



Ime i prezime _____



Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata i ukupno nosi 110 bodova od kojih 45 jest za prolaz. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija.

Zadatak 1 (5+20). a) Definirajte uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

b) Neka je dan sustav $Ax = b$, $b \neq 0$ i neka je \hat{x} aprosimacija rješenja x . Dokažite da za vektor $v = A\hat{x} - b$ vrijedi

$$\|x - \hat{x}\| \leq \kappa(A) \frac{\|v\| \|x\|}{\|b\|},$$

ako je $\kappa(A)$ uvjetovanost matrice A u normi $\|\cdot\|$.

Zadatak 2 (25). Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite potreban broj koraka tako da apsolutna greška u $\|\cdot\|_1$ bude manja od 10^{-3} . Zadano je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite prve tri aprosimacije rješenja Jacobijevom metodom.

Zadatak 3 (20). Odredite QR faktorizaciju matrice

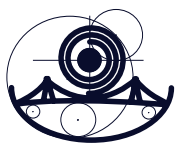
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

te riješite sustav $Ax = b$ pomoću QR faktorizacije ako je $b = [-4, -4, 10, -3, 2]^T$

Zadatak 4 (20). Dokažite da ukoliko iterativna metoda $Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)}$ konvergira, vrijedi ocjena

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

gdje je $C = -M^{-1}N$.



Zadatak 5 (20). Dokažite tvrdnju: Ako je A nesingularna i $r = \|A^{-1}E\| < 1$, tada je $A + E$ nesingularna i vrijedi

$$\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|E\| \|A^{-1}\|^2}{1 - r}.$$