



Metode numeričke matematike

Tema: Vježbe - Iterative metode

—Metoda najbržeg silaska i konjugiranih gradijenata—

14.5.2020.



1 Iterativne metode

Metoda najbržeg silaska

Metoda konjugiranih gradijenata

Zadaci

Algoritmi





Metoda najbržeg silaska

- Promatramo iterativnu metodu danu u obliku $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$, gdje je $r_k = b - Ax_k$.
- A mora biti pozitivno definitna.
- α_k biramo tako da k -tom koraku imamo grešku e_{k+1} s minimalnom A -normom $\left(\|x\|_A = \sqrt{(x^T A x)}\right)$.
- $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}$





Metoda konjugiranih gradijenata

- Promatramo iterativnu metodu danu u obliku $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, gdje je d_k vektor okomit na e_{k+1} , $d_0 = r_0$.
- A mora biti pozitivno definitna.
- α_k biramo tako da k -tom koraku imamo grešku e_{k+1} s minimalnom A -normom $\left(\|x\|_A = \sqrt{(x^T A x)}\right)$.
- $$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$$





Zaustavni kriteriji

Za toleranciju ε

$$\|e_k\| = \|x - x_k\| \leq \varepsilon$$

ili

$$\|r_k\| = \|b - Ax_k\| \leq \varepsilon$$





Zadatak 1.

Izračunajte prve tri aproksimacije rješenja sustava $Ax = b$ uz pomoć metode najbržeg silaska i metode konjugiranih gradijenata ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = [5, 30, 37]^T,$$

uz $x_0 = [0, 0, 0]^T$. Odredite $\|\cdot\|_2$ normu reziduala. Usporedite norme reziduala, te odredite u kojem koraku će norma postignuta metodom najbržeg silaska dostići normu postignutu metodom konjugiranih gradijenata.





Zadatak 2.[DZ]

Riješite sustava $Ax = b$ uz pomoć metode najbržeg silaska tako da $\| \cdot \|_2$ norma reziduala bude manja od 10^{-5} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = [5, 30, 37]^T,$$

uz $x_0 = [0, 0, 0]^T$. Skicirajte normu reziduala u odnosu na broj iteracija.





Algoritmi

METODANAJBRSILASKA(A, b, x_0)

```

1   $r_0 = b - Ax_0$ 
2  for  $k = 1, 2, \dots$ 
3      do  $z = Ar_{k-1}$ 
4           $\alpha_{k-1} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{r_{k-1}^T z}$ 
5           $x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} r_{k-1}$ 
6           $r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} z$ 

```

METODAKONJUGGRAD(A, b, x_0)

```

1   $d_0 = r_0 = b - Ax_0$ 
2  for  $k = 1, 2, \dots, n$ 
3      do  $z = Ad_{k-1}$ 
4           $\alpha_{k-1} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{d_{k-1}^T z}$ 
5           $x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} d_{k-1}$ 
6           $r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} z$ 
7           $\beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}}$ 
8           $d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$ 

```

