Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "⋆" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (5+25).

⋆ Iskažite ocjenu gornje međe faktora rasta elementa matrice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & -8 \\ -4 & 2 & -8 & \alpha^2 \\ 6 & -12 & 18 & 6 \\ 1 & 6 & -5 & -\alpha \end{bmatrix},$$

gdje je parametar α realan broj. Izračunajte LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice A u ovisnoti o parametru α, te obrazložite za koje parametre α je matrica A regularna. Odredite matrice L, P, U za $\alpha = 3$ te riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [-13, 11, 6, -3]^T$. Odredite faktor rasta matrice A.

Zadatak 2 (20).

- Neka je dan vektor $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ i matrica H takva da je $H = I + vv^*$. Ako je $a \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor, izbrojite potreban broj množenja i zbrajanja da bi se izračunao produkt Ha.
  a) ako se produkt računa na način $a + v(v^*a)$
  b) ako se produkt računa kao produkt matrice H i vektora a, odnosno Ha (pri čemu je H matrica za koju pretpostavljamo da je već izračunata).

Zadatak 3 (5+15).

⋆ Navedite barem jedan način kako možemo provjeriti može li se sustav riješiti Jacobijevom metodom.

- Odredite prve dvije aproksimacije rješenja te potreban broj koraka tako da apsolutna greška Jacobijeve metode u $||\cdot||_1$ bude manja od 0.0001, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 6 & 20 & 5 \\ 5 & 4 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix},$$

ako je početni vektor $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Zadatak 4 (15+10).

- ⋆ Neka je $C = -M^{-1}N$ matrica u Jacobijevoj metodi. Dokažite da Jacobijeva metoda konvergira ako je $\rho(C) < 1$.
- ⋆ Pokažite da u metodi najbržeg silaska vrijedi slijedeće:

$$r_{k+1}^* r_k = 0 \quad \text{i} \quad e_{k+1}^* A r_k = 0,$$

pri čemu su r_k i e_k, redom rezidual i pogreška k-te aproksimacije rješenja.

Zadatak 5 (15+10).

- Odredite može li se za matrice A, B, C riješiti odgovarajući linearni sustav metodom najbržeg silaska.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ⋆ Napišite algoritam za metodu najbržeg silaska.