

DRUGI KOLOKVIJ IZ NEJEDNAKOSTI

1. [25 bodova]

- (a) Iskažite i dokažite Cauchyevu nejednakost.
(b) Iskažite i dokažite diskretni oblik Youngove nejednakosti.

2. [15 bodova] Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokažite:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

3. [20 bodova] Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$\frac{c}{a+3b} + \frac{d}{b+3c} + \frac{a}{c+3d} + \frac{b}{d+3a} \geq 1.$$

4. [15 bodova] Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xy+yz+xz+xyz = 4$. Dokažite:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \geq 3\sqrt{3}.$$

5. [15 bodova] Neka su x_1, x_2, \dots, x_n pozitivni realni brojevi, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Dokažite ili opovrgnite nejednakost:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}.$$

6. [10 bodova] Navedite Čebiševljevu nejednakost i Grüssovu nejednakost.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.