

DRUGI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - A grupa

Zadatak 1. [2 boda + 1 bod + 2 boda]

- Definirajte varijancu slučajne varijable. Koristeći prethodnu definiciju dokažite da vrijedi $\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2$.
- Neka je (X, Y) diskretan slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Definirajte kovarijancu slučajnih varijabli X i Y .
- Definirajte neprekidnu slučajnu varijablu. Navedite svojstva koja zadovoljava pripadna funkcija gustoće.

Zadatak 2. [4 boda + 4 boda]

U kutiji se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice. Osoba izvlači 3 kuglice zaredom i to

- bez vraćanja,
- s vraćanjem.

Odredite očekivani broj izvučenih crnih kuglica i vjerojatnost da je osoba izvukla točno dvije crne kuglice.

Zadatak 3. [4 boda + 3 boda]

Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj n realizira s vjerojatnošću $\frac{3}{4^n}$, tj.

$$P(X = n) = \frac{3}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte vjerojatnost da realizacija slučajne varijable X od njenog očekivanja odstupa za barem dvije standardne devijacije.

Zadatak 4. [4 boda + 4 boda]

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{25} e^{-\frac{2}{5}\sqrt{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

- Odredite vrijednost konstante k .
- Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = 3X - 1$.

Zadatak 5. [4 boda + 3 boda]

Neka je $X \sim \mathcal{U}(2, 4)$. Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable $Y = e^X$.

Zadatak 6. [4 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda]

U kutiji se nalazi 6 bijelih kuglica po 3g i 4 crne kuglice po 5g. Na slučajan način odjednom izvlačimo 2 kuglice bez vraćanja. Neka je X broj izvučenih bijelih kuglica, a Y ukupna težina izvučenih kuglica. Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) i pripadne marginalne distribucije. Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne (zašto)? Odredite vjerojatnost $P(X \cdot Y > 9)$.

DRUGI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - B grupa

Zadatak 1. [2 boda + 1 bod + 2 boda]

- Definirajte varijancu slučajne varijable. Koristeći prethodnu definiciju dokažite da vrijedi $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}X$, gdje su a i b realni brojevi.
- Neka je (X, Y) diskretan slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Definirajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y .
- Definirajte diskretnu slučajnu varijablu. Definirajte pripadnu tablicu distribucije diskretne slučajne varijable i navedite uvjete koje moraju zadovoljavati njezini elementi.

Zadatak 2. [4 boda + 4 boda]

U kutiji se nalaze 3 crvene i 7 zelenih kuglica. Osoba izvlači 3 kuglice zaredom i to

- bez vraćanja,
- s vraćanjem.

Odredite očekivani broj izvučenih zelenih kuglica i vjerojatnost da je osoba izvukla točno dvije zelene kuglice.

Zadatak 3. [4 boda + 3 boda]

Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj n realizira s vjerojatnošću $\frac{2}{3^n}$, tj.

$$P(X = n) = \frac{2}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte vjerojatnost da realizacija slučajne varijable X od njenog očekivanja odstupa za barem dvije standardne devijacije.

Zadatak 4. [4 boda + 4 boda]

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{16}x^3e^{-x/2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

- Odredite vrijednost konstante k .
- Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = 2X + 1$.

Zadatak 5. [4 boda + 3 boda]

Neka je $X \sim \mathcal{U}(1, 3)$. Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable $Y = e^X$.

Zadatak 6. [4 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda]

U kutiji se nalazi 7 žutih kuglica po 5g i 3 zelene kuglice po 4g. Na slučajan način izvlačimo odjednom 2 kuglice bez vraćanja. Neka je X ukupna težina izvučenih kuglica, a Y broj izvučenih zelenih kuglica. Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) i pripadne marginalne distribucije. Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne (zašto)? Odredite vjerojatnost $P(X \cdot Y < 10)$.