeljena u LAD smislu ?*

Pitanje 3.13. *Primijenite k-means algoritam na particiju* Π_1 *iz Zadatka 3.12. Što dobivate ?*

Pitanje 3.14. *Zadana je particija* Π *s klasterima* $\pi_1 = \{3, 3, 4, 4\}$, $\pi_2 = \{1, 1, 2, 2, 5\}$. (a) *Pronađite element iz klastera* π_2 *kojeg treba premjestiti u klaster* π_1*, tako da se vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja poveća.*
(b) *Pronađite element iz klastera* π_2 *kojeg treba premjestiti u klaster* π_1*, tako da se vrijednost Least Squares kriterijske funkcije cilja smanji.*

Pitanje 3.15. *Zadan je skup* $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$.
(a) *Definirajte dvočlanu particiju klastera* $\{\pi_1, \pi_2\}$ *i LS-kriterijsku funkciju cilja.*
(b) *Za skup* $\{2, 4, 8\}$ *napišite sve particije, odredite njihove centroide i vrijednost LS-kriterijske funkcije cilja.*

Pitanje 3.16. *Zadane su tri particije skupa točaka* $T_1 = (-2, -1)$, $T_2 = (2, -2)$, $T_3 = (4, 3)$, $T_4 = (-1, 1)$*:*

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \{\{T_1\}, \{T_2, T_3, T_4\}\},\\ \Pi_2 &= \{\{T_3\}, \{T_1, T_2, T_4\}\},\\ \Pi_3 &= \{\{T_1, T_4\}, \{T_2, T_3\}\}.\end{aligned}$$

Izračunajte l_1*-centre ovih klastera i vrijednosti* l_1*-kriterijske funkcije cilja i izradite odgovarajući grafički prikaz.*

4 Ispitna grupa: Regresije

Pitanje 4.1.
(a) *Formule za vrijednosti optimalnih parametara linearne regresije* $f(x;\alpha,\beta) = \alpha x + \beta$,

$$\alpha^\star = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}, \qquad \beta^\star = \alpha^\star \bar{x} - \bar{y}$$

su pogrešne. Napišite ispravne formule.

(b) *Za podatke* $\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 3 & 4 & 3 & 6 \end{array}$ *odredite optimalne parametre i varijancu linearne regresije, grafički prikažite podatke i nacrtajte pripadni graf linearne regresije.*

Pitanje 4.2.
(a) *Kako se definira stopa promjene model funkcije* $t \mapsto f(t)$ *u trenutku* t_0*?*

(b) *Prosječna stopa rasta podataka* $\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 10 & 10 & 12 & 14 & 14 \end{array}$ *dobivena pomoću eksponencijalne funkcije je* 9.96%. *Odredite stopu rasta primjenom geometrijske sredine i primjenom Taylorove formule.*

Pitanje 4.3.
(a) *Malthusov model rasta populacije obično se iskazuje diferencijalnom jednadžbom*

$$\tfrac{dN}{dt} = kN.$$

Što je pri tome značenje nezavisne varijable N*, zavisne varijable* t *i konstante* k*?*

(b) *Ako potrošnja prirodnog plina raste po prosječnoj godišnjoj stopi od* 3.5%*, za koliko godina se potrošnja udvostručuje?*

(c) *Ako se potrošnja prirodnog plina udvostručuje za* 10 *godina, kolika je prosječna godišnja stopa rasta potrošnje?*

Pitanje 4.4. *Početni kapital* $C_0 = 100\,000,00kn$ *uložen je u banku uz primjenu dekurzivnog složenog ukamaćivanja i godišnju kamatnu stopu* 10%. *Kolika je vrijednost kapitala nakon pola godine uz primjenu*
a) konformne ispodgodišnje kamatne stope
b) relativne ispodgodišnje kamatne stope

Pitanje 4.5. ***(a)*** *Napišite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje logistička funkcija i riječima iskažite njeno značenje.*

(b) *Odredite faze rasta logističke funkcije* $f(x) = \frac{5}{1+8e^{-0.5x}}$.

