Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. **Kodovi se šalju na e-mail mpuvaca@mathos.hr uz naslov/predmet e-mail-a "NLA−kolokvij3".** Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "$\star$" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Sve svoje tvrdnje obrazložite i precizno iskažite.

Zadatak 1 (20).

- Definirajte funkciju `provjerassd` koja prima matricu te provjerava je li matrica strogo dijagonalno dominantna po stupcima. Ukoliko je matrica strogo dijagonalno dominantna po stupcima, funkcija treba vratiti vrijednost 1 uz ispis `Matrica je SSD.`, ukoliko matrica nije strogo dijagonalno dominantna po stupcima, funkcija treba vratiti vrijednost 0 uz ispis `Matrica nije SSD.` Testirajte na primjerima:

$$A = \begin{bmatrix} 55 & -20 & -1 & \dots & -1 \\ -20 & 55 & -20 & \ddots & \vdots \\ -1 & -20 & 55 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -20 \\ -1 & \dots & -1 & -20 & 55 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15\times 15},$$

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -1 & \dots & -1 \\ 10 & 20 & 10 & \ddots & \vdots \\ -1 & 10 & 20 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 10 \\ -1 & \dots & -1 & 10 & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10\times 10}.$$

(Za unošenje matrice koristite Matlab funkcije.)

Zadatak 2 (20).

$\star$ Neka je $A = U\Sigma V^T$ singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ te neka je prvih r singularnih vrijednosti netrivijalno. Odredite singularnu dekompoziciju matrice A^TA te prikažite jezgru i sliku od A^TA pomoću singularnih vektora matrice A. Dokažite svoju tvrdnju za sliku matrice A^TA .

Zadatak 3 (5+20). Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & -11 \\ -3 & 0 & 10 & 2 \\ -9 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $\quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix}$.

- Može li se sustav $Ax = b$ riješiti metodom konjugiranih gradijenata?
- Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $PAx = Pb$ može riješiti Jacobijevom metodom te objesnite zašto ste odabrali baš tu matricu P.
  Napišite program koji rješava sustav Jacobijevom metodom tako da norma $||\cdot||_\infty$ reziduala bude manja od 0.0005. Za početnu aproksimaciju uzmite nul-vektor.

  Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbe \ i ostalih ugrađenih naredbi u Matlabu.

  Koliko je koraka bilo potrebno napravit Jacobijevom metodom?
  Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala?
  Koliko koraka bi bilo potrebno napraviti Jacobijevom metodom da nam je uvjet bio da je norma $||\cdot||_\infty$ greške u odnosu na pravo rješenje manja od 0.0005?

Zadatak 4 (5+5+15).

⋆ Zapišite uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pomoću singularnih vrijednosti matrice A.

⋆ Definirajte SVD dekompoziciju matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

⋆ Dokažite tvrdnju: Svaka kvadratna matrica H dopušta prikaz

$$H = QM_1 = M_2Q,$$

pri čemu je Q unitarna, a M_1 i M_2 hermitske pozitivno semidefinitne.

Zadatak 5 (20+10).

- Odredite x koji minimizira normu $||Ax - b||_2$, koristeći algoritam za LPNK pomoću QR dekompozicije, ako je

$$A \in \mathbb{R}^{50\times 3}, A(i,:) = [\frac{1}{i}, i^2, 1], \quad b \in \mathbb{R}^{50}, b(i) = -2i + 3.$$

  Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi \ i inv$(\cdot)$.

  Napišite dobiveno rješenje i odgovarajuću normu reziduala.

⋆ Neka je $x \in \mathbb{C}^{n\times n}$ te neka je $Ax - b$ ortogonalno na $\mathrm{Im}(A)$, dokažite da tada x minimizira $||Ax - b||_2$ za sve $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{C}^m$.