Odjel za matematiku
9. prosinca 2013.

Prvi kolokvij iz Vektorskih prostora

1. Provjerite je li dani skup realni vektorski prostor. Ako je, odredite mu bazu te dimenziju.

   a) $M = \{A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R}) : (a_{12} - a_{21})(a_{13} - a_{31}) = 0\}$,

   b) $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \cdots = x_{2n-1} + x_{2n}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je $[A] = [B]$ onda i samo onda ako vrijedi $a_i \in [B]\,,\ \forall i = 1, \ldots, r$ i $b_j \in [A]\,,\ \forall j = 1, \ldots, s$.

3. Neka je $A \in L(\mathbb{R})$ i $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator definiran s $B(x, y) = (x, y - Ax)$. Dokažite da je B linearan operator i provjerite je li B epimorfizam, monomorfizam, izomorfizam.

4. Neka je $\mathcal{P}_2$ prostor polinoma stupnja ≤ 2 i linearan operator $A : \mathcal{P}_2 \to M_2(\mathbb{R})$ zadan s

$$Ap = \begin{bmatrix} p'(0) & p''(0) \\ (p' + p'')(0) & p'''(0) \end{bmatrix}.$$

   a) Odredite rang i defekt operatora A te po jednu bazu za sliku i jezgru

   b) Navedite proizvoljan $N \leq M_2(\mathbb{R})$ tako da je $N + \mathrm{Im}(A) = M_2(\mathbb{R})$. Vrijedi li za odabrani N da je $M_2(\mathbb{R}) = N \dot{+} \mathrm{Im}(A)$?

5. Neka su $f = \{1, 1-x, 1+x+x^2\}$ i $g = \{1, 2x, 1-x+x^2\}$ dvije baze vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$.

   a) Odredite matrice prijelaza iz kanonske baze $e = \{1, x, x^2\}$ u bazu f i iz baze g u kanonsku bazu. Za operator $A \in L(\mathcal{P}_2)$, $A(p) = p$ odredite matrični prikaz u paru baza (f, e), (e, g) i (g, f).

   b) Neka je $f' = \{f_1', f_2', f_3'\}$ dualna baza baze f. Odredite $f_1'(x^2)$, $f_2'(x^2)$ i $f_3'(x^2)$.