# Pismeni ispit iz Numeričke linearne algebre

23. veljače 2015.

1. Provjerite je li norma $\nu(A) = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$ unitarno invarijantna norma.
   Neka je $\|\cdot\|_1$ matrična norma inducirana s vektorskom normom $\|\cdot\|_1$. Dokažite da je
   $$\|A\|_1 \leq \nu(A) \leq n \cdot \|A\|_1.$$

2. Promatramo sustav $Ax = b$ gdje su matrica $A$ i vektor $b$ zadani s
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Načinimo promjenu u elementu $a_{11}$ tako da je $\Delta A = \begin{pmatrix} -0.001 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Odredite rješenje sustava $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$. Koliko puta je relativna pogreška u rješenju $x$ veća od relativne pogreške u matrici? Kolika je uvjerovanost matrice $A$?

3. Odredite matrice $Q$ i $R$ u punoj i reduciranoj $QR$ faktorizaciju matrice
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Neka je
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -12 & 8 \\ -3 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
   gdje je parametar $\alpha$ realan broj. Izračunajte LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice $A$ u ovisnosti o parametru $\alpha$, te obrazložite za koje parametre $\alpha$ je matrica $A$ regularna. Za $\alpha = 1$, riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [2, 5, -4, 2]$.

5. Neka je $A = U\Sigma V^T$ singularna dekompozicija matrice $A$. Odredite singularnu dekompoziciju matrice $A^T A$, te prikažite jezgru i sliku od $A^T A$ pomoću singularnih vektora.