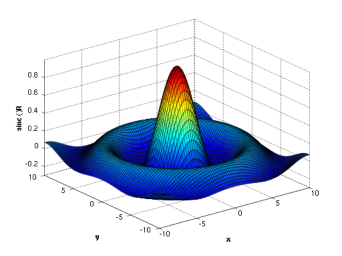

M033 Metode numeričke matematike

Tema: Vježbe - QR faktorizacija, Jacobijeva metoda, Gauss-Seidelova metoda

7.5.2020.

predavač: doc.dr.sc. Suzana Miodragović

asistent: Matea Puvača

Zadatak 1

Konstruirajte Householderovu matricu takvu da poništi:

1. sve osim x_1 i x_2, pri čemu je x_1 nepromjenjena,
2. x_2, x_3, x_6, pri čemu su x_4 i x_7 nepromjenjene,

ako je vektor $x = [2, -1, 1, 4, 1, -5, 1]^T$.

Zadatak 2(DZ)

Napišite funkciju "gs" koja određuje QR faktorizaciju matrice A pomoću Gram - Schmidtove ortogonalizacije. Na proizvoljnom primjeru pokažite nestabilnost funkcije "gs".

Algoritam QR faktorizacije pomoću Gram - Schmidta

Neka je $A = [a_1, \ldots, a_n]$.

GS*(A)

$q_1 = \frac{a_1}{||a_1||_2}, r_{11} = ||a_1||_2$
for $j = 2, \ldots, n$
  $\hat{q}_j = a_j$
  for $k = 1, \ldots, j-1$
    $r_{kj} = \langle q_k, a_j \rangle$
    $\hat{q}_j = \hat{q}_j - r_{kj} q_k$
  end
  $r_{jj} = ||\hat{q}_j||_2$
  if $r_{jj} > 0$ **then**
    $q_j = \frac{\hat{q}_j}{r_j j}$
  else Matrica je singularna.
  end
end

*Pojednostavljena verzija za regularne matrice

Rješavanje sustava pomoću QR faktorizacije

Algoritam:

1) $A = QR$
2) $y = Q^* b$
3) $Rx = y$ pomoću povratnih supstitucija

Algoritam QR faktorizacije pomoću Householderovih reflektora

QRFAKT (A)

1) $Q = I, R = A$
2) **for** $k = 1, \ldots, n-1$
3) $\quad u = (r_{kk}, \ldots, r_{mk})^*$
4) $\quad \tilde{v} = \text{sign}(u_1)||u||_2 e_1$, gdje je $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$
5) $\quad v = \frac{\tilde{v}}{||\tilde{v}||_2}$
6) $\quad H_k = (I_{m-k+1} - 2vv^*)$
7) $\quad Q_k = [I_{k-1}, \quad 0; 0, \quad H_k]$
8) $\quad R = Q_k R$
9) $\quad Q = QQ_k$
10) **end**

Zadatak 3

Napišite funkciju ”qrfakt” koja određuje QR faktorizaciju matrice A te riješite sustav:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 18 \\ 20 & -15 & -15 \\ 20 & -12 & 51 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ -43 \end{bmatrix}.$$

- Radi efikasnosti, umjesto direktnog računanja rješenja sustava linearnih jednadžbi, računat ćemo iterativno.
- Rastav matrice $A = M + N$, gdje se M^{-1} računa lakše nego A^{-1}.
- U k-tom koraku rješavamo $Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)}$.
- Greška $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, gdje je x egzaktno rješenje, također vrijedi $e^{(k)} = Ce^{(k-1)}$, gdje je $C = -M^{-1}N$.
- Matricu A rastavljamo na $A = L + D + U$. (donje trokutasta, dijagonalna, gornje trokutasta)

Teorem

$$e^{(k)} \to 0 \iff \rho(C) < 1, \quad \forall\, e^{(0)} \in \mathbb{C}^n.$$

Napomena

Dovoljno provjeriti $||C|| < 1$ za neku matričnu normu jer vrijedi $\rho(C) \leq ||C||$.

Zaustavni kriterij

Za toleranciju ε

$$||x - x^{(k)}|| \leq \varepsilon$$

Ako metoda konvergira, tada vrijedi:

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||C||^k}{1 - ||C||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

Broj potrebnih koraka:

$$k \geq \log \frac{(1 - ||C||)\varepsilon}{||x^{(1)} - x^{(0)}||} \cdot \frac{1}{\log ||C||}$$

Jacobijeva matoda

- $M = D, N = L + U$
- $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$
- $C = -D^{-1}(L+U)$

Teorem

Jacobijeva metoda konvergira za matrice A za koje vrijedi $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ili $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. (Stroga dijagonalna dominacija po recima ili po stupcima)

Gauss-Seidelova matoda

- $M = L + D, N = U$
- $x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}(b - Ux^{(k)})$
- $C = -(L + D)^{-1}U$

Teorem

Gauss-Seidelova metoda konvergira za matrice A za koje vrijedi $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. (Stroga dijagonalna dominacija po recima)

Zadatak 4

Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite takvu aproksimaciju $x^{(k)}$ tako da norma $||\cdot||_\infty$ greške u odnosu na pravo riješenje bude manja od 0.001, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = [-8, 0, 12, 20]^T,$$

uz $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$. Odredite $||\cdot||_\infty$ normu reziduala.

Zadatak 5

Odredite matricu P tako da se sustav $Ax = b$ može riješiti Jacobijevom metodom na $PAx = Pb$. Odredite takvu aproksimaciju $x^{(k)}$ tako da norma $||\cdot||_\infty$ greške u odnosu na pravo riješenje bude manja od 0.001, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = [1, 1, 1]^T,$$

uz $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. Odredite $||\cdot||_\infty$ normu reziduala.

Zadatak 6 (DZ)

Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite potreban broj koraka tako da za aproksimaciju $x^{(k)}$ vrijedi da je norma $||\cdot||_1$ reziduala manja od 0.001, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = [1, 7, 4]^T,$$

uz $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$.

Zadatak 7 (DZ)

Može li se sustav $Ax = b$ riješiti Gauss-Seidelovom metodom. Ako može, odredite takvu aproksimaciju $x^{(k)}$ tako da norma $||\cdot||_\infty$ reziduala bude manja od 0.001, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & 20 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{10\times 10}, \quad b = [1, 2, \dots, 10]^T \in \mathbb{C}^{10},$$

uz $x^{(0)} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{C}^{10}$.