

PISMENI ISPIT IZ UVODA U TEORIJU BROJEVA

1. a) Dokažite da za sve prirodne brojeve a, b vrijedi $(a, b) \leq (a + b, a - b)$.
b) Neka je $p > 3$ prost prirodan broj. Dokažite da je tada barem jedan od brojeva $p + 2$ ili $p + 4$ složen broj.
2. Neka je u ostatak od 43^{2356} modulo 211. Nađite barem jedno rješenje sustava kongruencija

$$ux \equiv 283 \pmod{313}$$

$$x \equiv 8 \pmod{19}.$$

3. Dokažite da $2184 | n^{15} - n^3$, za svaki prirodan broj n .
4. Postoji li cijeli broj k takav da je $k^2 + 12$ djeljivo s 1987?
5. Odredite tri para $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ koji su rješenja jednadžbe $-7x^2 + 18xy - 7y^2 = 1$.