Kolokvij 2

9.1.2017.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "$\star$" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Zadatak 1 (5+15+15).

$\star$ Navedite primjer regularne matrice $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$ za koju ne postoji LU - faktorizacija te obrazložite zašto ne postoji LU - faktorizacija.

- Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje matrica $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ zadana s

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda & 1 \\ -\lambda & -2\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  ne dopušta LU - faktorizaciju. Koristeći djelomično pivotiranje odredite PLU - faktorizaciju od B za najveći takav λ.

$\star$ Dokažite ocjenu gornje međe faktora rasta elementa matrice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Za koju matricu $C \in \mathbb{R}^{4\times4}$ se ta vrijednost postiže?

Zadatak 2 (15).

- Odredite QR faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3 (20).

- Neka je dan sustav $Ax = b$. Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $PAx = Pb$ može riješiti Jacobijevom metodom i odredite potreban broj koraka da greška u $||\cdot||_\infty$ bude manja od 0.005, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 15 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix},$$

  uz početni vektor $x^{(0)} = [5, 0, -5]^T$.

Zadatak 4 (5+20).

- ⋆ Izvedite rješenje sustava $Ax = b$ pomoću vektora iz pripadnog Krilovljevog prostora u slučaju da je A regularna matrica.
- ⋆ Neka je A simetrična pozitivno definitna matrica i neka je x_k k-ta aproksimacija dobivena metodom najbržeg silaska te neka je r_k odgovarajući rezidual. Dokažite da vrijedi $(x - x_{k+1})^T A r_k = 0$ i $||x - x_{k+1}||_A \leq ||x - x_k||_A$.

Zadatak 5 (25).

- Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Provjerite može li se sustav $Ax = b$ riješiti metodom konjugiranih gradijenata te ukoliko može, riješite ga pri čemu je $x^{(0)} = [2, 1]^T$.