



## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta. Na kolokvij u je potrebno ostvariti barem 20 bodova kako bi se moglo pristupiti drugom kolokvij u.

---

**Zadatak 1 (5).** Čestica se počinje gibati s početnim položajem  $\vec{r}(0) = (0, 1, 1)$  i s početnom brzinom  $\vec{v}(0) = (1, 2, 0)$ . Njezino ubrzanje u trenutku  $t$  iznosi  $\vec{a}(t) = (2t, 3t, 5)$ . Odredite brzinu i položaj čestice u trenutku  $t$ .

**Zadatak 2 (10).** Zbog visokih vanjskih temperatura Marko je poželio popiti hladnu limunadu. Budući da nije imao vodu u hladnjaku, napravio je limunadu sobne temperature  $30^\circ$ , stavio je u hladnjak na temperaturu od  $6^\circ$  i odlučio pričekati da se ohladi na  $15^\circ$ . Bio je jako žedan pa je izvadio limunadu nakon 20 minuta, ali se limunada ohladila tek na  $25^\circ$  pa ju je vratio u hladnjak. Nakon koliko minuta od trenutka pravljenja će limunada biti željene temperature?

**Zadatak 3 (10).** Dokažite da krivulja  $r = a \sin \varphi + b \cos \varphi$ , gdje je  $a \cdot b \neq 0$ , predstavlja kružnicu u kartezijevim koordinatama, te odredite centar i radijus te kružnice.

**Zadatak 4 (10).** Balon leti vertikalno prema gore konstantnom brzinom  $7 \text{ m/s}$ . Dječak vozi bicikl pravocrtno po stazi brzinom  $20 \text{ m/s}$ . U trenutku kada dječak prolazi ispod balona njihova vertikalna udaljenost je  $65 \text{ m}$ . Koliko brzo se mijenja udaljenost između dječaka i balona  $3 \text{ s}$  nakon trenutka prolaska?

**Zadatak 5 (15).** Pronađite jednadžbe tangenti na elipsu  $x^2 + 4y^2 = 36$  koje prolaze točkom  $(12, 3)$ .

**Zadatak 6 (15).** Ako se čestica kreće konstantnom apsolutnom brzinom ( $|\vec{v}| = c$ , gdje je  $c$  konstanta), dokažite da su tada vektori brzine i akceleracije međusobno okomiti.

**Zadatak 7 (15).** Vrtuljak u obliku kotača u zabavnom parku, radijusa  $10 \text{ m}$ , napravi jedan puni krug svake 2 minute. Koliko brzo se podiže proizvoljno sjedalo vrtuljka, u trenutku kada se sjedalo nalazi  $16 \text{ m}$  iznad razine tla?

**Zadatak 8 (20).** Dokažite da je duljina odsječka tangente na astroidu  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  između koordinatnih osi konstantna.

**Zadatak 9 (20).** Posuda od vodopropusnog materijala je oblika stošca s vrhom prema dolje koji ima visinu  $16 \text{ cm}$  i polumjer baze  $5 \text{ cm}$ . Posuda je dijelom ispunjena vodom koja istječe kroz plašt posude brzinom koja je proporcionalna površini posude koja je u doticaju s tekućinom. Ako sipamo vodu u posudu brzinom  $2 \text{ cm}^3/\text{min}$ , tada se visina tekućine u posudi smanjuje brzinom  $0,3 \text{ cm}/\text{min}$  u trenutku kada je visina popunjenog dijela  $10 \text{ cm}$ . Ako želimo održati konstantnu visinu vode u posudi na  $10 \text{ cm}$ , kojom brzinom trebamo ulijevati vodu u posudu?

**Zadatak 10 (25).** Koristeći Newtonov zakon gravitacije i 2. Newtonov zakon dokažite 1. Keplerov zakon, tj. da se pod utjecajem gravitacijske sile Sunca svi planeti gibaju po elipsama kojima je Sunce jedno od žarišta.