

PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - A grupa

Zadatak 1. [2 boda + 2 boda + 1 bod]

- Objasnite klasičan pristup definiranju vjerojatnosti. Napišite aksiomatsku definiciju vjerojatnosti.
- Napišite barem tri svojstva vjerojatnosti te dokažite jedno.
- Definirajte potpun sustav događaja i napišite formulu potpune vjerojatnosti.

Zadatak 2. [5 bodova]

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi $P(A) = p$, $P(B^c) = q$, gdje je $p, q \in (0, 1)$. Dokažite da tada vrijedi

$$P(A|B) \geq \frac{p-q}{1-q}.$$

Zadatak 3. [4+4 boda]

Standardni špil od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Na slučajan način iz špila biramo 6 karata. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- izvučena je sedmica karo
- izvučeni su barem jedan herc, karo, pik i tref.

Zadatak 4. [5 bodova]

U vlak s 10 putničkih vagona na slučajan način i nezavisno jedan od drugoga ulazi 15 putnika. Odredite vjerojatnost da barem jedan putnik uđe u treći ili sedmi vagon.

Zadatak 5. [10 bodova]

Neka osoba u džepu ima 3 bijele i 6 crnih kuglica. U nekom trenutku iz džepa ispadne (izgubi se) jedna kuglica. Nakon toga, iz džepa su na slučajan način izvučene dvije kuglice. Ukoliko su izvučene kuglice bijele boje, kolika je vjerojatnost da je izgubljena kuglica bijele boje?

Zadatak 6. [7 bodova]

Neka su x i y slučajno odabrani brojevi iz segmenta $[0, 1]$. Ako su dani događaji

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : |x - y| \leq 1/2\}, \quad B = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \max\{x, y\} \leq 1/2\},$$

odredite $P(A \cap B)$.

PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - B grupa

Zadatak 1. [2 boda + 2 boda + 1 bod]

- Objasnite statistički pristup definiranju vjerojatnosti. Napišite aksiomatsku definiciju vjerojatnosti.
- Napišite barem tri svojstva vjerojatnosti te dokažite jedno.
- Definirajte potpun sustav događaja i napišite Bayesovu formulu.

Zadatak 2. [5 bodova]

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi $P(A) = p$, $P(B^c) = q$, gdje je $p, q \in (0, 1)$. Dokažite da tada vrijedi

$$P(A|B) \leq \frac{(1-q)p + qP(A \cap B)}{1-q}.$$

Zadatak 3. [4+4 boda]

Standardni špil od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Na slučajan način iz špila biramo 6 karata. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- izvučena je devetka tref
- izvučeni su barem jedan herc, karo, pik i tref.

Zadatak 4. [5 bodova]

U vlak s 5 putničkih vagona na slučajan način i nezavisno jedan od drugoga ulazi 10 putnika. Odredite vjerojatnost da niti jedan putnik nije ušao u prvi i četvrti vagon.

Zadatak 5. [10 bodova]

Neka osoba u džepu ima 4 bijele i 4 crne kuglice. U nekom trenutku iz džepa ispadne (izgubi se) jedna kuglica. Nakon toga, iz džepa su na slučajan način izvučene dvije kuglice. Ukoliko su izvučene kuglice crne boje, kolika je vjerojatnost da je izgubljena kuglica bijele boje?

Zadatak 6. [7 bodova]

Neka su x i y slučajno odabrani brojevi iz segmenta $[0, 1]$. Ako su dani događaji

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : |x - y| \leq 1/2\}, \quad B = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \min\{x, y\} > 1/2\},$$

odredite $P(A \cap B)$.