

## Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. **Kodovi se šalju na e-mail [mpuvaca@mathos.hr](mailto:mpuvaca@mathos.hr) uz naslov/predmet e-mail-a "NLA–kolokvij3"**. Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "\*" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

**Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.**

### Zadatak 1 (20).

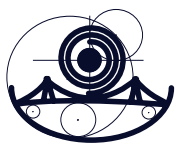
- Definirajte funkciju `provjerassd` koja prima matricu te provjerava je li matrica strogo dijagonalno dominantna po stupcima. Ukoliko je matrica strogo dijagonalno dominantna po stupcima, funkcija treba vratiti vrijednost 1 uz ispis `Matrica je SSD.`, ukoliko matrica nije strogo dijagonalno dominantna po stupcima, funkcija treba vratiti vrijednost 0 uz ispis `Matrica nije SSD.` Testirajte na primjerima:

$$A = \begin{bmatrix} 55 & -20 & -1 & \dots & -1 \\ -20 & 55 & -20 & \ddots & \vdots \\ -1 & -20 & 55 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -20 \\ -1 & \dots & -1 & -20 & 55 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15 \times 15},$$
$$B = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -1 & \dots & -1 \\ 10 & 20 & 10 & \ddots & \vdots \\ -1 & 10 & 20 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 10 \\ -1 & \dots & -1 & 10 & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}.$$

(Za unošenje matrice koristite Matlab funkcije.)

### Zadatak 2 (20).

- ★ Neka je  $A = U\Sigma V^T$  singularna dekompozicija matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  te neka je prvih  $r$  singularnih vrijednosti netrivialno. Odredite singularnu dekompoziciju matrice  $A^T A$  te prikažite jezgru i sliku od  $A^T A$  pomoću singularnih vektora matrice  $A$ . Dokažite svoju tvrdnju za sliku matrice  $A^T A$ .



**Zadatak 3 (5+20).** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & -11 \\ -3 & 0 & 10 & 2 \\ -9 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix}$ .

- Može li se sustav  $Ax = b$  riješiti metodom konjugiranih gradijenata?
- Odredite matricu permutacije  $P$  tako da se sustav  $P Ax = P b$  može riješiti Jacobijevom metodom te objasnite zašto ste odabrali baš tu matricu  $P$ .  
Napišite program koji rješava sustav Jacobijevom metodom tako da norma  $\| \cdot \|_{\infty}$  reziduala bude manja od 0.0005. Za početnu aproksimaciju uzmite nulvektor.  
Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbe `\` i ostalih ugrađenih naredbi u Matlabu.

Koliko je koraka bilo potrebno napraviti Jacobijevom metodom?

Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala?

Koliko koraka bi bilo potrebno napraviti Jacobijevom metodom da nam je uvjet bio da je norma  $\| \cdot \|_{\infty}$  greške u odnosu na pravo rješenje manja od 0.0005?

**Zadatak 4 (5+5+15).**

- ★ Zapišite uvjetovanost matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pomoću singularnih vrijednosti matrice  $A$ .
- ★ Definirajte SVD dekompoziciju matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
- ★ Dokažite tvrdnju: Svaka kvadratna matrica  $H$  dopušta prikaz

$$H = QM_1 = M_2Q,$$

pri čemu je  $Q$  unitarna, a  $M_1$  i  $M_2$  hermitske pozitivno semidefinitne.

**Zadatak 5 (20+10).**

- Odredite  $x$  koji minimizira normu  $\|Ax - b\|_2$ , koristeći algoritam za LPNK pomoću QR dekompozicije, ako je

$$A \in \mathbb{R}^{50 \times 3}, A(i, :) = \left[ \frac{1}{i}, i^2, 1 \right], \quad b \in \mathbb{R}^{50}, b(i) = -2i + 3.$$

Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi `\` i `inv(\cdot)`.

Napišite dobiveno rješenje i odgovarajuću normu reziduala.

- ★ Neka je  $x \in \mathbb{C}^{n \times n}$  te neka je  $Ax - b$  ortogonalno na  $\text{Im}(A)$ , dokažite da tada  $x$  minimizira  $\|Ax - b\|_2$  za sve  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  i  $b \in \mathbb{C}^m$ .