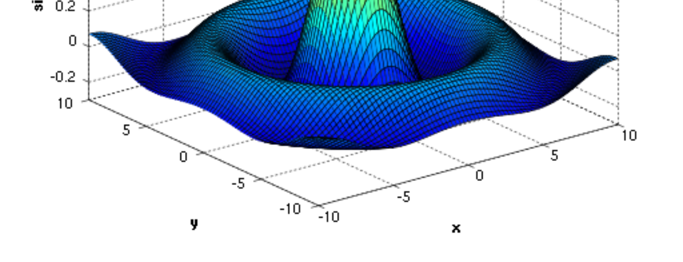


Numerička linearna algebra

Tema: Vježbe - Linearni problem najmanjih kvadrata

21.5.2020.

predavač: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

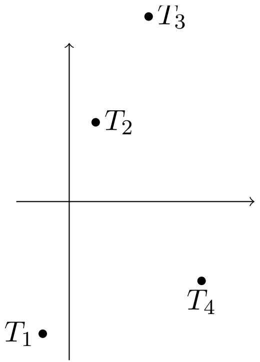
asistent: Matea Puvača

Problem najmanjih kvadrata - 2D

Želimo odrediti pravac $p \ldots y = kx + l$ koji najbolje aproksimira funkciju f. Zadane su vrijednosti funkcije f u nekim točkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj. $T_i(x_i, f(x_i))$, $n \geq 2$.

Određujemo k i l koji minimiziraju

$$S(k,l) = \sum_{k=1}^{n} [(kx_k + l) - f(x_k)]^2.$$



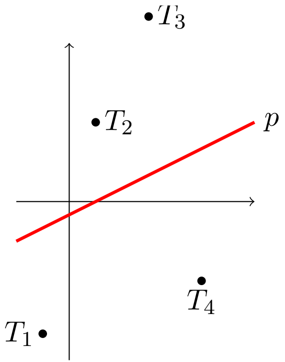
Slika: Pravac koji najbolje aproksimira zadane točke

Problem najmanjih kvadrata - 2D

Želimo odrediti pravac $p ... y = kx + l$ koji najbolje aproksimira funkciju f. Zadane su vrijednosti funkcije f u nekim točkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj. $T_i(x_i, f(x_i))$, $n \geq 2$.

Određujemo k i l koji minimiziraju

$$S(k,l) = \sum_{k=1}^{n} [(kx_k + l) - f(x_k)]^2.$$



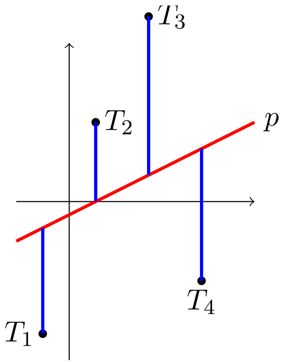
Slika: Pravac koji najbolje aproksimira zadane točke

Problem najmanjih kvadrata - 2D

Želimo odrediti pravac $p \dots y = kx + l$ koji najbolje aproksimira funkciju f. Zadane su vrijednosti funkcije f u nekim točkama $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. $T_i(x_i, f(x_i))$, $n \geq 2$.

Određujemo k i l koji minimiziraju

$$S(k,l) = \sum_{k=1}^{n} [(kx_k + l) - f(x_k)]^2.$$



Slika: Pravac koji najbolje aproksimira zadane točke

Problem najmanjih kvadrata - zapis 2D problema u matričnom obliku

Imamo sustav

$$\begin{aligned} kx_1 + l &= f(x_1), \\ kx_2 + l &= f(x_2), \\ kx_3 + l &= f(x_3), \\ kx_4 + l &= f(x_4). \end{aligned}$$

Možemo ga zapisati kao $Ax = b$ pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}.$$

Minimizirali smo $S(k,l) = ||Ax - b||_2^2$.

GENERALIZACIJA

- $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$
- Treba odrediti $x \in \mathbb{C}^n$ tako da je $||Ax - b||_2 \to min$, što je ekvivalentno $||Ax - b||_2^2 \to min$.

Normalne jednadžbe

Korolar

Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ rješava linearni problem najmanjih kvadrata ako i samo ako

$$A^*Ax = A^*b.$$

ALGORITAM NA RJEŠAVANJE LPNK POMOĆU SUSTAVA NORMALNIH JEDNADŽBI(A, b)

1. izračunati A^*A, A^*b
2. riješiti $(A^*A)x = A^*b$

Zadatak 1.

Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 8 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = [-1, 2, 4]^T$$

koristeći normalne jedndažbe.

SVD dekompozicija

Definicija

Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, za $m, n \in \mathbb{N}$. Rastav matice

$$A = U\Sigma V^*$$

zovemo singularna dekompozicija matrice A, ako su $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne, a $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dijagonalna

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}),$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ zovemo singularne vrijednosti matrice A. Stupce matrice U zovemo lijevi, a stupce matrice V desni singularni vektori matrice A.

SVD dekompozicija

ALGORITAM NA RJEŠAVANJE LPNK POMOĆU SVD DEKOMPOZICIJE(A, b)

1 izračunati reduciranu SVD dekompoziciju $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$
2 izračunati $\hat{U}^* b$
3 riješiti $\hat{\Sigma} y = \hat{U}^* b$
4 vratiti $x = \hat{V} y$

Algoritam zadovoljava

$$A^*Ax = A^*\hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*x = A^*\hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*\hat{V}y = A^*\hat{U}\hat{\Sigma}y = A^*\hat{U}\hat{U}^*b = A^*b,$$

pa stoga rješava dani problem.

Zadatak 2.

Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 8 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = [-1, 2, 4]^T$$

koristeći SVD dekompoziciju.

QR dekompozicija

ALGORITAM NA RJEŠAVANJE LPNK POMOĆU QR DEKOMPOZICIJE(A, b)

1. izračunati reduciranu QR dekompoziciju $A = \hat{Q}\hat{R}$
2. izračunati $\hat{Q}^*b$
3. riješiti $\hat{R}x = \hat{Q}^*b$ pomoću supstitucije unatrag

Algoritam zadovoljava

$$A^*Ax = A^*\hat{Q}\hat{R}x = A^*\hat{Q}\hat{Q}^*b = A^*b,$$

pa stoga rješava dani problem.

Zadatak 3.

Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 8 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = [-1, 2, 4]^T$$

koristeći QR dekompoziciju.

Zadatak 4.

Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = [1, 2, 3, 4, 5]^T.$$

Iskoristite sve tri metode. Pri korištenhu QR faktorizacije nije dozvoljeno koristiti naredbu `qr`. (Odraditi ”pješke” poništavanje Householderovim reflektorima.) Također pri korištenju SVD faktorizacije, za rješavanje sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi $\backslash$, `inv`.