

MIRTA BENŠIĆ

NENAD ŠUVAK

UVOD U VJEROJATNOST
I STATISTIKU



Osijek, 2013.

M. Benšić, N. Šuvak – Uvod u vjerojatnost i statistiku.

Izdavač: Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku

Recenzenti: Prof.dr.sc. Miljenko Huzak
Prof.dr.sc. Tibor Pogány

Lektor: Marina Tomić, prof.

Tehnička obrada: Prof.dr.sc. Mirta Benšić, Doc.dr.sc. Nenad Šuvak

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem ???.

ISBN ???

Udžbenik se objavljuje uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku pod brojem 20/13.

Predgovor

Ovaj materijal nastao je za potrebe kolegija koji se bave uvođenjem osnovnih pojmova i koncepata vjerojatnosti i statistike. Za razumijevanje sadržaja potrebno je znanje iz standardnih matematičkih kolegija prve studijske godine tehničkih fakulteta u Republici Hrvatskoj, tj. osnove diferencijalnog i integralnog računa realnih funkcija više varijabli te geometrije ravnine i prostora.

Knjiga je podijeljena u pet poglavlja. Prva tri poglavlja posvećena su teoriji vjerojatnosti s obzirom da je ona temelj za razumijevanje modela potrebnih za statističke analize. Četvrto poglavlje odnosi se na statistiku i napisano je s ciljem razumijevanja koncepata koji se koriste u statističkim analizama. Pretpostavka je autora da će ovladavanje sadržajima iz tog poglavlja dati studentima osnovna znanja potrebna za razumijevanje i primjenu statističkih modela i statističkih procedura prezentiranih u literaturi koja se bavi specijalno statistikom. U petom poglavlju navedeni su pojmovi iz algebre skupova te osnovni rezultati iz kombinatorike i teorije ponovljenih redova koji se koriste u prethodnim poglavljima.

Zahvaljujemo svima koji su pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja. To se posebno odnosi na recenzente koji su pažljivo pročitali rukopis te svojim primjedbama i sugestijama utjecali na poboljšanje mnogih dijelova teksta, kao i na kolege Andreu Krajina, Slobodana Jelića, Mariju Miloloža-Pandur i Ivonu Puljić jer su svojim sugestijama doprinijeli kvaliteti primjera i zadataka.

Autori će biti zahvalni svim čitateljima na primjedbama vezanima uz eventualne pogreške, nepreciznosti ili nedostatke.

U Osijeku, listopad 2013.

Mirta Benšić i Nenad Šuvak

Sadržaj

1	Pojam i osnovna svojstva vjerojatnosti	1
1.1	Prostor elementarnih događaja	2
1.2	Klasičan pristup	4
1.3	Statistički pristup	6
1.4	Definicija vjerojatnosti	8
1.5	Osnovna svojstva vjerojatnosti	12
1.6	Vjerojatnost na diskretnom Ω	21
1.7	Primjeri vjerojatnosti na \mathbb{R}	25
1.8	Primjeri vjerojatnosti na \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3	29
1.9	Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost	31
1.10	Zadaci	39
2	Slučajna varijabla	55
2.1	Diskretna slučajna varijabla	55
2.2	Neprekidna slučajna varijabla	60
2.3	Funkcija distribucije slučajne varijable	63
2.3.1	Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable	66
2.3.2	Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable	67
2.4	Primjeri parametarski zadanih diskretnih distribucija	69
2.4.1	Diskretna uniformna distribucija	69
2.4.2	Bernoullijeva distribucija	70
2.4.3	Binomna distribucija	71
2.4.4	Poissonova distribucija	73
2.4.5	Geometrijska distribucija	76
2.4.6	Hipergeometrijska distribucija	77
2.5	Primjeri parametarski zadanih neprekidnih distribucija	78
2.5.1	Uniformna distribucija na intervalu $\langle a, b \rangle$	78

2.5.2	Eksponencijalna distribucija	80
2.5.3	Dvostrana eksponencijalna distribucija	81
2.5.4	Normalna distribucija	82
2.6	Numeričke karakteristike slučajne varijable	85
2.6.1	Očekivanje diskretne slučajne varijable	85
2.6.2	Varijanca i ostali momenti. Važne nejednakosti	89
2.6.3	Očekivanje i varijanca nekih parametarskih diskretnih distribucija	93
2.6.4	Očekivanje i momenti neprekidne slučajne varijable	99
2.6.5	Očekivanje i varijanca nekih parametarskih neprekidnih distribucija	100
2.7	Transformacija slučajne varijable	103
2.7.1	Postupak standardizacije	103
2.7.2	Bijektivna transformacija slučajne varijable	105
2.7.3	Primjeri transformacija koje nisu bijektivne	108
2.8	Generiranje slučajnih varijabli	109
2.9	Zadaci	110
3	Slučajni vektor	129
3.1	Diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor	132
3.1.1	Uvjetne distribucije	142
3.1.2	Nezavisnost	145
3.2	Neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor	148
3.2.1	Uvjetne gustoće. Nezavisnost	151
3.3	Kovarijanca i koeficijent korelacije	154
3.4	Općenito o nezavisnosti slučajnih varijabli	161
3.5	Neki rezultati o nizovima slučajnih varijabli	163
3.5.1	Slabi zakon velikih brojeva i Bernoullijeva shema	164
3.5.2	Centralni granični teorem	169
3.6	Zadaci	172
4	Statistika	181
4.1	Deskriptivna statistika	182
4.1.1	Metode opisivanja kvalitativnih varijabli	186
4.1.2	Metode opisivanja numeričkih varijabli	189
4.1.3	Metode opisivanja ordinalnih varijabli	198
4.2	Statistički model	200
4.2.1	Problem proporcije	201

4.2.2	Problem očekivanja i varijance normalne distribucije	204
4.2.3	Jednostavna linearna regresija	206
4.3	Procjena parametra	208
4.3.1	Procjena proporcije	210
4.3.2	Procjena očekivanja	211
4.3.3	Procjena varijance	213
4.3.4	Procjena funkcije distribucije	214
4.3.5	Procjena parametara u jednostavnoj linearnoj regresiji	218
4.4	Procjena parametra pouzdanim intervalom	220
4.4.1	Procjena očekivanja pouzdanim intervalom za velike uzorke	221
4.4.2	Procjena proporcije pouzdanim intervalom za velike uzorke	223
4.5	Testiranje statističkih hipoteza	226
4.5.1	Pogreške statističkog testa	227
4.5.2	Testiranje hipoteze o očekivanju za velike uzorke	231
4.5.3	Testiranje hipoteze o proporciji za velike uzorke	235
4.5.4	Testiranje hipoteze o jednakosti očekivanja	237
4.6	Zadaci	241
5	Dodatak	247
5.1	Osnove algebre skupova	247
5.2	Osnovni kombinatorni rezultati	248
5.3	Ponovljeni red	250
	Literatura	255
	Indeks	258