

Pismeni ispit iz Numeričke linearne algebre

3. rujna 2015.

1. Neka su $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokažite da je $\|ABC\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F \|C\|_2$.
2. Neka je dan sustav $Ax = b$, $b \neq 0$ i neka je \tilde{x} aproksimacija rješenja x . Dokažite da za vektor $v = A\tilde{x} - b$ vrijedi

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \kappa(A) \frac{\|v\| \|x\|}{\|b\|},$$

ako je $\kappa(A)$ uvjetovanost matrice A u normi $\|\cdot\|$.

3. Odredite QR faktorizaciju matrice A te iz dobivene faktorizacije izračunajte $|\det A|$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Neka je $S = \{x \in \mathbb{R}^m : \|Ax - b\|_2 = \min\}$. Dokažite da tada $A^T(b - Ax) \Rightarrow x \in S$.
5. Neka je $A = U\Sigma V^T$ singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, gdje je $m \geq n$. Odredite svojstvene vrijednosti matrica $A^T A$ i AA^T .