



Ime i prezime _____ Teorija _____
Zadaci _____

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. **Kodovi se šalju na e-mail mpuvaca@mathos.hr uz naslov/predmet e-mail-a "NLA-3kolokvij"**. Kolokvij nosi 120 bodova. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "*" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (10).

- Konstruirajte Householderovu matricu H tako da poništi $x_2, x_3, x_6, x_9, x_{10}$, pri čemu je x_4, x_7 nepromjenjena. Neka je vektor $x = [2, -1, 2, 4, 1, 3, 2, 1, -5, 2]^T$. Napišite čemu je jednako Hx .

Zadatak 2 (5+10+15).

- ★ Definirajte pseudo inverz.
- ★ Iskažite uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pomoću singularnih vrijednosti matrice A te dokažite tu tvrdnju.
- ★ Neka je A simetrična pozitivno definitna matrica i neka je x_k k -ta aproksimacija dobivena metodom najbržeg silaska te neka je r_k odgovarajući rezidual. Dokažite da vrijedi

$$(x - x_{k+1})^T A r_k = 0 \quad \text{i} \quad \|x - x_{k+1}\|_A \leq \|x - x_k\|_A.$$

Zadatak 3 (10+15).

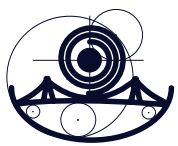
- Odredite x koji minimizira normu $\|Ax - b\|_2$, koristeći algoritam za LPNK pomoću SVD dekompozicije, ako je

$$A \in \mathbb{R}^{40 \times 3}, A(i, :) = [i^2, \log(i), \frac{1}{i}], \quad b \in \mathbb{R}^{40}, b(i) = -\sqrt{i} + 4.$$

Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi \setminus i $\text{inv}(\cdot)$.

Napišite dobiveno rješenje i odgovarajuću normu reziduala.

- ★ Izvedite rješenje LPNK x s najmanjom 2-normom, ukoliko je $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ te Σ ima r netrivialnih svojstvenih vrijednosti.



Zadatak 4 (5+15). Neka je dan sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 21 & 4 \\ -5 & 5 & 5 & -18 \\ -20 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 23 & 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}, \quad b = [4, 3, 2, 1]^T \in \mathbb{C}^4.$$

- Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $P Ax = P b$ može riješiti Gauss-Seidelovom metodom te objasnite zašto ste odabrali baš tu matricu P .
- Napravite program koji Gauss-Seidelovom metodom određuje aproksimaciju rješenja sustava $P Ax = P b$ tako da norma $\|\cdot\|_1$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite $[1, 1, 1, 1]^T$.

Koliko je koraka bilo potrebno napraviti s Gauss-Seidelovom metodom?
Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala? Koliko koraka bi bilo potrebno napraviti u Gauss-Seidelovom algoritmu da nam je uvjet bio da je norma $\|\cdot\|_\infty$ greške u odnosu na pravo rješenje manja od 0.0001?

Zadatak 5 (5+20+10). Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 13 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 14 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 21 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}, \quad b = [20, 18, 16, \dots, 2]^T \in \mathbb{C}^{10}.$$

- Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom?
- Napišite program koji rješava sustav metodom najbržeg silaska tako da norma $\|\cdot\|_F$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite nulvektor.

Koliko je koraka bilo potrebno napraviti metodom najbržeg silaska?
Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala?

- ★ Za iterativnu metodu najbržeg silaska vrijedi $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$, izvedite formulu za α_k za tu metodu.