



## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "\*" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

**Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.**

### Zadatak 1 (5+25).

- ★ Iskažite ocjenu gornje međe faktora rasta elementa matrice  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & -8 \\ -4 & 2 & -8 & \alpha^2 \\ 6 & -12 & 18 & 6 \\ 1 & 6 & -5 & -\alpha \end{bmatrix},$$

gdje je parametar  $\alpha$  realan broj. Izračunajte LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice  $A$  u ovisnosti o parametru  $\alpha$ , te obrazložite za koje parametre  $\alpha$  je matrica  $A$  regularna. Odredite matrice  $L, P, U$  za  $\alpha = 3$  te riješite sustav  $Ax = b$ , gdje je  $b = [-13, 11, 6, -3]^T$ . Odredite faktor rasta matrice  $A$ .

### Zadatak 2 (20).

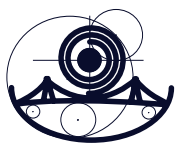
- Neka je dan vektor  $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$  i matrica  $H$  takva da je  $H = I + vv^*$ . Ako je  $a \in \mathbb{R}^n$  proizvoljan vektor, izbrojite potreban broj množenja i zbrajanja da bi se izračunao produkt  $Ha$ .
  - a) ako se produkt računa na način  $a + v(v^*a)$
  - b) ako se produkt računa kao produkt matrice  $H$  i vektora  $a$ , odnosno  $Ha$  (pri čemu je  $H$  matrica za koju pretpostavljamo da je već izračunata).

### Zadatak 3 (5+15).

- ★ Navedite barem jedan način kako možemo provjeriti može li se sustav riješiti Jacobijevom metodom.
- Odredite prve dvije aproksimacije rješenja te potreban broj koraka tako da apsolutna greška Jacobijeve metode u  $\|\cdot\|_1$  bude manja od 0.0001, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 6 & 20 & 5 \\ 5 & 4 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix},$$

ako je početni vektor  $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ .



**Zadatak 4 (15+10).**

- ★ Neka je  $C = -M^{-1}N$  matrica u Jacobijevoj metodi. Dokažite da Jacobijeva metoda konvergira ako je  $\rho(C) < 1$ .
- ★ Pokažite da u metodi najbržeg silaska vrijedi slijedeće:

$$r_{k+1}^* r_k = 0 \quad \text{i} \quad e_{k+1}^* A r_k = 0,$$

pri čemu su  $r_k$  i  $e_k$ , redom rezidual i pogreška  $k$ -te aproksimacije rješenja.

**Zadatak 5 (15+10).**

- Odredite može li se za matrice  $A, B, C$  riješiti odgovarajući linearni sustav metodom najbržeg silaska.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ★ Napišite algoritam za metodu najbržeg silaska.