ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU

18. prosinca 2014.

PRVI KOLOKVIJ IZ NEJEDNAKOSTI

1. **[20 bodova]**
   (a) Napišite definiciju konveksne funkcije, njenu geometrijsku interpretaciju i primjer.
   (b) Napišite definiciju Jensen konveksne funkcije, njenu geometrijsku interpretaciju i primjer.
   (c) Pojasnite odnos između konveksne i Jensen konveksne funkcije.

2. **[15 bodova]** Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi, takvi da vrijedi $a + b + c + d = 1$. Dokažite:
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\left(d+\frac{1}{d}\right)^2 \geq \frac{289}{4}.$$

3. **[15 bodova]** Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Dokažite:
$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

4. **[15 bodova]** Pomoću Jensenove nejednakosti dokažite težinsku AH-nejednakost.

5. **[20 bodova]** Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite:
$$a+b+c+\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq 4 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

6. **[15 bodova]** Neka su $x_1, ...x_n$ pozitivni brojevi, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $p_1, ...p_n$ realni brojevi takvi da vrijedi $p_1 > 0$, $p_i < 0$ za $i = 2, ..., n$ i $P_n = \sum_{i=1}^n p_i > 0$. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{p_1x_1 + ... + p_nx_n}{P_n} \leq \left(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}\right)^{1/P_n}$$

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.