

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.  
16. veljače 2017.

### Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

**Zadatak 1.** [10 bodova] Ledenjak je veliko postojano tijelo od leda koje polako putuje zbog naprezanja koje izaziva njegova težina. Odredite rad koji je potreban uložiti kako bi se u Zemljinom gravitacijskom polju ledenjak mase 100 tona pomaknuo iz točke  $(3, 2, 3)$  u točku  $(4, 3, 4)$  po po dijelovima glatkoj krivulji. Za masu Zemlje koristite  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , a za gravitacijsku konstantu  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

**Zadatak 2.** [10 bodova] Pretpostavimo da je nadmorska visina ledenjaka dana funkcijom  $f(x, y) = 1000 - 0,03x^2 - 0,04y^2$ . Planinar se zbog cjelodnevnog penjanja osjeća iscrpljeno i želi se što brže spustiti na nižu nadmorsku visinu. Ako se planinar nalazi u točki  $(100, 120)$ , u kojem smjeru će se najbrže spuštati niz ledenjak? Hoće li se u smjeru vektora  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$  spuštati ili penjati ako se počne kretati iz točke  $(100, 120)$ ?

**Zadatak 3.** [10 bodova] Rastavite vektorsko polje  $\vec{a} = \frac{1}{5}xy^5\vec{i} + \frac{1}{2}yz^3\vec{j} + z\vec{k}$  na potencijalno i solenoidalno.

**Zadatak 4.** [15 bodova] Izvedite jednadžbu prisilnih neprigušenih oscilacija jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora. Pretpostavite da je vanjska sila zadana formulom  $F(t) = F \cos(\omega t)$  pri čemu je  $\omega$  vlastita frekvencija sustava.

**Zadatak 5.** [10 bodova] Tvrтка koja se bavi proizvodnjom energetskih napitaka sprema se na tržište plasirati novi napitak zvan XBec. Kako bi privukla potencijalne kupce, tvrtka će poznatom grafičkom dizajneru platiti oslikavanje limenke novog napitka oblika valjka volumena  $0,5 \text{ dm}^3$ . Buduci da donja baza limenke većinom stoji na stolu, dizajner ju ne treba oslikati. Odredite veličine polumjera baze i visine limenke tako da tvrtka dizajneru mora platiti minimalnu cijenu za oslikavanje.

**Zadatak 6.** [15 bodova] Riješite integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(5x)}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

**Zadatak 7.** [15 bodova] Teška homogena žica duljine 8m i mase 12kg napeta je horizontalno utegom mase 16kg na desnom kraju. Lijeva polovica žice uronjena je u homogeno sredstvo koeficijenta elastičnosti  $q = 3$ . Odredite ravnotežni položaj žice ako joj je lijevi kraj slobodan.

**Zadatak 8.** [15 bodova] Riješite Dirichletov rubni problem:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \\ u(0, y) = -6, & y \leq 0, \\ u(0, y) = 2, & y > 0. \end{cases}$$