



Pravila

Kolokvij se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima (sve papire koji se predaju potrebno je potpisati). Studentima koji su na oba kolokvija ukupno postigli barem 80 bodova priznaje se pismeni dio ispita. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i pribora za pisanje.

Zadatak 1 (10 bodova). Ispitajte svojstva strukture $(\mathbb{N}, *)$, gdje je operacija $*$ definirana s $a * b = a + ab + b$, za sve $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2 (15 bodova). Neka je G podgrupa od $GL(2, \mathbb{R})$ koja se sastoji od svih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Grupa $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ normalna je podgrupa od G . Pokažite da je preslikavanje $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^*$ definirano s

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = a$$

homomorfizam grupa te da je kvocijentna grupa G/N izomorfna multiplikativnoj grupi \mathbb{R}^* .

Zadatak 3 (10 + 15 + 15 bodova).

- Neka su a i b elementi grupe G takvi da je $|a| = 2$, $b \neq e$ i $abab = b^3$. Dokažite ili opovrgnite: Tada je $|b| = 2$.
- Neka je $\varphi: \mathbb{Z}_{18} \rightarrow S_6$ homomorfizam grupa takav da je $\varphi(1) = (2, 5)(1, 6, 4)$. Odredite $\varphi(9)$ i jezgru homomorfizma φ .
- Dane su permutacije $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ i $\tau = (1, 2)(5, 3, 4, 6)$ iz S_6 . Odredite red permutacija σ i τ te red i parnost permutacije $\sigma\tau$.

Zadatak 4 (20 bodova). Neka je H normalna podgrupa od G te neka je indeks od H u G jednak 2. Pretpostavimo da su $a, b \in G$, ali $a \notin H$ i $b \notin H$. Dokažite da je tada $ab \in H$.

Zadatak 5 (15 bodova). Neka je G grupa reda 351. Ako grupa G ima 27 Sylowljevih 13-podgrupa, odredite koliko grupa G sadrži elemenata reda 13. Je li tada Sylowljeva 3-podgrupa od G normalna podgrupa od G ? Obrazložite svoj odgovor.