

PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - A grupa

Zadatak 1. [1 bod + 1 bod + 1 bod + 2 boda]

- Objasnite klasičan pristup definiranju vjerojatnosti. Napišite aksiomatsku definiciju vjerojatnosti.
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Precizno formulirajte svojstvo  $\sigma$  - subaditivnosti vjerojatnosti.
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor gdje je  $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a < b$  proizvoljan interval realnih brojeva, a  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  generirana svim otvorenim podintervalima skupa  $\Omega$ . Kako u tom slučaju, ako zanemarimo pretpostavku o jednakoj vjerojatnosti intervala jednake duljine, zadajemo vjerojatnost  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ?
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Precizno iskažite teorem o formuli potpune vjerojatnosti.

Zadatak 2. [5 bodova]

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji  $A, B \in \mathcal{F}$  takvi da vrijedi  $P(A) > 0$ ,  $P(B|A) = P(B|A^c)$ . Dokažite da su tada događaji  $A$  i  $B$  nezavisni.

Zadatak 3. [4+4 boda]

Standardni špil od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Na slučajan način iz špila biramo 5 karata. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- izvučena je barem jedna pik karta.
- izvučeno je točno 3 crvene karte ili točno 3 karo karte.

Zadatak 4. [5 bodova]

Neki sustav hlađenja ima dvije nezavisne komponente. Vjerojatnost otkazivanja prve komponente je 0.05, a druge 0.08. Odredite vjerojatnost otkazivanja samo jedne od komponenti.

Zadatak 5. [10 bodova]

U kutiju koja sadrži  $n$  kuglica ubačena je jedna crvena kuglica. Sve pretpostavke o početnom broju crvenih kuglica su jednako vjerojatne. Izvlači se jedna kuglica iz kutije.

- Odredite vjerojatnost da se prilikom izvlačenja ne izvuče crvena kuglica.
- Ukoliko je početni broj kuglica tri ( $n = 3$ ) i ako je prilikom izvlačenja izvučena crvena kuglica, koji je najmanje vjerojatan početni broj crvenih kuglica?

Zadatak 6. [7 bodova]

Odredite vjerojatnost da rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 + cx + d = 0$  budu kompleksni brojevi ukoliko su  $c$  i  $d$  slučajno odabrani brojevi takvi da je  $c \in [-12, 12]$  i  $d \in [-4, 4]$ .

PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - B grupaZadatak 1. [1 bod + 1 bod + 1 bod + 2 boda]

- Objasnite statistički pristup definiranju vjerojatnosti. Napišite aksiomatsku definiciju vjerojatnosti.
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Precizno formulirajte svojstvo vjerojatnosti unije dvaju ne nužno disjunktih događaja  $A, B \in \mathcal{F}$ .
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  diskretan vjerojatnosni prostor. Kako u tom slučaju zadajemo vjerojatnost  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ?
- Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Precizno iskažite teorem o formuli potpune vjerojatnosti.

Zadatak 2. [5 bodova]

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji  $A, B \in \mathcal{F}$  takvi da vrijedi  $P(B) > 0$ ,  $P(A|B^c) - P(A|B) = 0$ . Dokažite da su tada događaji  $A$  i  $B$  nezavisni.

Zadatak 3. [4+4 boda]

Standardni špil od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Na slučajan način iz špila biramo 6 karata. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- nije izvučena niti jedna karo karta.
- izvučeno je točno 2 crne karte ili točno 2 pik karte.

Zadatak 4. [5 bodova]

Neki sustav hlađenja ima dvije nezavisne komponente. Vjerojatnost otkazivanja prve komponente je 0.06, a druge 0.07. Ukoliko otkáže bilo koja od komponenti, sustav hlađenja prestaje raditi. Odredite vjerojatnost prestanka rada sustava hlađenja.

Zadatak 5. [10 bodova]

U kutiju koja sadrži  $n$  kuglica ubačena je jedna zelena kuglica. Sve pretpostavke o početnom broju zelenih kuglica su jednako vjerojatne. Izvlači se jedna kuglica iz kutije.

- Odredite vjerojatnost da se prilikom izvlačenja izvuče zelena kuglica.
- Ukoliko je početni broj kuglica četiri ( $n = 4$ ) i ako je prilikom izvlačenja izvučena zelena kuglica, koji je najvjerojatniji početni broj zelenih kuglica?

Zadatak 6. [7 bodova]

Odredite vjerojatnost da rješenja kvadratne jednadžbe  $x^2 + ax + b = 0$  budu realni brojevi ukoliko su  $a$  i  $b$  slučajno odabrani brojevi takvi da je  $a \in [-3, 3]$  i  $b \in [-1, 1]$ .