Kolokvij 1- A

9.11.2018.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 115 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "$\star$" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (10+10+5+10).

- $\star$ Dokažite da je $||\cdot||_F$ matrična norma.
- Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska pozitivno definitna matrica. Dokažite da je

$$||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

- $\star$ Definirajte induciranu matričnu normu.
- Dokažite da vrijedi

$$||A||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Zadatak 2 (15).

- $\star$ Neka je dan sustav $Ax = b, b \neq 0$ i neka je $\hat{x}$ aproksimacija rješenja x. Dokažite da za vektor $v = A\hat{x} - b$ vrijedi

$$||x - \hat{x}|| \leq \kappa(A) \frac{||v||||x||}{||b||},$$

ako je $\kappa(A)$ uvjetovanost matrice A u normi $||\cdot||$.

Zadatak 3 (5+10).

- $\star$ Definirajte uvjetovanost matrice.
- Odredite $\kappa_2(A)$, $\kappa_\infty(B)$, $\kappa_F(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4 (5+5+15).

- ⋆ Iskažite teorem LU faktorizacije.
- ⋆ Napišite algoritam povratnih supstitucija.
- Odredite LU faktorizacija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 4 \\ -3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

te primjenom algoritma Gaussovih eliminacija riješite sustav $Ax = b$, ako je $b = [8, 13, -23]$.

Zadatak 5 (10+15).

- Provjerite je li funkcija $G(\cdot) : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ defnirana s

$$G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}[| a + d | + | a - d | + | b | + | c |]$$

matrična norma.

- Pokažite da ako su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A invertibilna i $A + B$ singularna, tada vrijedi $||B|| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}$ za svaku matričnu normu $|| \cdot ||$.