

Prvi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa
2014./15.

Zadatak 1. (5 bodova) Materijalna točka se giba pravocrtno tako da je $v^2(t) = 2cx(t)$, gdje je $v(t)$ brzina u trenutku t , $x(t)$ položaj u trenutku t i c konstanta. Odredite ubrzanje materijalne točke.

Zadatak 2. (10 bodova) Dvije stranice trokuta imaju fiksne duljine 4 cm i 5 cm. Ako se kut između njih povećava brzinom 0.06 rad/s, odredite brzinu kojom se mijenja površina trokuta u trenutku kada je kut između danih stranica $\pi/6$.

Zadatak 3. (10 bodova) Brzina promjene količine neke tvari koja se raspada proporcionalna je količini neraspadnute tvari, s konstantom proporcionalnosti k . Odredite u kojem trenutku T će količina neraspadnute tvari biti jednaka količini raspadnute tvari.

Zadatak 4. (10 bodova) Odrediti zakrivljenost krivulje zadane parametrizacijom $r(t) = (t, 3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. (15 bodova) Cijena goriva koje troši neki radni stroj proporcionalna je kvadratu njegove brzine i za brzinu od 25 km/h iznosi 25 kn/h. Također postoji i fiksni trošak održavanja stroja (neovisan o brzini) koji po radnom satu iznosi 100 kn. Odredite brzinu stroja koja minimizira cijenu rada stroja po kilometru.

Zadatak 6. (15 bodova) Dokažite da je jednadžbu tangente na krivulju $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in \mathbb{R}$ u točki $P(x, y)$ dana s $y \cos t + x \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$. Odredite duljinu odsječka što ga na tangenti odsijecaju koordinatne osi.

Zadatak 7. (15 bodova) Za krivulju zadanu u polarnim koordinatama s $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$ odredite $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2$.

Zadatak 8. (20 bodova) Posuda od vodopropusnog materijala je oblika stošca s vrhom prema dolje koji ima visinu 16 cm i polumjer baze 5 cm. Posuda je dijelom ispunjena vodom koja istječe kroz plašt posude brzinom koja je proporcionalna površini posude koja je u doticaju s tekućinom. Ako sipamo vodu u posudu brzinom $2 \text{ cm}^3/\text{min}$, tada se visina tekućine u posudi povećava brzinom $0.3 \text{ cm}/\text{min}$ u trenutku kada je visina popunjenog dijela 10 cm. Ako želimo održati konstantnu visinu vode u posudi na 10 cm, kojom brzinom trebamo ulijevati vodu u posudu?

Zadatak 9. (20 bodova) Neka je položaj čestice u trenutku t dan s $r(t)$. Dokažite da za akceleraciju čestice vrijedi $a = \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{|r'(t)|} T + \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|} N$, gdje su T i N tangencijalni i normalni vektor.

Zadatak 10. (20 bodova) Pravac $y = mx + b$ siječe parabolu $y = x^2$ u točkama A i B . Odredite točku P na luku parabole AOB takvu da je površina trokuta $\triangle PAB$ maksimalna.