



Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "*" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (5+15+5).

- ★ Definirajte matričnu normu na $\mathbb{C}^{n \times n}$.
- Dokažite da je preslikavanje $\|\cdot\|_m : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ zadano sa $\|A\|_m = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$, matrična norma.
- ★ Navedite primjer netrivialne matrice $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ za koju vrijedi

$$\|M\|_F = \|M\|_1 = \|M\|_2 = \|M\|_\infty.$$

Zadatak 2 (5+15).

- ★ Definirajte povratno stabilan algoritam.
- Dokažite da je izračunati rezultat zbrajanjem \oplus povratno stabilan. Precizno iskažite pretpostavke koje ste koristili u dokazu.

Zadatak 3 (15+5).

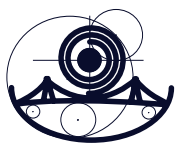
- Odredite $\kappa_2(A)$, $\kappa_\infty(B)$, $\kappa_F(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- ★ Neka je $U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ortogonalna matrica, izračunajte $\|BU^2\|_F$.

Zadatak 4 (5+25).

- ★ Napišite algoritam Gaussovih eliminacija.



- Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koji ne postoji jedinstvena LU faktorizacija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \alpha & -5 & 9 \\ 0 & \alpha & -5 \end{bmatrix}$$

te primjenom algoritma Gaussovih eliminacija riješite sustav $Ax = b$, za $\alpha = 2$, ako je $b = [2, 3, 1]$.

Zadatak 5 (5+10+10).

- ★ Definirajte spektralni radijus matrice.
- ★ Dokažite da za bilo koju matricnu normu $\|\cdot\|$, bilo koju matricu $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i bilo koji $l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\rho(M)^l \leq \|M^l\| \leq \|M\|^l.$$

- ★ Neka je $\|\cdot\|_m$ matricna norma. Dokažite a tada za svaku hermitsku matricu $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vrijedi

$$\|M\|_2^2 \leq \|M\|_m^2.$$