Kolokvij 1

14.11.2016.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "⋆" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Zadatak 1 (10+10).

⋆ Dokažite Cauchy - Schwarz nejednakost.
Neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ skalarni produkt. Tada vrijedi

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

za svaki $x, y \in \mathbb{C}^n$ i jednakost vrijedi ako is samo ako su x i y linearno zavisni.

- Dokažite da vrijedi

$$||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2.$$

Zadatak 2 (5+15).

⋆ Definirajte skalarni produkt.

- Neka je dano preslikavanje $(\cdot : \cdot) : \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ s

$$(A : B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij},$$

gdje je $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Pokažite da je tako definirano preslikavanje skalarni produkt na $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Zadatak 3 (5+15).

⋆ Definirajte uvjetovanost matrice.

- Odredite $\kappa_F(A)$, $\kappa_F(B)$,$\kappa_2(A)$, $\kappa_2(B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4 (5+25).

- ⋆ Iskažite teorem LU faktorizacije.
- Odredite LU faktorizacije za sljedeće matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

te riješite sustav $Ax = b$, ako je $b = [0, 5, -8]$.

Zadatak 5 (10+20).

- ⋆ Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, uz koji uvjet na matricu A vrijedi da je matrica $I + A$ regularna.
- ⋆ Dokažite da u tom slučaju vrijedi nejednakost

$$||(I + A)^{-1}|| \leq (1 - ||A||)^{-1}.$$