

## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 115 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "★" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

---

### Zadatak 1 (10+10+5+10).

- ★ Dokažite da je  $\|\cdot\|_F$  matična norma.
- Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitska pozitivno definitna matrica. Dokažite da je

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

- ★ Definirajte induciranu matičnu normu.
- Dokažite da vrijedi

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

### Zadatak 2 (15).

- ★ Neka je dan sustav  $Ax = b, b \neq 0$  i neka je  $\hat{x}$  aproksimacija rješenja  $x$ . Dokažite da za vektor  $v = A\hat{x} - b$  vrijedi

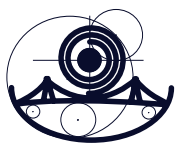
$$\|x - \hat{x}\| \leq \kappa(A) \frac{\|v\| \|x\|}{\|b\|},$$

ako je  $\kappa(A)$  uvjetovanost matrice  $A$  u normi  $\|\cdot\|$ .

### Zadatak 3 (5+10).

- ★ Definirajte uvjetovanost matrice.
- Odredite  $\kappa_2(A), \kappa_\infty(B), \kappa_F(B)$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}.$$



**Zadatak 4 (5+5+15).**

- ★ Iskažite teorem LU faktorizacije.
- ★ Napišite algoritam povratnih supstitucija.
- Odredite LU faktorizacija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 4 \\ -3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

te primjenom algoritma Gaussovih eliminacija riješite sustav  $Ax = b$ , ako je  $b = [8, 13, -23]$ .

**Zadatak 5 (10+15).**

- Provjerite je li funkcija  $G(\cdot) : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$G \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} [|a+d| + |a-d| + |b| + |c|]$$

matrična norma.

- Pokažite da ako su  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A$  invertibilna i  $A + B$  singularna, tada vrijedi  $\|B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$  za svaku matričnu normu  $\|\cdot\|$ .