

Prvi kolokvij iz Uvoda u teoriju brojeva

5. svibnja 2017.

1. Neka je n višekratnik broja 3. Dokažite da se razlomak $\frac{n-2}{2n-1}$ ne može skratiti.
2. Neka su p_1, p_2, \dots, p_i prosti brojevi oblika $4k+3$ i $N = 4p_1p_2 \cdots p_i - 1$.
 - (i) Dokažite da N ne može biti potpun kvadrat.
 - (ii) Dokažite da N ima prosti faktor oblika $4k+3$.

3. Ako za prirodni broj n vrijedi

$$\tau(5n) = 2\tau(n),$$

dokažite da je $(n, 5) = 1$.

4. Odredite sve cijele brojeve x, y, z sa svojstvom da je

$$x \equiv 2 \pmod{8}, \quad x \equiv 10 \pmod{28}$$

i

$$2y + 3z = x.$$

5. Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi. Dokažite da je

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.