Odjel za matematiku
29. siječnja 2014.

Drugi kolokvij iz Vektorskih prostora

1. a) (25 bodova) Odredite minimalni polinom, Jordanovu formu i neku Jordanovu bazu linearnog operatora koji u kanonskoj bazi ima matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   b) (20 bodova) Dokažite da su matrice A i B slične ako i samo ako imaju iste Jordanove forme.

2. (20 bodova) Neka je $A \in L(\mathcal{P}_2)$ operator deriviranja na prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2. Odredite matrice $B = \sin A$ i $C = \cos A$ u kanonskoj bazi od $\mathcal{P}_2$. Provjerite jesu li dobivene matrice B i C ortogonalne. Ako nisu, ortogonalizirajte ih Gram-Schmidtovim postupkom. (Skalarni produkt $(A|B) = \mathrm{tr}(AB^T)$).

3. a) (15 bodova) Na prostoru neprekidnih funkcija na intervalu $[1, 2]$ definiramo preslikavanje

$$(f|g) = \int_1^2 \frac{1}{x} f(x)g(x)dx.$$

   Dokazati da je dano preslikavanje skalarni produkt i odrediti $\|\sqrt{x}\|$, za normu induciranu tim skalarnim produktom.

   b) (20 bodova) Neka je U kompleksan unitaran konačnodimenzionalan prostor te $A \in L(U)$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   (1) Za svaki $u \in U$ je $\|A^2u\| = \|Au\|$,

   (2) $(A^*)^2A^2 = A^*A$.