



Ime i prezime \_\_\_\_\_



### Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata i ukupno nosi 110 bodova od kojih 45 jest za prolaz. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija.

#### Zadatak 1 (5+20).

- a) Neka je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , uz koji uvijet na matricu  $A$  vrijedi da je matrica  $I + A$  regularna.
- b) Dokažite da u tom slučaju vrijedi nejednakost

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$

**Zadatak 2 (20).** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

- a) Odredite  $\kappa_1(A), \kappa_\infty(A), \kappa_2(A), \kappa_F(A)$ .
- b) Ako u sustavu  $Ax = b, b = [1, 0, 8]^T$  promjenimo vektor  $b$  za  $\Delta b = [0.001, 0.001, 0]^T$  odredite koliko je puta relativna pogreška u rješenju veća od relativne pogreške u vektoru  $b$  u normi  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Zadatak 3 (20).** Odredite matrice  $P, L, U$  koje daju LU faktorizaciju matrice  $A$  s djelomičnim pivotiranjem ako je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 15 & -6 & -18 \\ 6 & 6 & -4 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & -15 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

te odredite faktor rasta ove matrice.

**Zadatak 4 (20).** Pomoću QR faktorizacije riješite sustav  $Ax = b$ , gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5 (25).** Dokažite da ukoliko iterativna metoda  $Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)}$  konvergira, vrijedi ocjena

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

gdje je  $C = -M^{-1}N$ .