Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "$\star$" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (5+15+5).

- $\star$ Definirajte matričnu normu na $\mathbb{C}^{n\times n}$.
- Dokažite da je preslikavanje $||\cdot||_m : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ zadano sa $||A||_m = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$, matrična norma.
- $\star$ Navedite primjer netrivijalne matrice $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ za koju vrijedi

$$||M||_F = ||M||_1 = ||M||_2 = ||M||_\infty.$$

Zadatak 2 (5+15).

- $\star$ Definirajte povratno stabilan algoritam.
- Dokažite da je izračunati rezultat zbrajanjem $\bigoplus$ povratno stabilan. Precizno iskažite pretpostavke koje ste koristili u dokazu.

Zadatak 3 (15+5).

- Odredite $\kappa_2(A)$, $\kappa_\infty(B)$, $\kappa_F(B)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- $\star$ Neka je $U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ortogonalna matrica, izračunajte $||BU^2||_F$.

Zadatak 4 (5+25).

- $\star$ Napišite algoritam Gaussovih eliminacija.

- Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koji ne postoji jedinstvena LU faktorizacija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \alpha & -5 & 9 \\ 0 & \alpha & -5 \end{bmatrix}$$

te primjenom algoritma Gaussovih eliminacija riješite sustav $Ax = b$, za $\alpha = 2$, ako je $b = [2, 3, 1]$.

Zadatak 5 (5+10+10).

- ⋆ Definirajte spektralni radijus matrice.
- ⋆ Dokažite da za bilo koju matričnu normu $||\cdot||$, bilo koju matricu $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i bilo koji $l \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\rho(M)^l \le ||M^l|| \le ||M||^l.$$
- ⋆ Neka je $||\cdot||_m$ matrična norma. Dokažite a tada za svaku hermitsku matricu $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vrijedi
$$||M||_2^2 \le ||M||_m^2.$$