Kolokvij 3- A

18.1.2019.

Ime i prezime ____________________ Teorija ________

Zadaci ________

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. **Kodovi se šalju na e-mail mpuvaca@mathos.hr uz naslov/predmet e-mail-a "NLA−3kolokvij".** Kolokvij nosi 120 bodova. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "$\star$" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (10).

- Konstruirajte Householderovu matricu H tako da poništi $x_2, x_3, x_6, x_9, x_{10}$, pri čemu je x_4, x_7 nepromjenjena. Neka je vektor $x = [2, -1, 2, 4, 1, 3, 2, 1, -5, 2]^T$. Napišite čemu je jednako Hx.

Zadatak 2 (5+10+15).

$\star$ Definirajte pseudo inverz.

$\star$ Iskažite uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pomoću singularnih vrijednosti matrice A te dokažite tu tvrdnju.

$\star$ Neka je A simetrična pozitivno definitna matrica i neka je x_k k-ta aproksimacija dobivena metodom najbržeg silaska te neka je r_k odgovarajući rezidual. Dokažite da vrijedi

$$(x - x_{k+1})^T A r_k = 0 \quad \text{i} \quad ||x - x_{k+1}||_A \leq ||x - x_k||_A.$$

Zadatak 3 (10+15).

- Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$, koristeći algoritam za LPNK pomoću SVD dekompozicije, ako je

$$A \in \mathbb{R}^{40\times 3}, A(i,:) = [i^2, log(i), \frac{1}{i}], \quad b \in \mathbb{R}^{40}, b(i) = -\sqrt{i} + 4.$$

  Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi \ i inv$(\cdot)$.

  Napišite dobiveno rješenje i odgovarajuću normu reziduala.

$\star$ Izvedite rješenje LPNK x s najmanjom 2-normom, ukoliko je $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$ te Σ ima r netrivijalnih svojstvenih vrijednosti.

Zadatak 4 (5+15). Neka je dan sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 21 & 4 \\ -5 & 5 & 5 & -18 \\ -20 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 23 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \quad b = [4, 3, 2, 1]^T \in \mathbb{C}^4.$$

- Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $PAx = Pb$ može riješiti Gauss-Seidelovom metodom te objesnite zašto ste odabrali baš tu matricu P.
- Napravite program koji Gauss-Seidelovom metodom određuje aproskimaciju rješenja sustava $PAx = Pb$ tako da norma $||\cdot||_1$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite $[1, 1, 1, 1]^T$.

  Koliko je koraka bilo potrebno napraviti s Gauss-Seidelovom metodom?
  Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala? Koliko koraka bi bilo potrebno napraviti u Gauss-Seidelovom algoritmu da nam je uvjet bio da je norma $||\cdot||_\infty$ greške u odnosu na pravo rješenje manja od 0.0001?

Zadatak 5 (5+20+10). Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 13 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 14 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 21 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{10\times 10}, \quad b = [20, 18, 16, \dots, 2]^T \in \mathbb{C}^{10}.$$

- Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom?
- Napišite program koji rješava sustav metodom najbržeg silaska tako da norma $||\cdot||_F$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite nul-vektor.

  Koliko je koraka bilo potrebno napravit metodom najbržeg silaska?
  Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala?

⋆ Za iterativnu metodu najbržeg silaska vrijedi $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$, izvedite formulu za α_k za tu metodu.