

## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "★" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

---

### Zadatak 1 (10+10).

- ★ Dokažite Cauchy - Schwarz nejednakost.  
Neka je  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  skalarni produkt. Tada vrijedi

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

za svaki  $x, y \in \mathbb{C}^n$  i jednakost vrijedi ako i samo ako su  $x$  i  $y$  linearno zavisni.

- Dokažite da vrijedi

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2.$$

### Zadatak 2 (5+15).

- ★ Definirajte skalarni produkt.
- Neka je dano preslikavanje  $(\cdot : \cdot) : \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$  s

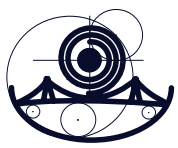
$$(A : B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij},$$

gdje je  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ . Pokažite da je tako definirano preslikavanje skalarni produkt na  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

### Zadatak 3 (5+15).

- ★ Definirajte uvjetovanost matrice.
- Odredite  $\kappa_F(A), \kappa_F(B), \kappa_2(A), \kappa_2(B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Zadatak 4 (5+25).**

- ★ Iskažite teorem LU faktorizacije.
- Odredite LU faktorizacije za sljedeće matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

te riješite sustav  $Ax = b$ , ako je  $b = [0, 5, -8]$ .

**Zadatak 5 (10+20).**

- ★ Neka je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , uz koji uvjet na matricu  $A$  vrijedi da je matrica  $I + A$  regularna.
- ★ Dokažite da u tom slučaju vrijedi nejednakost

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$