Pitanje 4.6.
(a) *Ako su zadani podaci* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$ *i linearna model funkcija* $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, *kako se mogu odrediti optimalni parametri u smislu najmanjih kvadrata, a kako u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja ?*
(b) *Napišite formule za optimalne parametre* $\alpha^\star, \beta^\star$ *u smislu najmanjih kvadrata. Čemu je jednako* $\sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i; \alpha^\star, \beta^\star)$ *?*
(c) *Za podatke* $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ *odredite optimalne parametre* $\alpha^\star, \beta^\star$ *u smislu najmanjih kvadrata. Koliko je prosječno kvadratno odstupanje ?*

Pitanje 4.7.
(a) *Napišite opći oblik eksponencijalne model funkcije. Kako se zove zakon rasta koji se opisuje tom funkcijom ?*
(b) *Kolika je približna prosječna godišnja stopa rasta potrošne nekog resursa, ako se potrošnja svakih* 20 *godina udvostručuje ? Kolika bi bila ta stopa rasta ako se potrošnja udvostručuje svake druge godine ?*

Pitanje 4.8.
(a) *Poznati su mjesečni podaci o kretanju prodaje neke robe* y_i : $2, 3, 5, 6, 10$. *Primjenom eksponencijalne model funkcije dobije se prosječna mjesečna stopa rasta* $c = 0.392$, *tj. 39.2%. Napišite minimizirajuću funkciju kojom dobivate optimalne parametre u smislu najmanjih kvadrata.*
(b) *Odredite prosječnu mjesečnu stopu rasta primjenom geometrijske sredine. U kojem slučaju se ne može primijeniti ova formula ?*
(c) *Poznajete li još neki način za određivanje prosječne stope rasta. ? Koje su loše osobine tih formula ?*

Pitanje 4.9.
(a) *Napišite osnovnu formulu financijske matematike.*
(b) *Zadan je početni kapital od* $C_0 = 100\,000$ *kuna. Odredite njegovu vrijednost nakon* 3 *mjeseca, nakon godinu dana i nakon* 15 *mjeseci uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope* $p = 6\%$ *uz primjenu konformnog ispodgodišnjeg kamatnjaka.*
(c) *Kolike bi bile te vrijednosti uz primjenu relativnog ispodgodišnjeg kamatnjaka ?*

Pitanje 4.10.
(a) *Napišite Verhulstov zakon rasta i odgovarajuću logističku funkciju.*
(b) *Ako su poznati parametri logističke funkcije, kako se određuju faze rasta ?*
(c) *Napišite generaliziranu logističku funkciju i Gompertzovu funkciju te skicirajte njihove grafove.*

Pitanje 4.11.
(a) *Navedite neke pristupe za procjenu parametara linearne regresije* $f(t) = \alpha + \beta t$ *?*
(b) *Odredite optimalne parametre linearne regresije u smislu najmanjih kvadrata na bazi podataka*

t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	5	8	9	9	10

Pitanje 4.12.
(a) *Neka je* $t \mapsto f(t)$ *model funkcija. Kako se definira stopa promjene funkcije* f *u trenutku* t_0 *?*
(b) *Prosječna godišnja stopa rasta neke ekonomske kategorije određena na bazi godišnjih podataka*

t_i	0	1	2	3	4
y_i	5	8	9	9	10

iznosi 12.6 %. *Odredite prosječna godišnja stopa rasta primjenom geometrijske sredine i primjenom formule* $s = \left(\frac{y_T}{y_0}\right)^{1/T} - 1$.

Pitanje 4.13.
(a) *Osnovna formula financijske matematike je* $C_n = C_0 \cdot r^n$. *Koje značenje imaju pojedini simboli u ovoj formuli ?*
(b) *Neka je* $p = 6\,\%$ *godišnja kamatna stopa i* $C_0 = 100\,000$ *osnovni kapital. Odredite mjesečnu konformnu i mjesečnu relativnu kamatnu stopu. Odredite iznos složenih kamata nakon* 56 *mjeseci uz primjenu relativne i konformne kamatne stope.*

Pitanje 4.14.
(a) *Napišite Verhulstovu diferencijalnu jednadžbu i opišite njeno značenje.*
(b) *Zadana je logistička funkcija* $f(t) = \frac{10}{1+8e^{-0.5t}}$. *Odredite točku infleksije i faze rasta određene ovom logističkom funkcijom.*

Pitanje 4.15.
(a) *Napišite generaliziranu logističku funkciju i odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu.*
(b) *Napišite Gompertzovu funkciju i odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu.*